Stavební mechanika R1
K132 SMR1

Přednáška č. 2

Výpočet reakcí tuhé desky a tuhého tělesa

Co nás čeká v druhé přednášce?

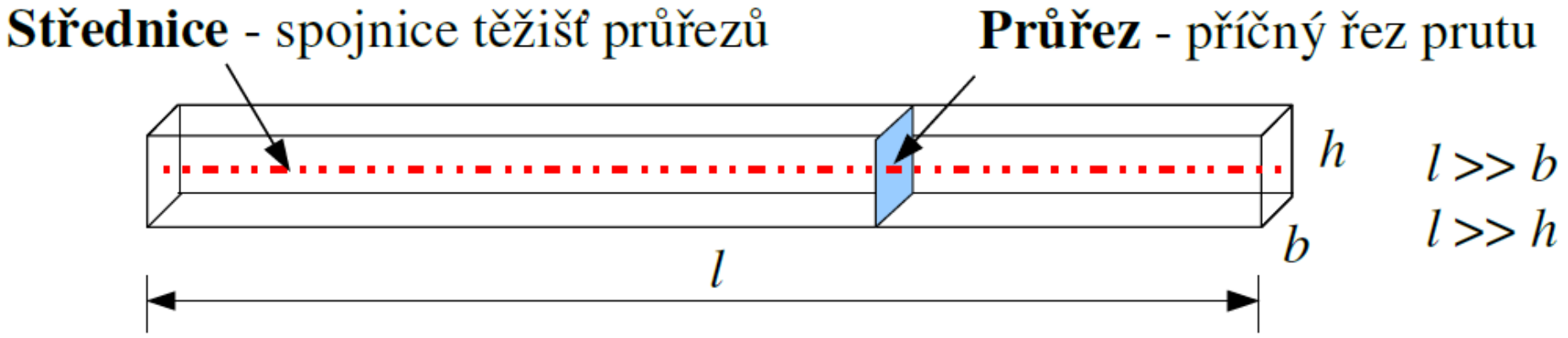
- **Další nástroje**
  - Tuhá deska/prut
- **Tuhá deska v rovině**
  - Stupně volnosti
  - Pohybové zákony
  - Vazby
  - Reakce
- **Tuhé těleso v prostoru**
  - Souřadné systémy v mechanice
  - Recyklace tuhé desky v rovině

(Dokonale) tuhá deska

- **Tuhá deska**
  - těleso, které nemění tvar pod účinky libovolně velkého zatížení
  - Všechny síly působí v jedné rovině (typicky x-z)

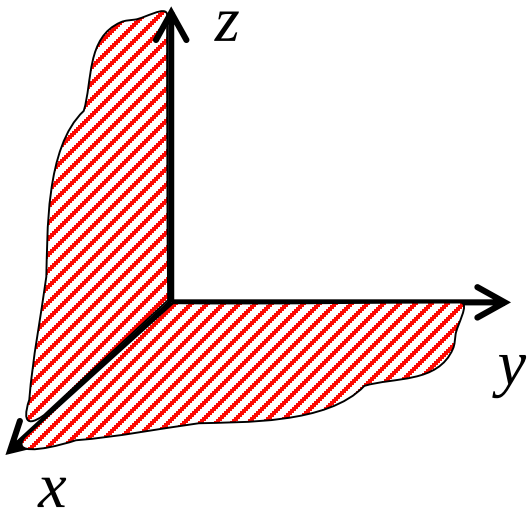
Prut

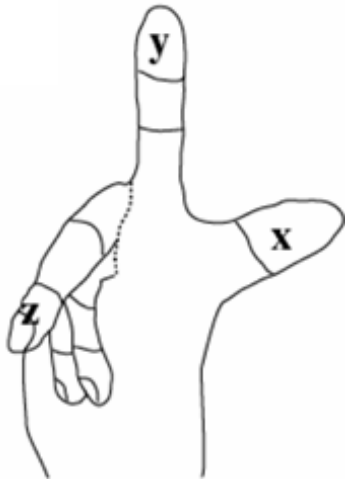
- Základní stavební prvek
- Délka výrazně převládá nad zbývajícími rozměry



Souřadné systémy v mechanice

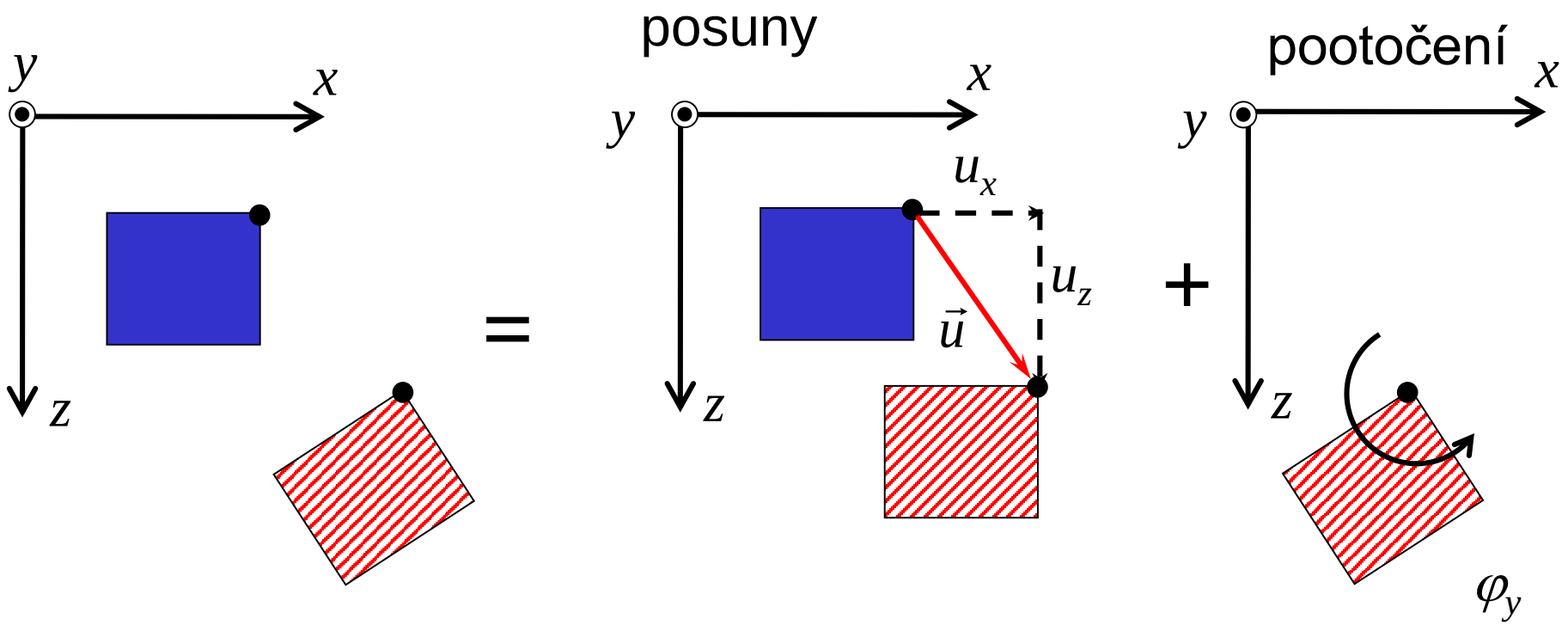
- **Souřadný systém v prostoru**
  - pravotočivá soustava: pootočení
    $x \to y$ v kladném smyslu kolem z
    $y \to z$ v kladném smyslu kolem x
    $z \to x$ v kladném smyslu kolem y
    (kladný smysl = proti směru hodinových ručiček při pohledu proti ose)





