Stavební mechanika R1
K132 SMR1

Přednáška č. 10

Průřezové charakteristiky I

Co nás čeká v deváté přednášce

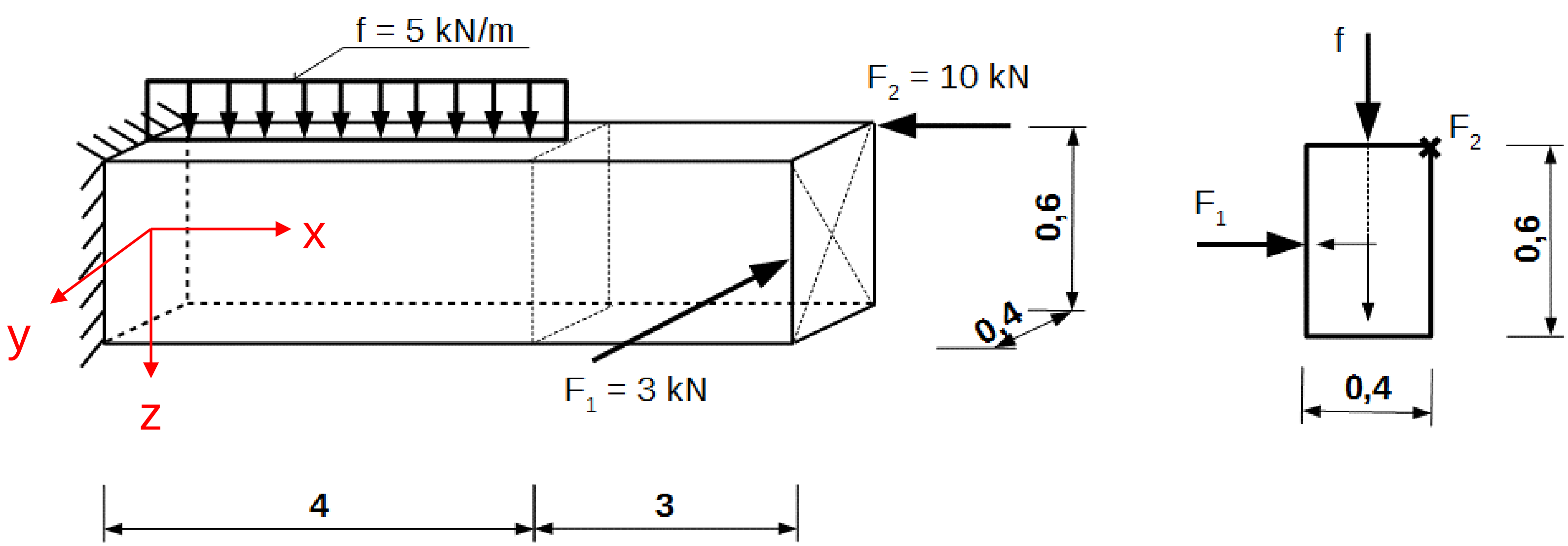
Průřezové charakteristiky
- Definice
- Hlavní centrální osy setrvačnosti průřezu
- Translace souřadného systému – Steinerovy věty

II. krátký testík
- Psací potřeby
- Papír
- Kalkulačka

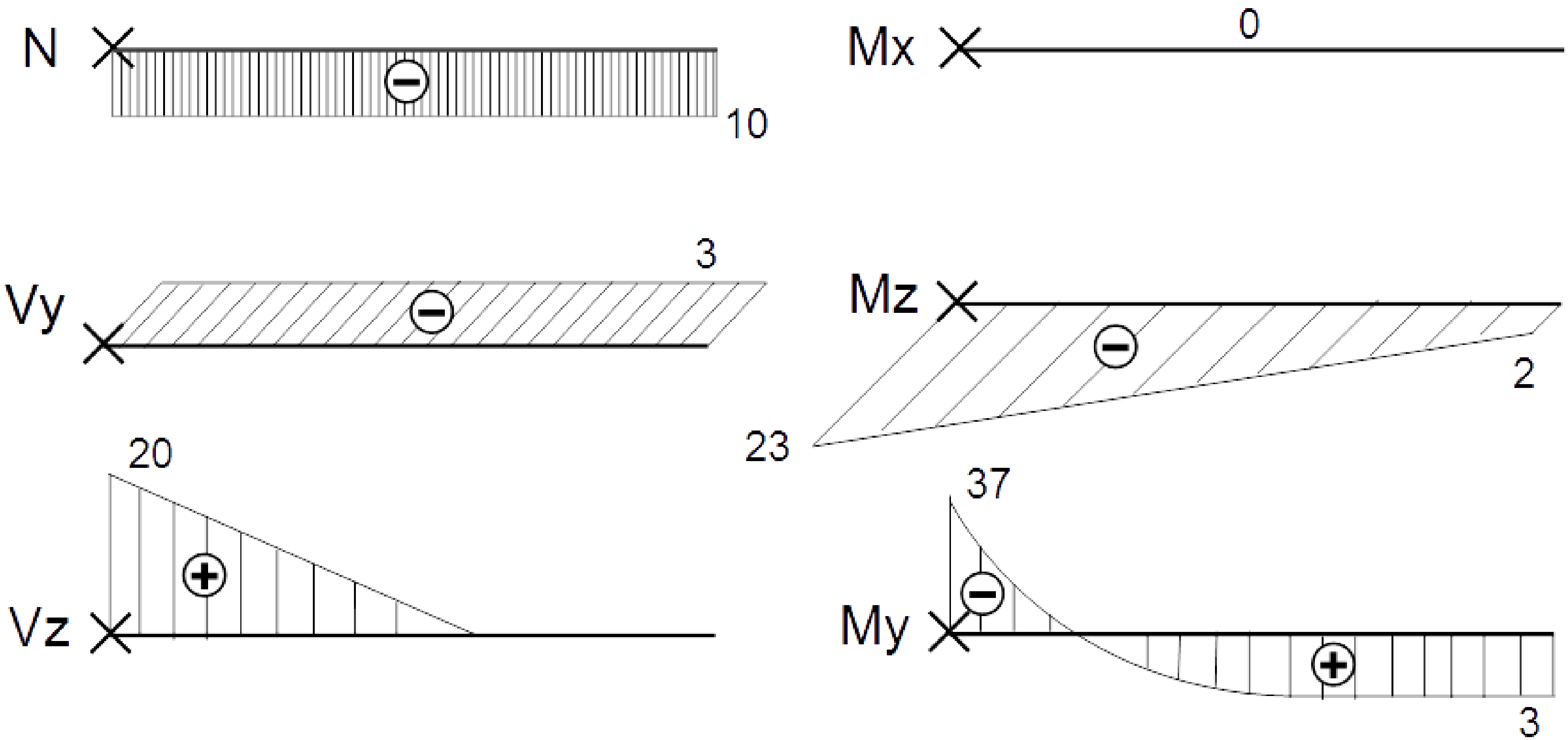
Co nás čeká ve čtvrté přednášce?