Tuhá deska v rovině

- **Stupně volnosti a souřadný systém**



$m = 3$ (2 posuny u_x, u_z + 1 pootočení φ_y)

Ekvivalence x rovnováha

Podmínka ekvivalence:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_r \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot r_i = \vec{M}_r$$

ekvivalentní síla = výslednice sil – zadanou soustavu (svazek) sil mohu nahradit silou jedinou – ekvivalentní (výslednicí)

Podmínka rovnováhy:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{R} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot r_i + \vec{M}_r = 0$$

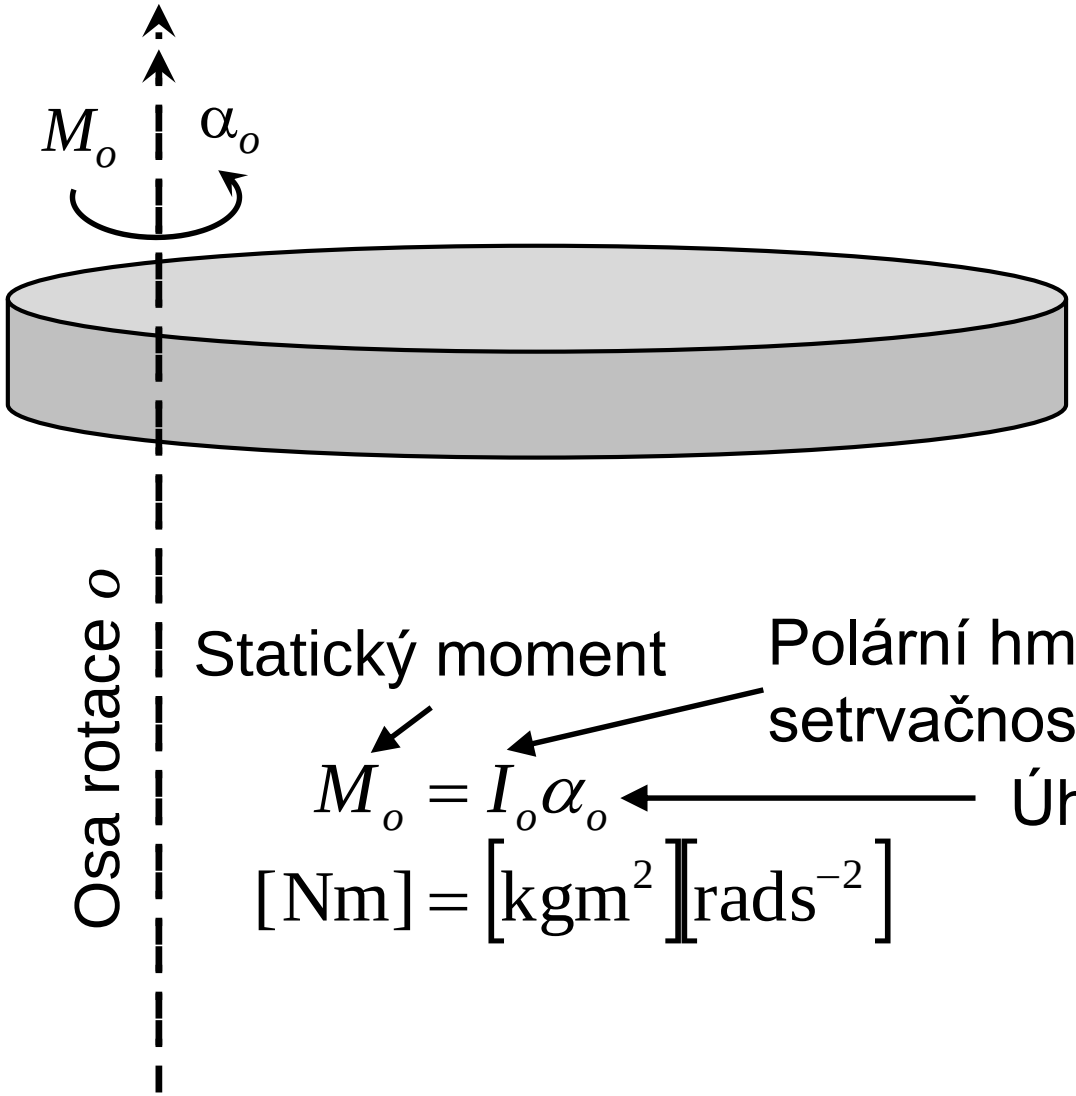
rovnovážná síla = reakce – zadanou soustavu (svazek) sil uvádí do rovnováhy, tak aby byl výsledný silový účinek roven nule

Tuhá deska v rovině

- **Pohybové zákony**

Leonhard Euler

1707—1783



Statický moment

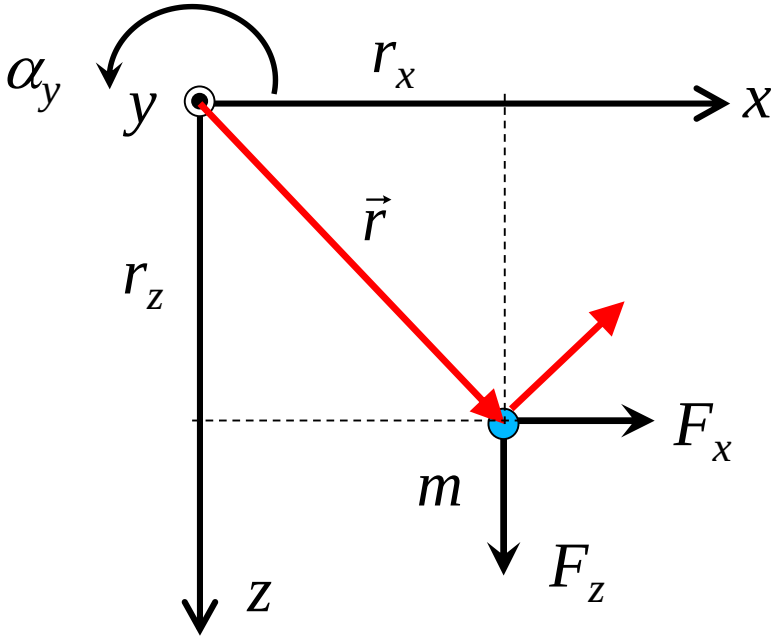
Polární hmotný moment setrvačnosti

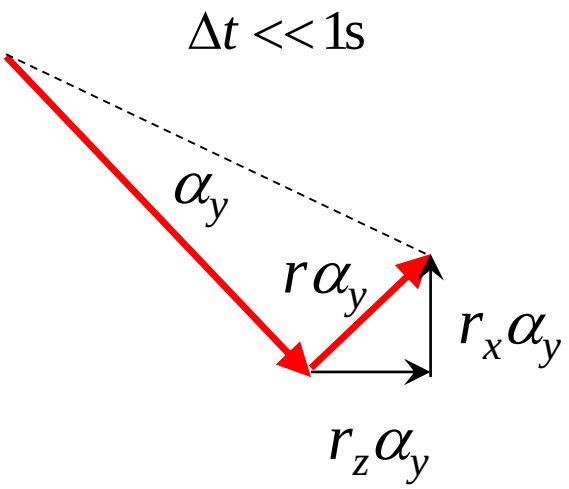
$$M_o = I_o \alpha_o$$

Úhlové zrychlení

$$[\mathrm{Nm}] = \left[\mathrm{kgm^2}\right]\left[\mathrm{rads^{-2}}\right]$$

Příklad: Hmotný bod v rovině





$$
\left.
\begin{aligned}
I_y &= mr^2 \\
M_y &= m\left(r_x^2 + r_z^2\right)\alpha_y \\
F_x &= mr_z\alpha_y \\
F_z &= -mr_x\alpha_y
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow \underbrace{M_y = F_x r_z - F_z r_x}
$$

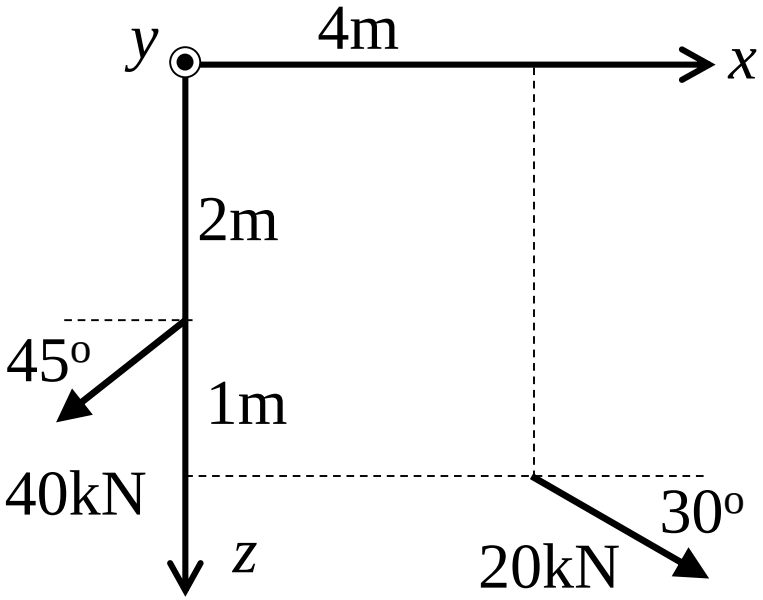
Síla

„Rameno“—kolmá vzdálenost

Pozn: Odvozený vztah má obecnou platnost

Příklad: Výslednice soustavy sil

Pro danou soustavu sil určete silovou a momentovou výslednici vzhledem k počátku souřadné soustavy



$$\rightarrow: \quad 20 \cdot \cos 30° - 40 \cdot \cos 45° = Fr_x$$

$$\downarrow: \quad 20 \cdot \sin 30° + 40 \cdot \sin 45° = Fr_z$$

$$\text{y} \quad -20 \cdot \sin 30° \cdot 4 + 20 \cdot \cos 30° \cdot 3 + $$

$$+40 \cdot \sin 45° \cdot 0 - 40 \cdot \cos 45° \cdot 2 = M_r$$

$$Fr_x = -10,964\ kN$$

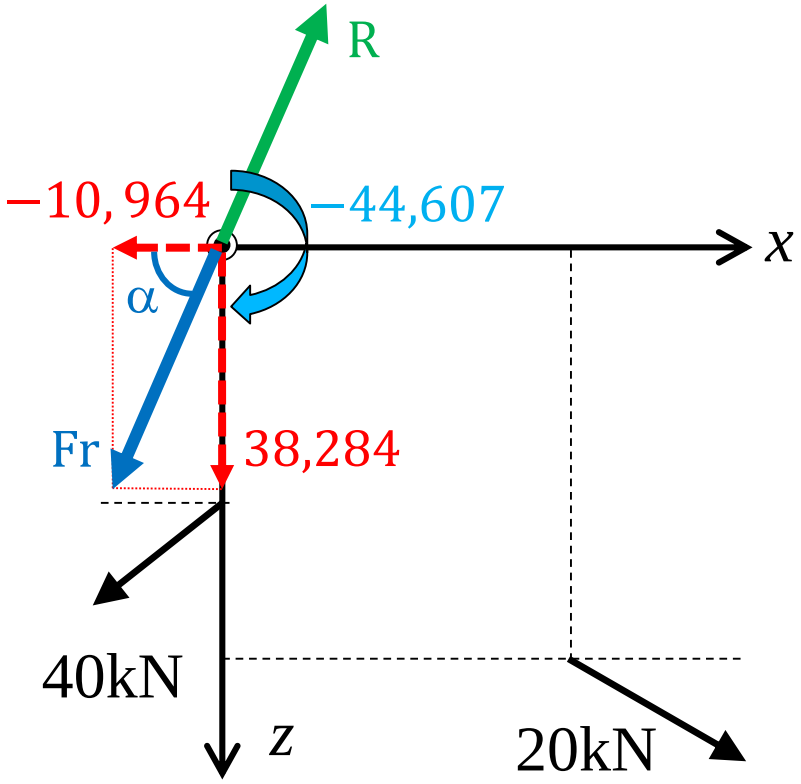
$$Fr_z = 38,284\ kN$$

$$M_r = -44,607\ kNm$$

Moment k síly ose je nulový = paprsek síly protíná danou osu

Příklad: Výslednice soustavy sil

Pro danou soustavu sil určete silovou a momentovou výslednici vzhledem k počátku souřadné soustavy