Krátký test: (15 minut)

Na zadané konstrukci vykreslete průběh všech vnitřních sil



Řešení testu

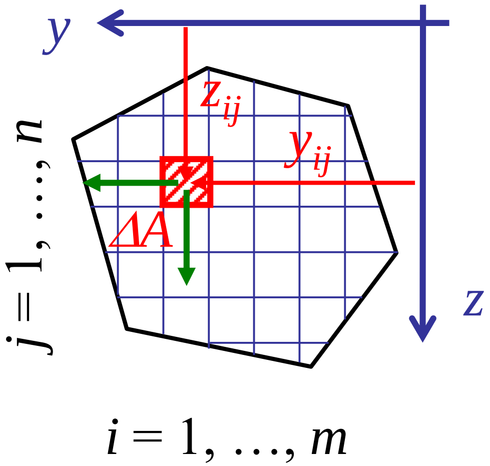


Bodování:

	N, Mx	2 x 0,5 b
	Vy, Vz	2 x 0,75 b
	My, Mz	2 x 1,25 b

Plocha průřezu A

- uvažujme plochu obecného tvaru A v rovině y-z
- plochu rozdělíme na elementární plošky ΔA ($m \times n$)
- velikost fiktivní elementární plošky je rovna ΔA
- řešení sumací



$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta y \cdot \Delta z$$

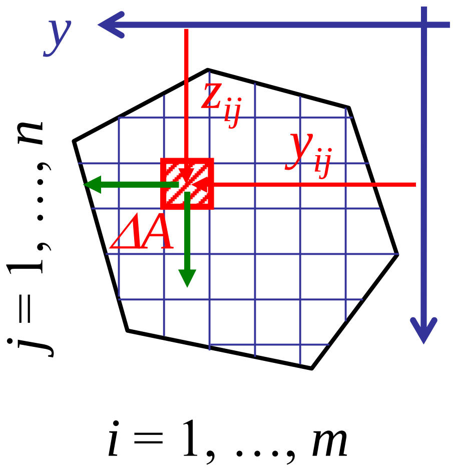
- Po zjemnění dělení

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta A \Rightarrow \iint_A 1 \cdot dA \Rightarrow \textit{možno zkrácený zápis jako} \int_A dA$$

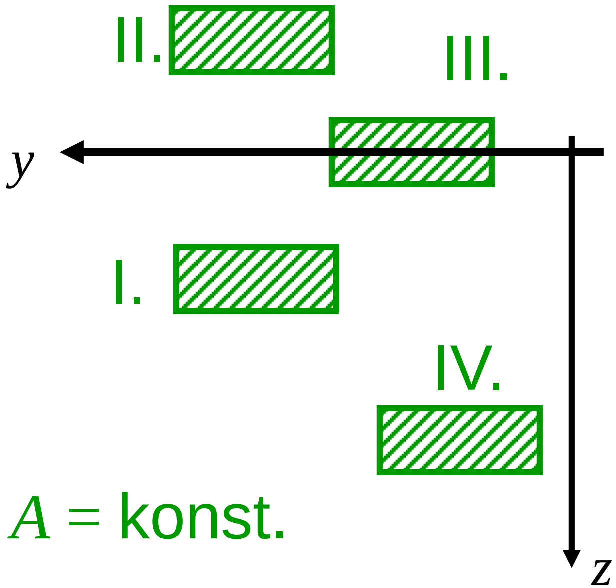
je nezávislá na volbě souřadného systému, vždy kladná

Statický moment Sy

$$S_y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \cdot \Delta A = \int_A z dA$$