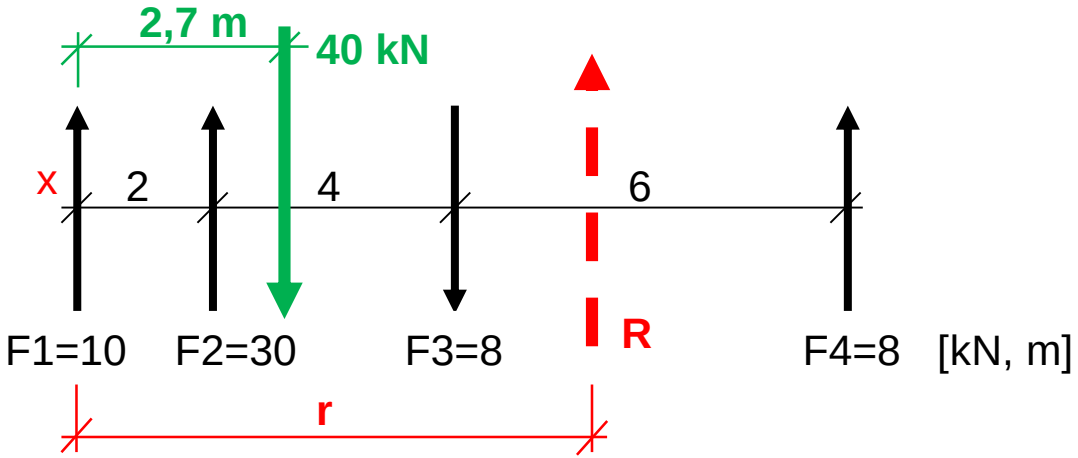
$$Fr = \sqrt{(Fr_x^2 + Fr_z^2)} = 39{,}823\ kN$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{Fr_z}{Fr_y} = -74{,}02°$$

$$M_r = -44{,}607\ kNm$$

Příklad: rovnováha

Zadanou soustavu sil uveďte do rovnováhy



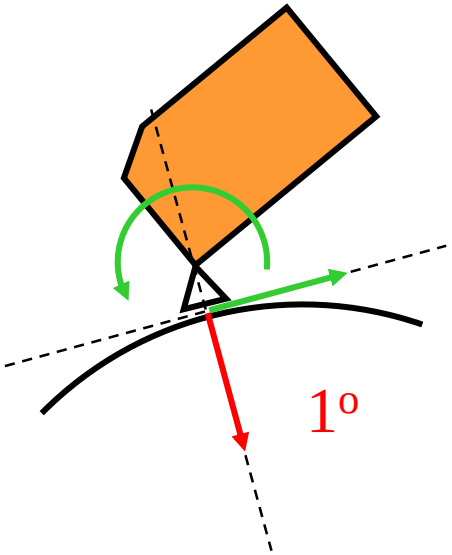
$$\sum \vec{F}_i + \vec{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \uparrow: \; F_1 + F_2 - F_3 + F_4 + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{R = -40\ \text{kN}}$$

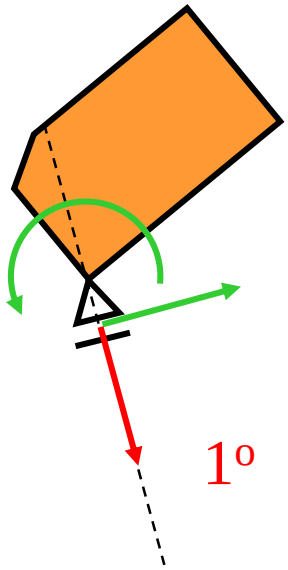
$$\sum \vec{F}_i \cdot r_i + \vec{M}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \circlearrowleft_x: \; F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 6 - F_4 \cdot 12 - R \cdot r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r = 2{,}7\ \text{m}}$$