- Závisí na volbě **osy y**
- Může být kladný i záporný



$$S_y^{I} > 0\ m^3$$

$$S_y^{II} = -S_y^{I}$$

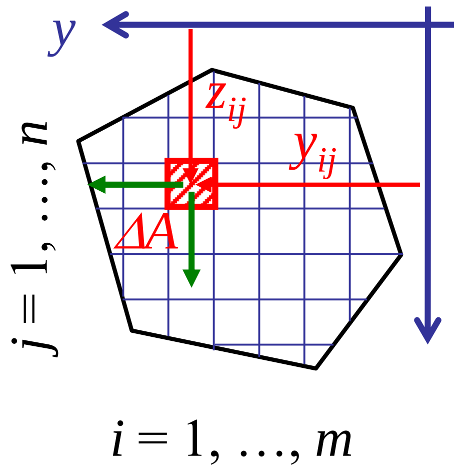
$$S_y^{III} = 0\ m^3 \rightarrow osa\ y\ osou\ symetrie$$

$$S_y^{IV} > S_y^{I}$$

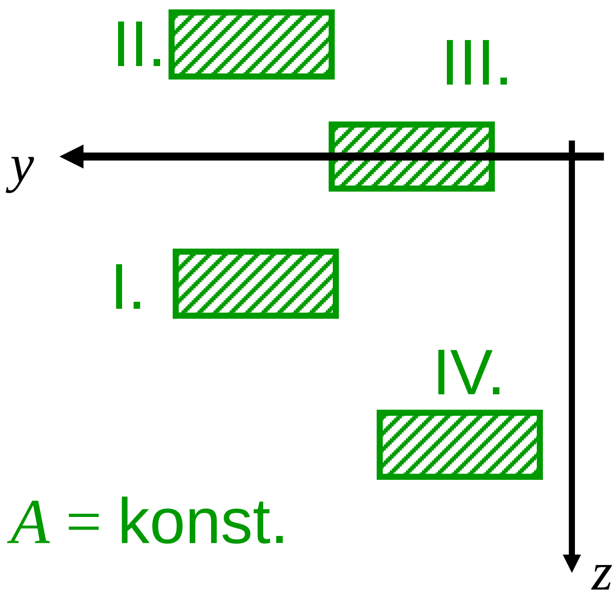
- Statický moment Sz se chová obdobně

Axiální moment setrvačnosti Iy

$$I_y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \cdot \Delta A = \int_A z^2 dA$$



- Závisí na volbě **osy y**
- Může být pouze kladný



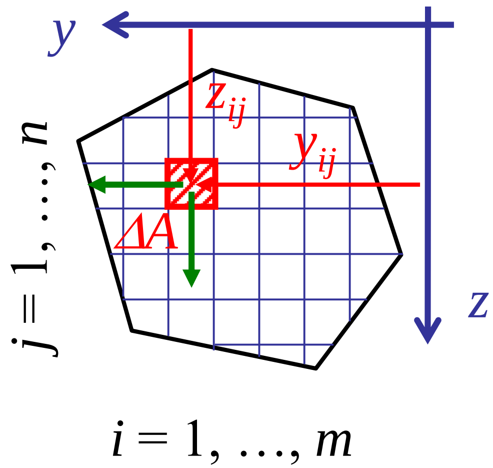
$$I_y^{II} = I_y^{I}$$

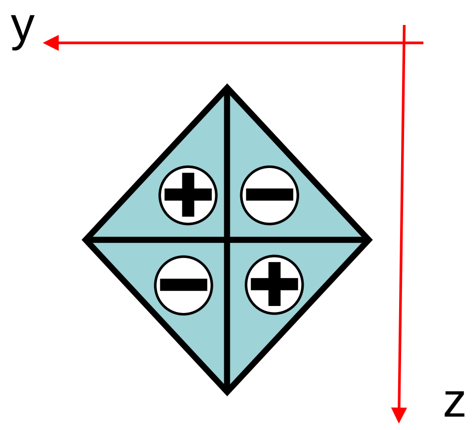
$$I_y^{III} < I_y^{I} = I_y^{II} < I_y^{IV}$$

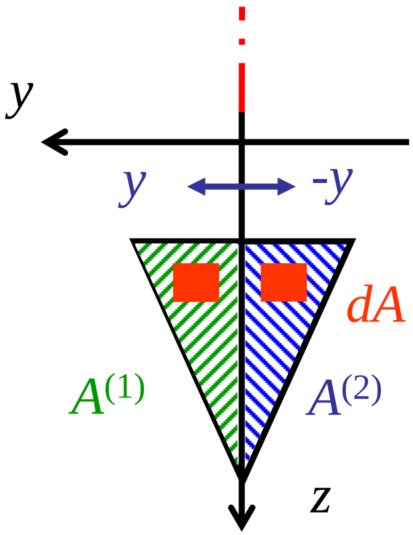
- Moment setrvačnosti Iz se chová obdobně

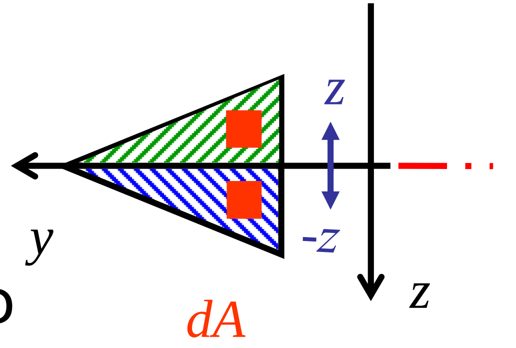
Deviační moment Dyz

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \cdot z_{ij} \cdot \Delta A = \int_A y \cdot z \cdot dA$$