Tuhá deska v rovině: Vazby

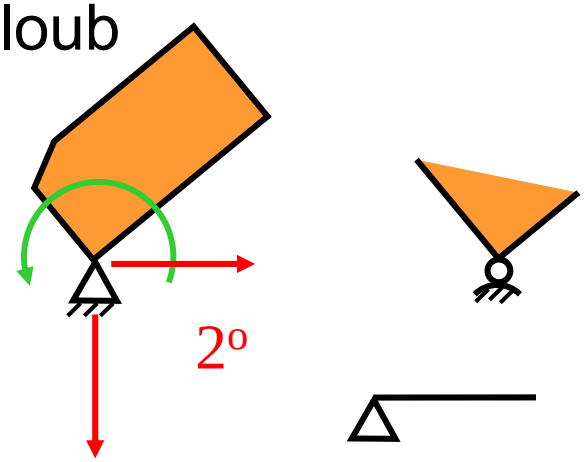
Vedení po křivce/přímce



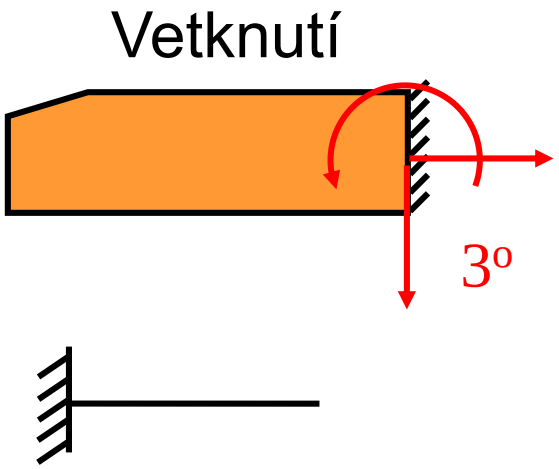


Tuhá deska v rovině: Vazby

pevný kloub

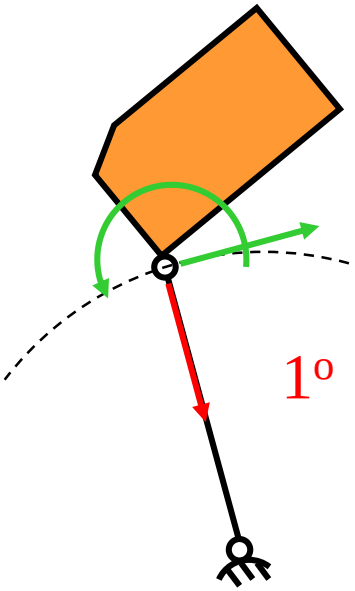


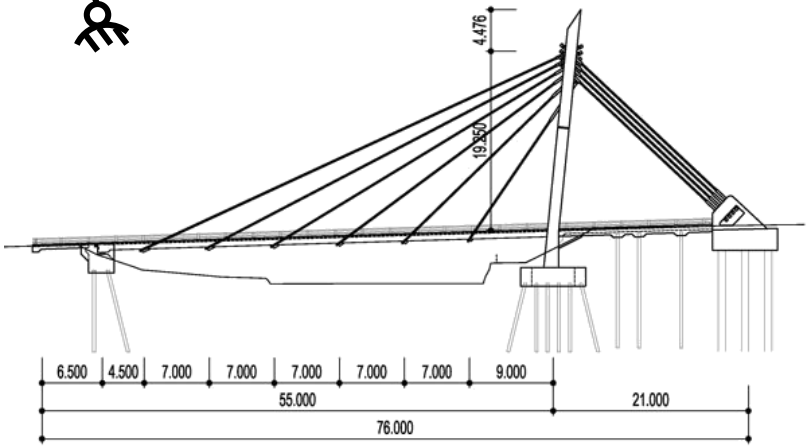
Tuhá deska v rovině: Vazby



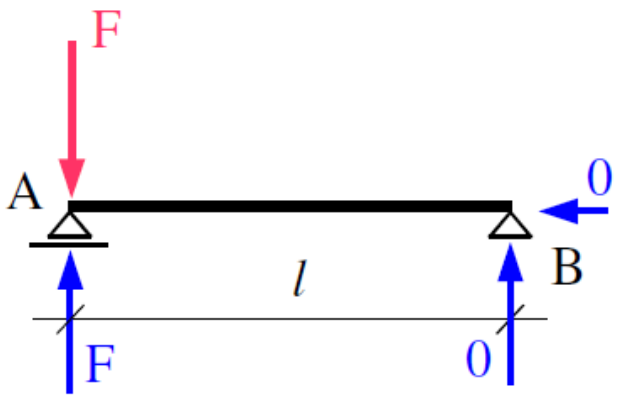
Tuhá deska v rovině: Vazby

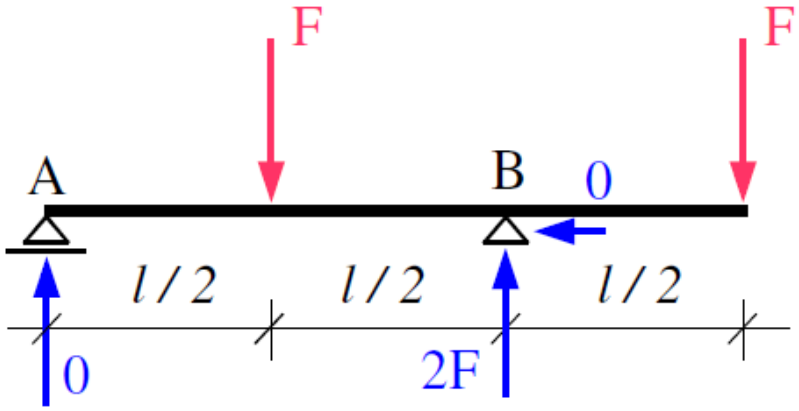