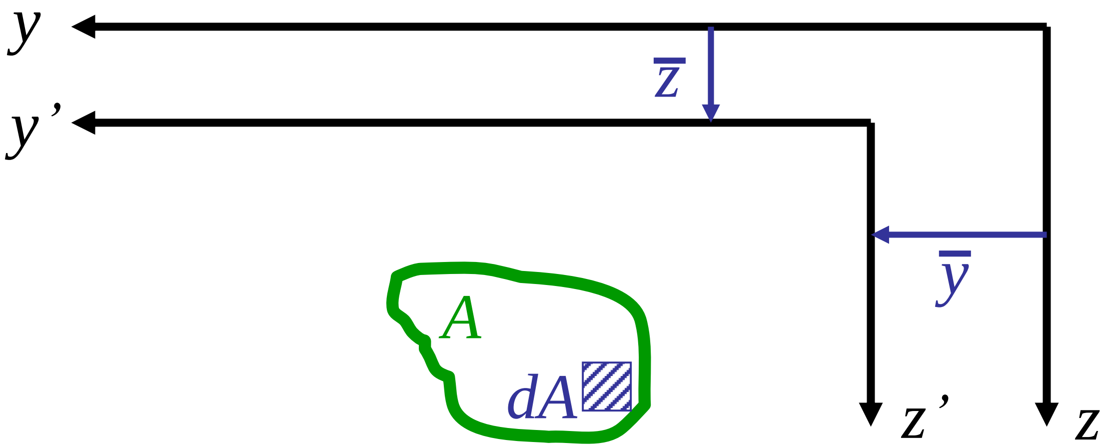






- může mít libovolné znaménko
- pokud osa y nebo z splývá s osou symetrie, pak je $D_{yz}=0$ m^4

Transformace průřezových charakteristik I: translace



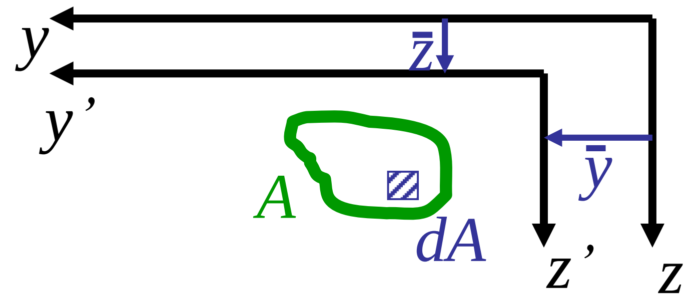
- Souřadné soustavy (y,z) a (y',z')

$$y' = y - \bar{y} \qquad z' = z - \bar{z}$$

- **Známe** průřezové charakteristiky ve „starém“ souřadném systému (y,z)
- **Hledáme** průřezové charakteristiky v „novém“ souřadném systému (y',z')

[Snažíme se co nejvíce využít známých veličin]

Transformace statických momentů



- Transformace plochy průřezu

$$A' = \int_A 1 \cdot \mathrm{d}A = A$$

průřezová plocha je tedy *invariantní vůči pootočení souřadného systému*

- Transformace statických momentů

$$S_{y'} = \int_A z'\mathrm{d}A = \int_A \left(z - \bar{z}\right)\mathrm{d}A = \int_A z\mathrm{d}A - \bar{z}\int_A \mathrm{d}A = S_y - \bar{z}A$$

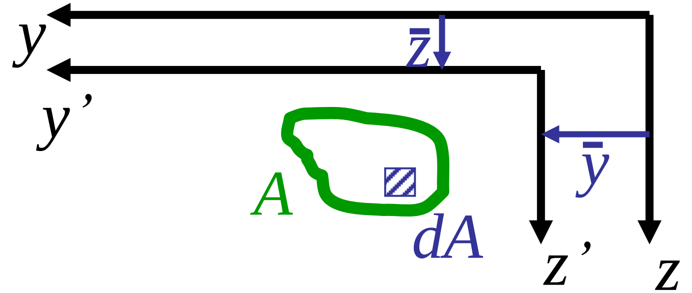
$$S_{z'} = \int_A y'\mathrm{d}A = \int_A \left(y - \bar{y}\right)\mathrm{d}A = \int_A y\mathrm{d}A - \bar{y}\int_A \mathrm{d}A = S_z - \bar{y}A$$

- Výpočet těžiště

$$S_{yc} = S_y - z_c A = 0 \Rightarrow \boxed{z_c = \frac{S_y}{A}} \qquad S_{zc} = S_z - y_c A = 0 \Rightarrow \boxed{y_c = \frac{S_z}{A}}$$

Transformace průřezových charakteristik I: translace

- Transformace osových momentů setrvačnosti a deviačních momentů



$$I_{y'}=\int_A (z')^2\,\mathrm{d}A=\int_A (z-\bar{z})^2\,\mathrm{d}A=\int_A z^2\mathrm{d}A-2\bar{z}\int_A z\mathrm{d}A+\int_A \bar{z}^2\mathrm{d}A$$

$$=I_y-2\bar{z}S_y+\bar{z}^2A$$

$$I_{z'}=\int_A (y')^2\,\mathrm{d}A=\int_A (y-\bar{y})^2\,\mathrm{d}A=\int_A y^2\mathrm{d}A-2\bar{y}\int_A y\mathrm{d}A+\int_A \bar{y}^2\mathrm{d}A$$

$$=I_z-2\bar{y}S_z+\bar{y}^2A$$

$$D_{y'z'}=\int_A y'z'\,\mathrm{d}A=\int_A (y-\bar{y})(z-\bar{z})\,\mathrm{d}A$$

$$=\int_A yz\mathrm{d}A-\bar{y}\int_A z\mathrm{d}A-\bar{z}\int_A y\mathrm{d}A+\overline{yz}\int_A 1\mathrm{d}A=D_{yz}-\bar{z}S_y-\bar{y}S_z+\overline{yz}A$$

Transformace průřezových charakteristik I: translace

- **Předpoklad**: původní osy y a z jsou těžišťové
- *Steinerovy věty*

$$I_{y'} = I_y + \bar{z}^2 A$$
$$I_{z'} = I_z + \bar{y}^2 A$$
$$D_{y'z'} = D_{yz} + \overline{yz} A$$