Kyvný prut

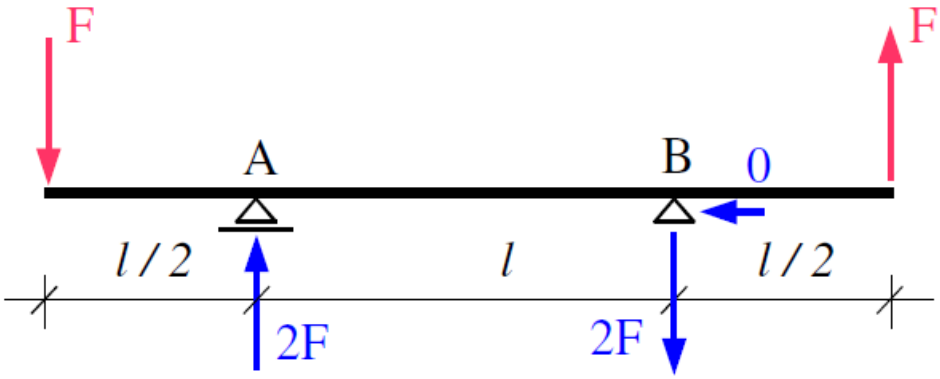


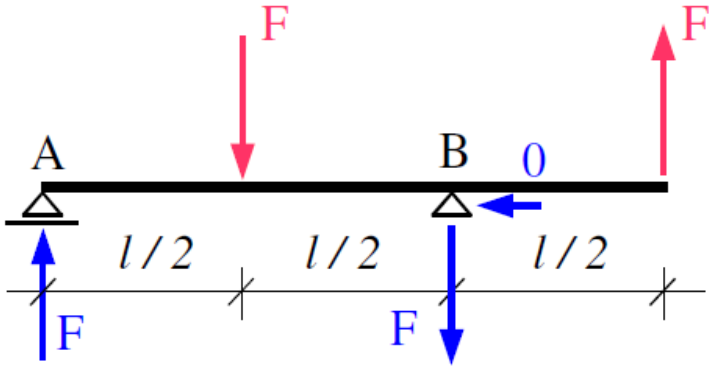


Příklad: Reakce tuhé desky v rovině

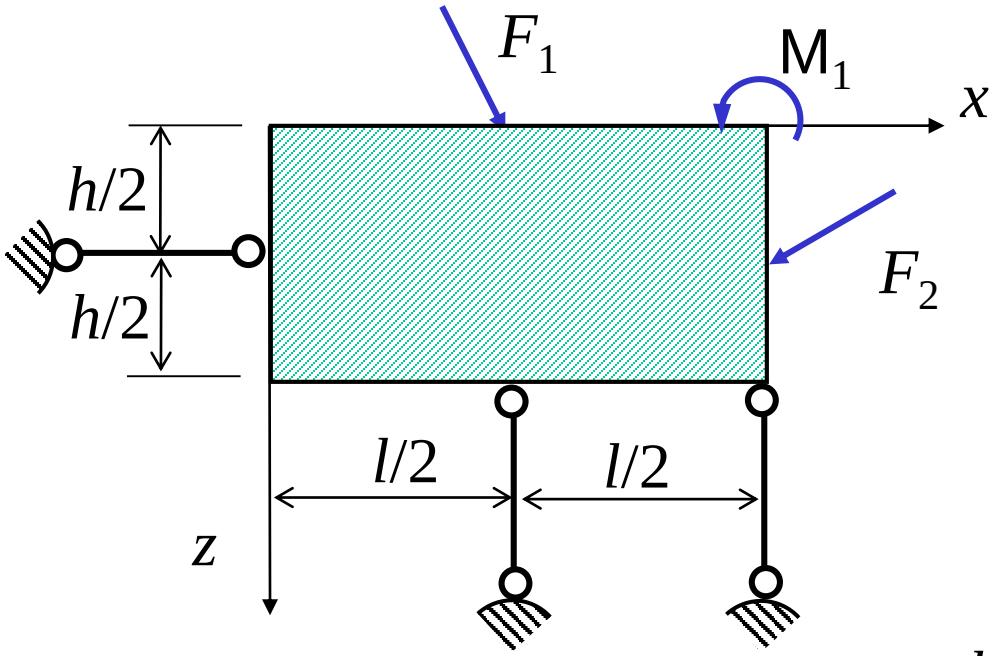


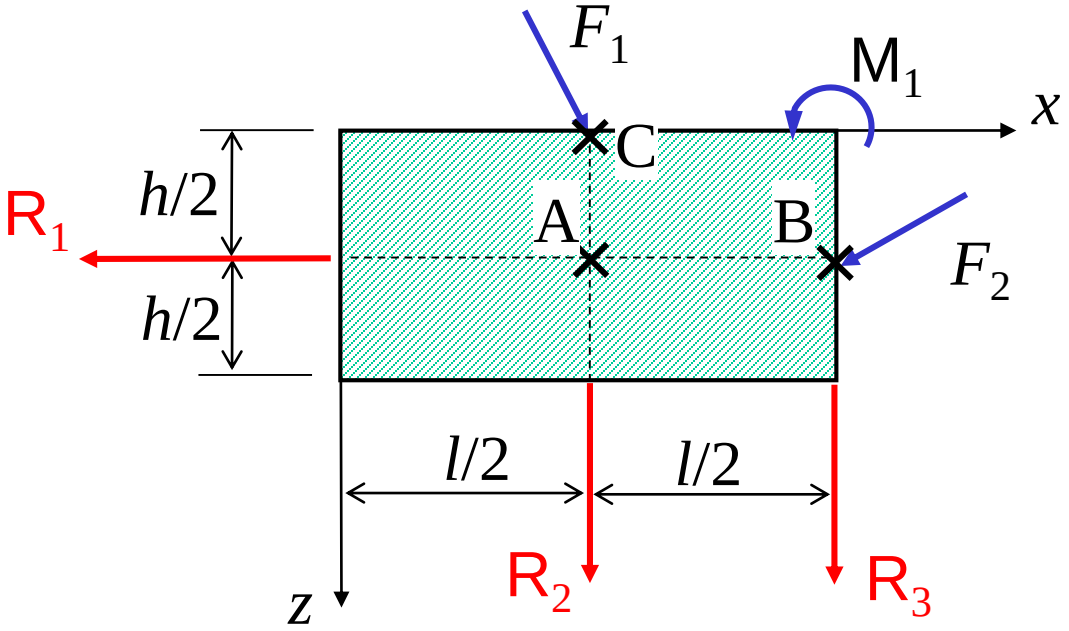




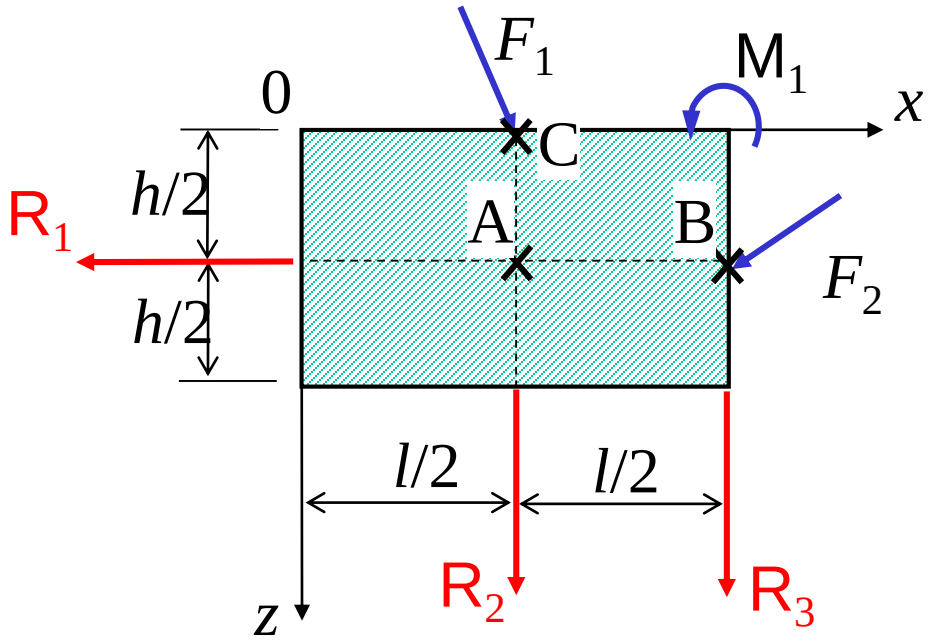


Příklad: Varianty výpočtu reakcí





Příklad: Varianty výpočtu reakcí



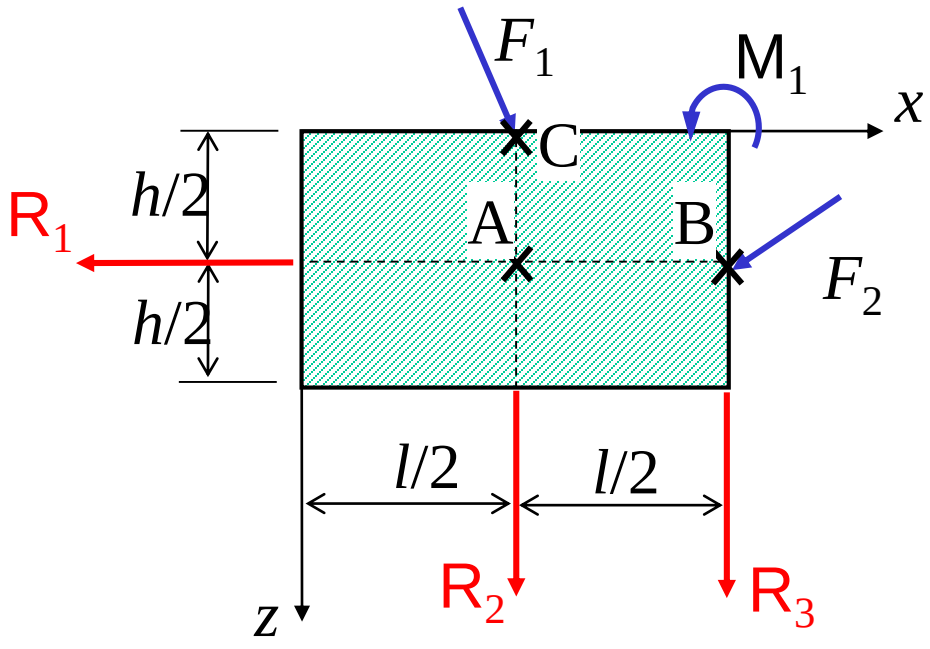
Podmínky rovnováhy (a):