Steinerovy doplňky

- Vliv „doplňkových" členů

Moment setrvačnosti nejmenší k těžišti

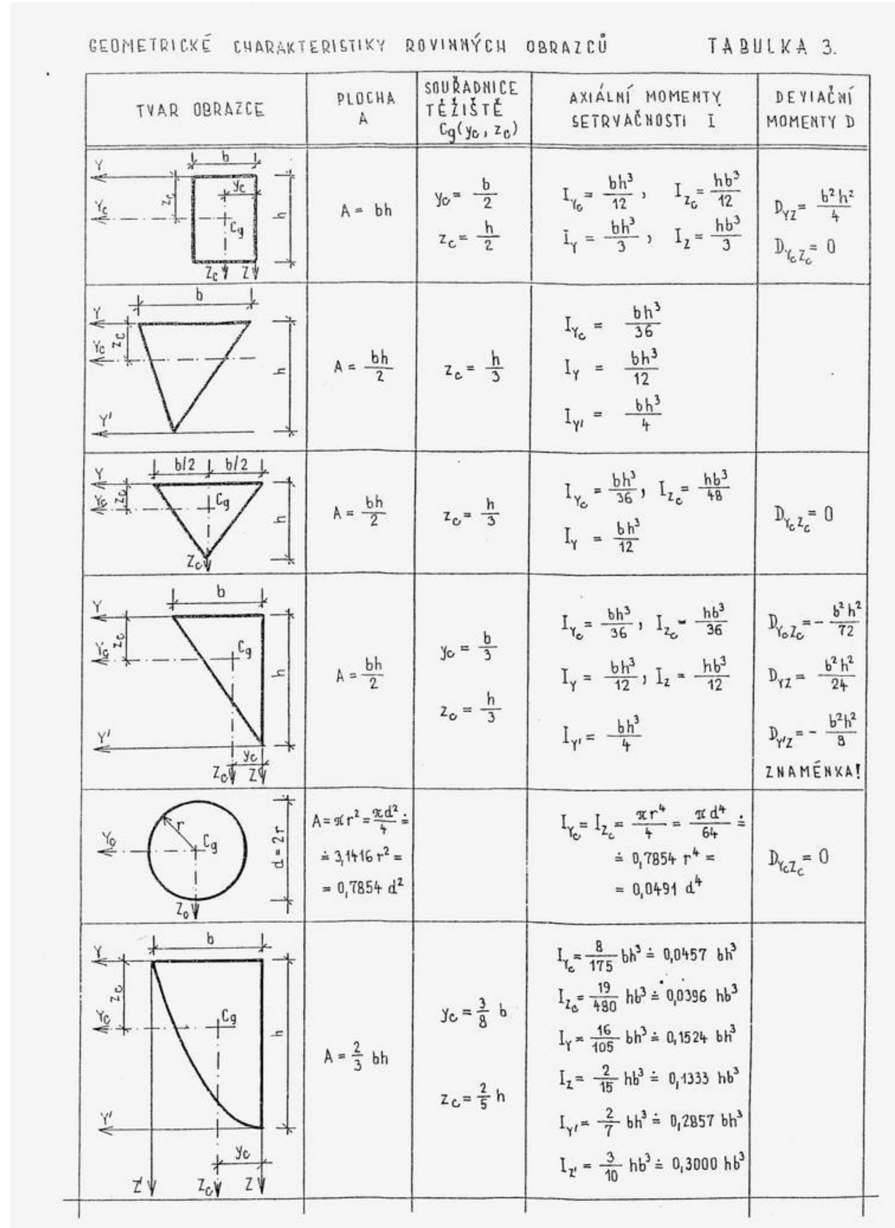
$$I_{y'} = I_y + \bar{z}'^2 A$$
$$I_{y''} = I_y + (-\bar{z}'')^2 A$$

$$|\bar{z}'| < |\bar{z}''| \quad \Rightarrow$$
$$I_y < I_{y'} < I_{y''}$$

Výpočet charakteristik průřezu

Dva základní přístupy

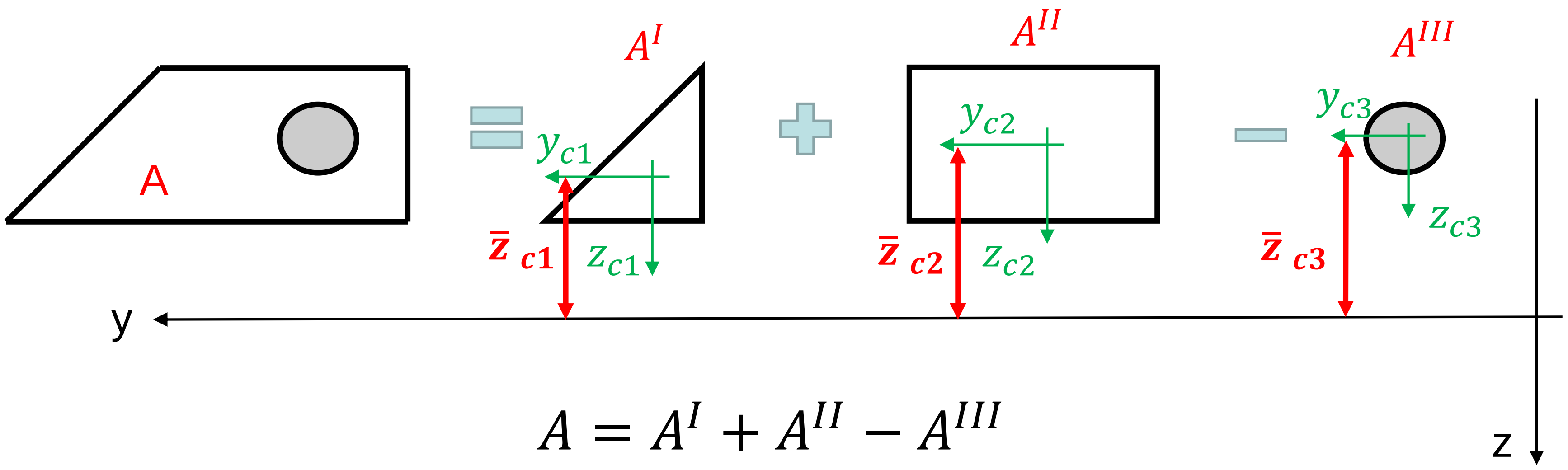
- Přímou integrací: Matematika 2/3
- **Pomocí tabulek**



GEOMETRICKÉ CHARAKTERISTIKY ROVINNÝCH OBRAZCŮ — TABULKA 3.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $C_g(y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIAČNÍ MOMENTY D
	$A = bh$	$y_c = \frac{b}{2}$ $z_c = \frac{h}{2}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{12}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{12}$ $I_Y = \frac{bh^3}{3}$, $I_Z = \frac{hb^3}{3}$	$D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{4}$ $D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{48}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$, $I_{Z_c} = \frac{hb^3}{36}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}$, $I_Z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	$D_{Y_cZ_c} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{24}$ $D_{Y'Z} = -\frac{b^2h^2}{8}$ ZNAMÉNKA!
	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \doteq$ $\doteq 3{,}1416\, r^2 =$ $= 0{,}7854\, d^2$		$I_{Y_c} = I_{Z_c} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \doteq$ $\doteq 0{,}7854\, r^4 =$ $= 0{,}0491\, d^4$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{2}{3}\, bh$	$y_c = \frac{3}{8}\, b$ $z_c = \frac{2}{5}\, h$	$I_{Y_c} = \frac{8}{175}\, bh^3 \doteq 0{,}0457\, bh^3$ $I_{Z_c} = \frac{19}{480}\, hb^3 \doteq 0{,}0396\, hb^3$ $I_Y = \frac{16}{105}\, bh^3 \doteq 0{,}1524\, bh^3$ $I_Z = \frac{2}{15}\, hb^3 \doteq 0{,}1333\, hb^3$ $I_{Y'} = \frac{2}{7}\, bh^3 \doteq 0{,}2857\, bh^3$ $I_{Z'} = \frac{3}{10}\, hb^3 \doteq 0{,}3000\, hb^3$	

Složené průřezy



$$A = A^I + A^{II} - A^{III}$$

Důsledek aditivity (dvojného) integrálu

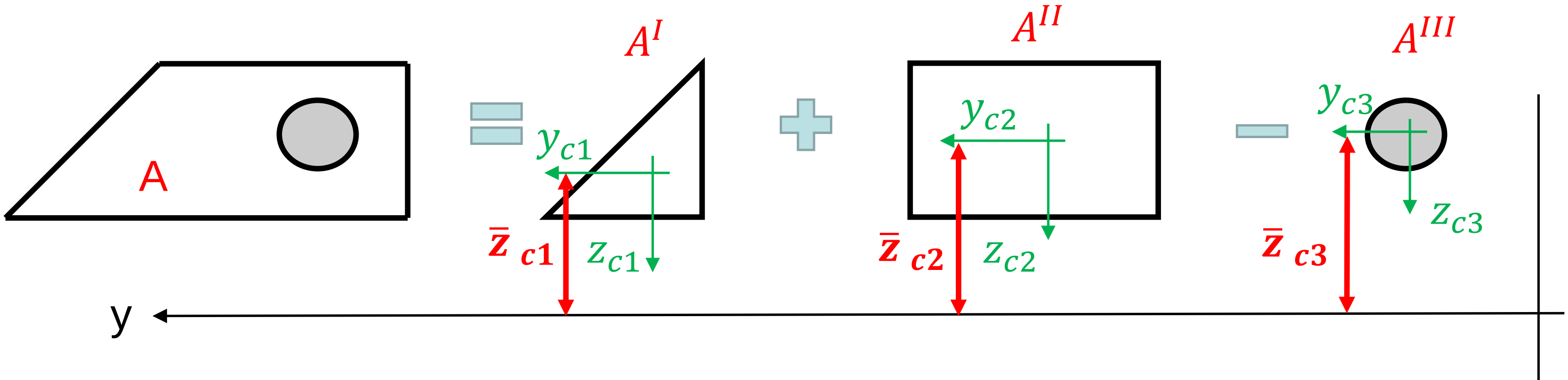
- plocha průřezu

$$A = \int_A 1 \cdot dA = \int_{A^I} 1 \cdot dA + \int_{A^{II}} 1 \cdot dA - \int_{A^{III}} 1 \cdot dA$$

- statický moment k ose y

$$S_y = \int_A z \cdot dA = \int_{A^I} z \cdot dA + \int_{A^{II}} z \cdot dA - \int_{A^{III}} z \cdot dA = \bar{z}_{c1} \cdot A^I + \bar{z}_{c2} \cdot A^{II} - \bar{z}_{c3} \cdot A^{III}$$

Složené průřezy – moment setrvačnosti Iy



$$A = A^{I} + A^{II} - A^{III}$$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{A^I} z^2 \cdot dA + \int_{A^{II}} z^2 \cdot dA - \int_{A^{III}} z^2 \cdot dA =$$

$$= I_y^{I} + I_y^{II} - I_y^{III}$$ (pozn. vše k ose y!)