$$\rightarrow x: \quad F_{1x} + F_{2x} - R_1 = 0$$

$$\downarrow z: \quad F_{1z} + F_{2z} + R_2 + R_3 = 0$$

$$\widehat{0}: \quad M_1 + M_0^{F_1} + M_0^{F_2} - R_1\frac{h}{2} - R_2\frac{l}{2} - R_3 l = 0$$

Příklad: Varianty výpočtu reakcí



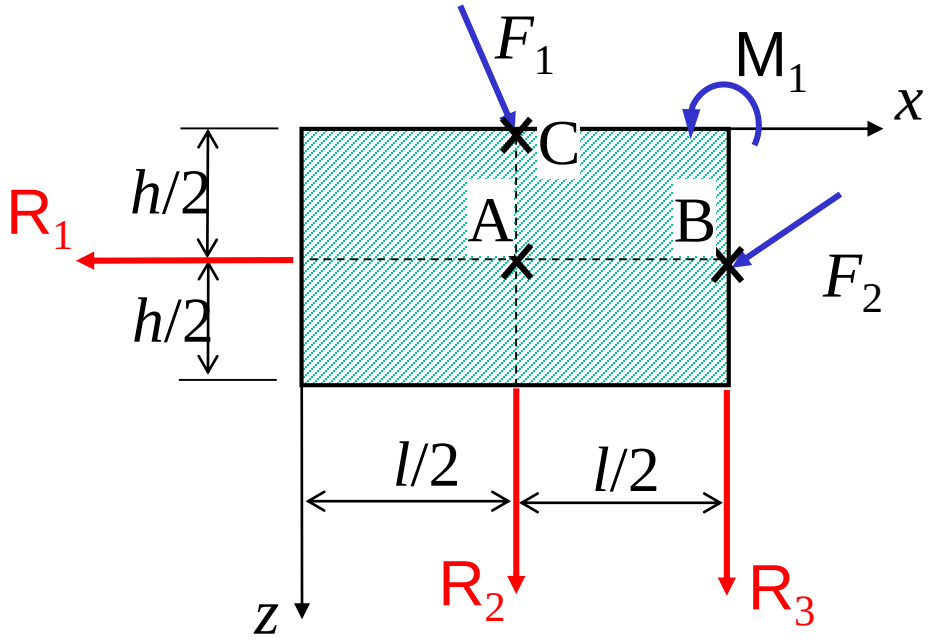
Podmínky rovnováhy (b):

$$\rightarrow x: \quad F_{1x} + F_{2x} - R_1 = 0$$

$$\downarrow z: \quad F_{1z} + F_{2z} + R_2 + R_3 = 0$$

$$\widehat{A}: \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - R_3 \frac{l}{2} = 0$$

Příklad: Varianty výpočtu reakcí



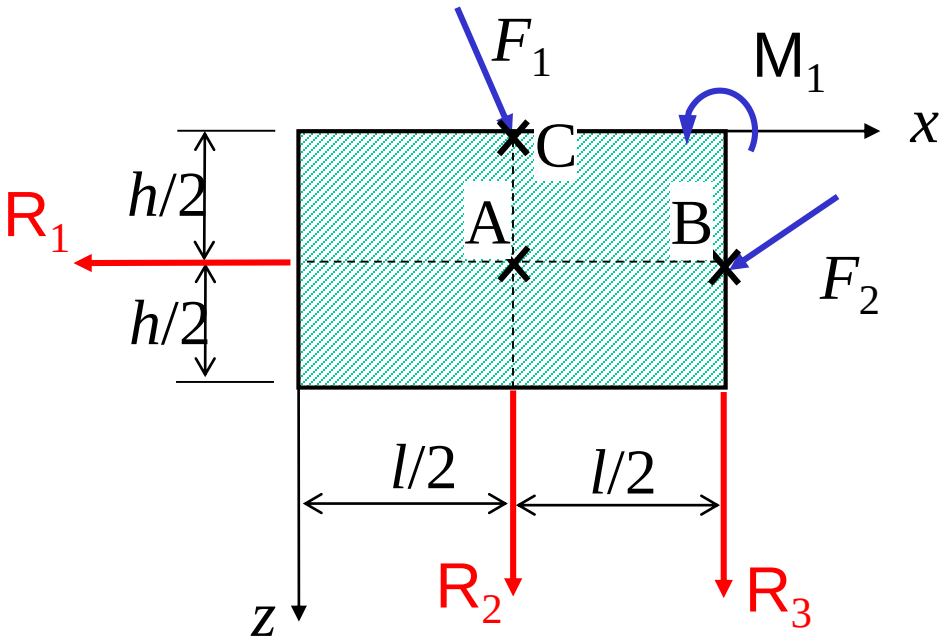
Podmínky rovnováhy (c):

$$\rightarrow x: \quad F_{1x} + F_{2x} - R_1 = 0$$

$$\widehat{A}: \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - R_3 \frac{l}{2} = 0$$

$$\widehat{B}: \quad M_1 + M_B^{F_1} + \cancel{M_B^{F_2}} + R_2 \frac{l}{2} = 0$$

Příklad: Varianty výpočtu reakcí



Podmínky rovnováhy (d):

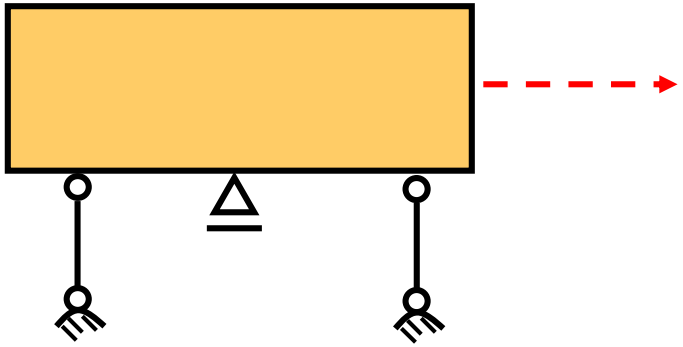
$$\widehat{A}: \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - R_3 \frac{l}{2} = 0$$

$$\widehat{B}: \quad M_1 + M_B^{F_1} + M_B^{F_2} + R_2 \frac{l}{2} = 0$$

$$\widehat{C}: \quad M_1 + M_C^{F_1} + M_C^{F_2} - R_1 \frac{h}{2} - R_3 \frac{l}{2} = 0$$