Souřadnice těžiště podobrazce vztažené k souřadným osám y a z

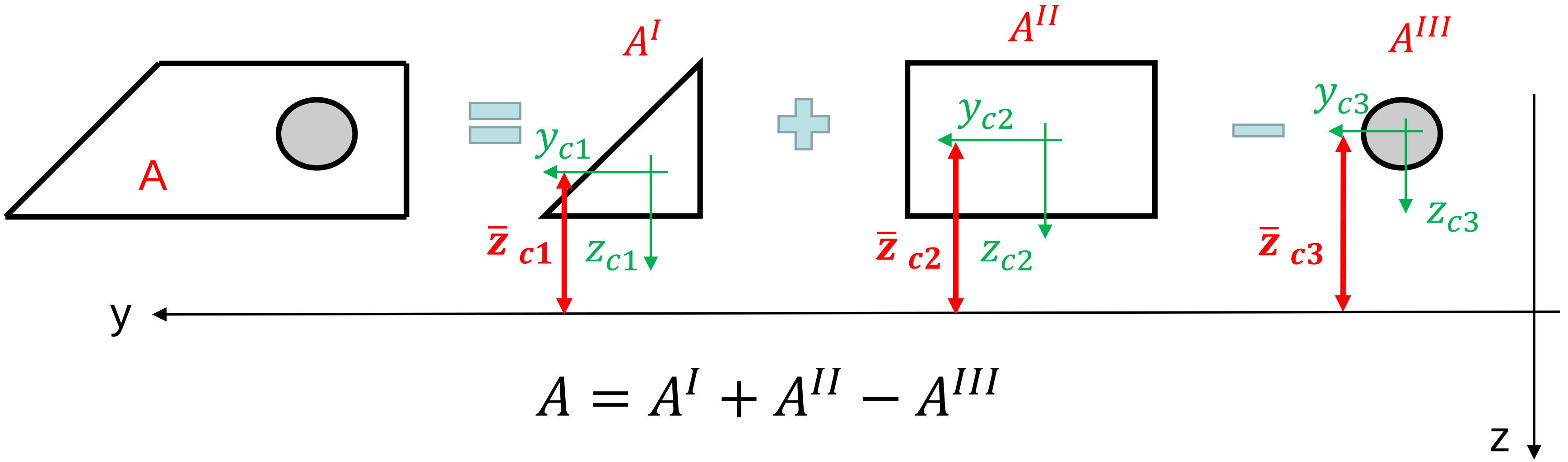
$$I_y^{I} = I_{yc1}^{I} + A^{I} \cdot (\bar{z}_{c1})^2$$

Moment setrvačnosti k vlastním těžišťovým osám podobrazce

$$I_y^{II} = I_{yc2}^{II} + A^{II} \cdot (\bar{z}_{c2})^2$$

$$I_y^{III} = I_{yc3}^{III} + A^{III} \cdot (\bar{z}_{c3})^2$$

Složené průřezy – deviační moment Dyz



$$A = A^I + A^{II} - A^{III}$$

$$D_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA = \int_{A^I} y \cdot z \cdot dA + \int_{A^{II}} y \cdot z \cdot dA - \int_{A^{III}} y \cdot z \cdot dA =$$

$$= D_{yz}^I + D_{yz}^{II} - D_{yz}^{III}$$

Souřadnice těžiště podobrazce vztažené k souřadným osám y a z

$$D_{yz}^I = D_{yc1,zc1}^I + A^I \cdot \bar{y}_{c1} \cdot \bar{z}_{c1}$$

Deviační moment k vlastním těžišťovým osám podobrazce

$$D_{yz}^{II} = D_{yc2,zc2}^{II} + A^{II} \cdot \bar{y}_{c2} \cdot \bar{z}_{c2}$$

$$D_{yz}^{III} = D_{yc3,zc3}^{III} + A^{III} \cdot \bar{y}_{c3} \cdot \bar{z}_{c3}$$

Algoritmus výpočtu těžišťových momentů setrvačnosti průřezu

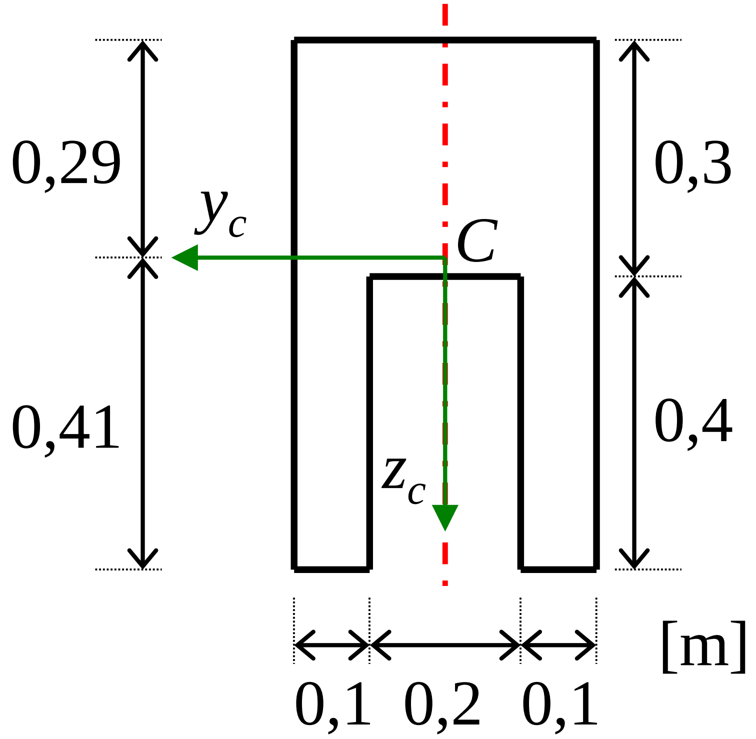
- **Krok 1:** Výpočet plochy průřezu A
- **Krok 2**: Určení těžiště
  - Výpočet statických momentů S_y a S_z
  - Výpočet polohy těžiště
    [posun souřadného systému]

$$y_c = \frac{S_z}{A} \qquad z_c = \frac{S_y}{A}$$

- **Krok 3**: Výpočet centrálních momentů setrvačnosti

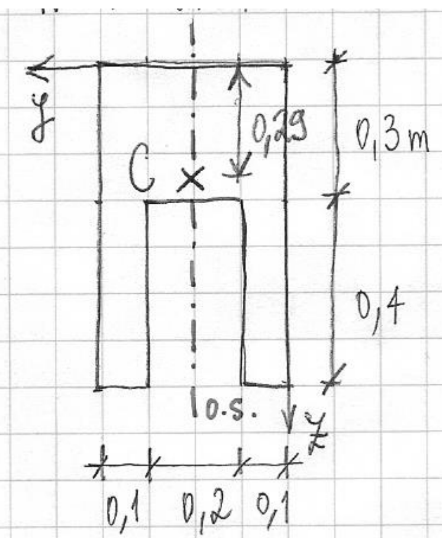
Příklad

Pro daný průřez určete těžišťové momenty setrvačnosti.



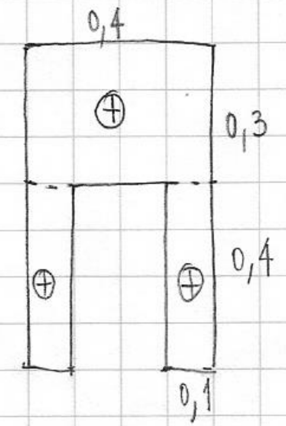
- Výpočet dvěma způsoby

Příklad: Těžiště



$y_c = 0{,}2\,m$

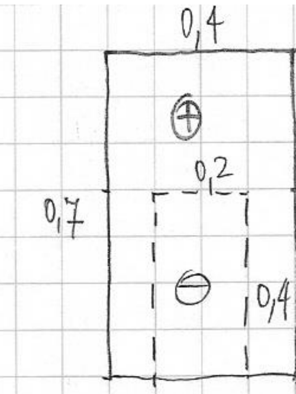
(ze symetrie)



$$A = 0{,}4\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1 = 0{,}2\,m^2$$

$$S_y = 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot \frac{0{,}3}{2} + 2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1\left(0{,}3 + 0{,}4/2\right)$$

$$= 0{,}058\,m^3$$

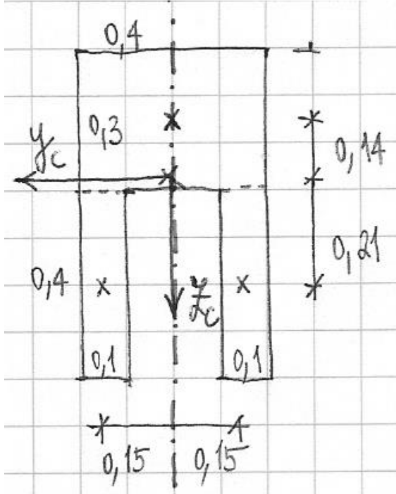


$$A = 0{,}4\cdot 0{,}7 - 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}2\,m^2 \checkmark$$

$$S_y = 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot \frac{0{,}7}{2} - 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot\left(0{,}3 + \frac{0{,}4}{2}\right)$$

$$= 0{,}058\,m^3 \Rightarrow z_c = \frac{0{,}058}{0{,}2} = 0{,}29\,m$$

Příklad: Momenty setrvačnosti



$$I_{yc} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3^3 + 2\,\frac{1}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4^3$$

$$+\ 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}14^2 + 2\cdot 0{,}1\ 0{,}4\cdot 0{,}21^2$$

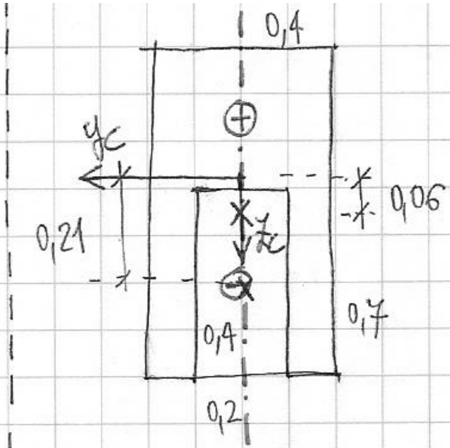
$$\doteq 7{,}847\ 10^{-3}\ \mathrm{m}^4$$

$$I_{zc} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}3 + 2\cdot\frac{1}{12}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}4$$

$$+\ 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}15^2$$

$$\doteq 3{,}467\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4$$

$D_{yczc} = 0\ \mathrm{m}^4$ (ze symetrie)



$$I_{yc} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7^3 - \frac{1}{12}\ 0{,}2\cdot 0{,}4^3$$

$$+\ 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}06^2 - 0{,}2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}21^2$$

$$\doteq 7{,}847\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4 \checkmark$$

$$I_{zc} = \frac{1}{12}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}7 - \frac{1}{12}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}4$$

$$+\ 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0^2 - 0{,}2\ 0{,}4\cdot 0^2$$

$$\doteq 3{,}467\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4 \checkmark$$

$D_{yczc} = 0\ \mathrm{m}^4$ (ze symetrie)

Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu Stavební mechanika R1 pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze. Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.

Při přípravě této přednášky byla použita řada materiálů laskavě poskytnutých Janem Zemanem, Milanem Jiráskem a Vítem Šmilauerem Stavební fakulty ČVUT v Praze.

Pokud v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na tesarek@fsv.cvut.cz

Datum poslední revize: 09.12.2020