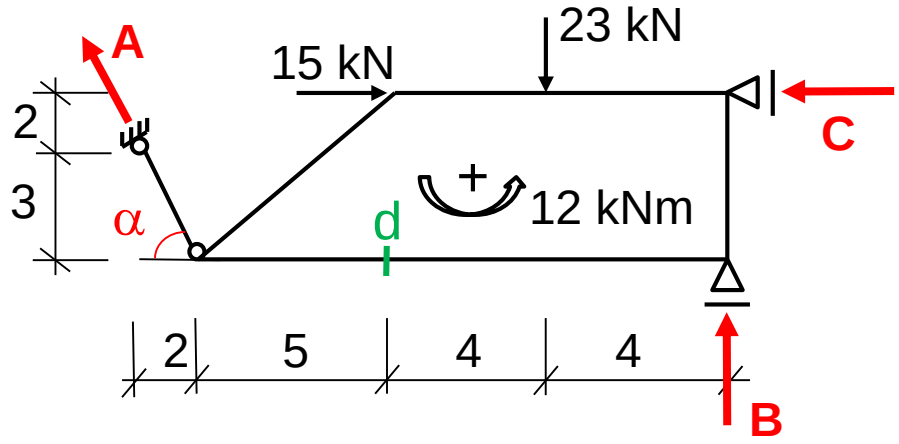
Výjimkové případy podepření

- paprsky všech reakcí vazeb jsou vzájemně rovnoběžné



- paprsky všech reakcí vazeb se protínají v jediném bodě

Příklad: Výpočet podporových reakcí



kontrola:

$$\circlearrowleft_d \quad -A \cdot \sin\alpha \cdot 5 + C \cdot 5 + B \cdot 8 +$$

$$-15 \cdot 5 - 23 \cdot 4 + 12 = 0$$

stupeň statické určitosti

$$s = m - r = 3° - (1° + 1° + 1°) = 0\ SUK$$

podmínky rovnováhy

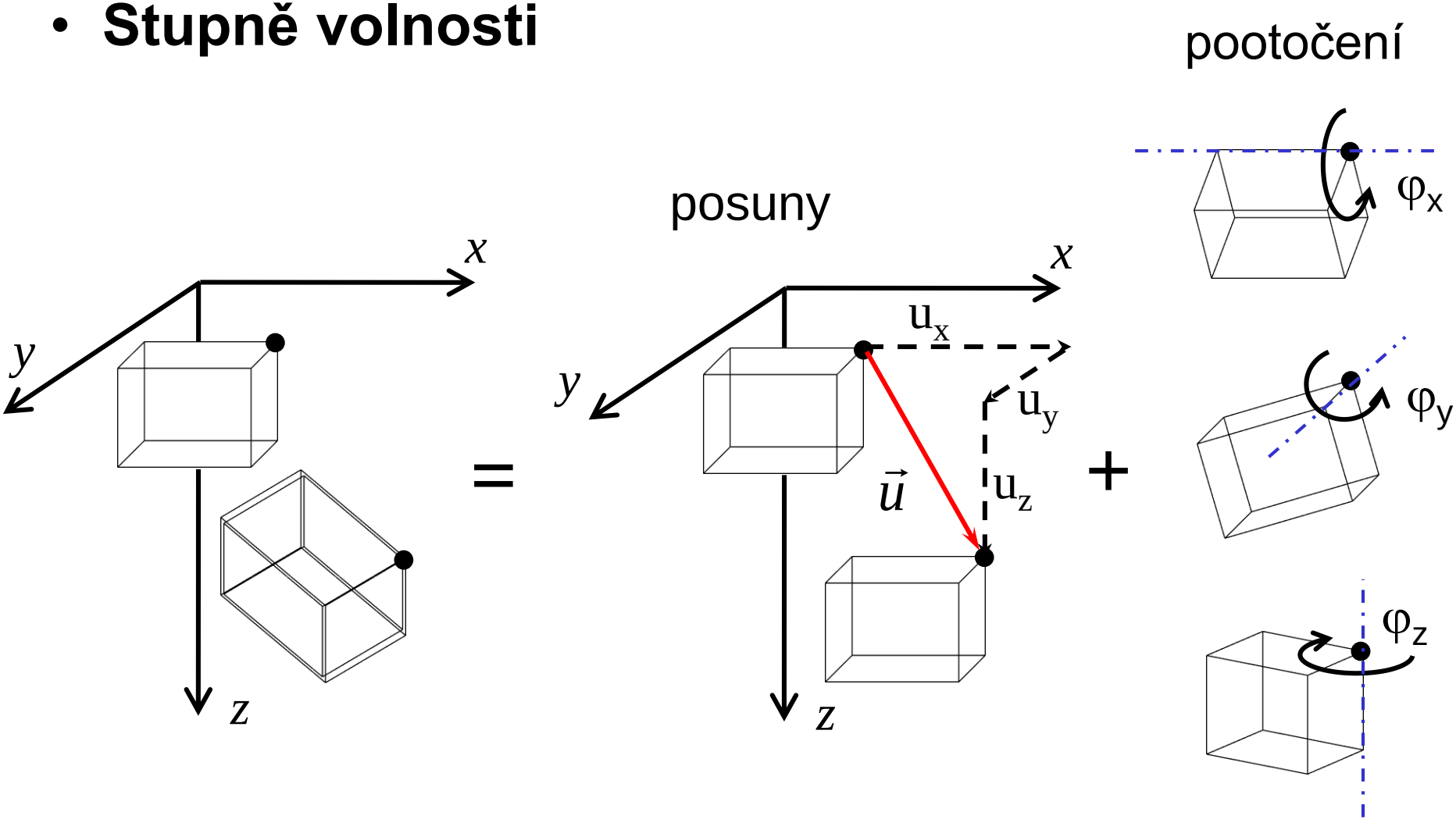
$$\circlearrowleft_c \quad 23 \cdot 4 + 15 \cdot 0 + 12 - A \cdot \sin\alpha \cdot 13 - A \cdot \cos\alpha \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A = 7{,}65\ kN}$$

$$\uparrow: \quad -23 + A \cdot \sin\alpha + B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = 16{,}63\ kN}$$

$$\rightarrow: \quad 15 - A \cdot \cos\alpha - C = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 10{,}75\ kN}$$

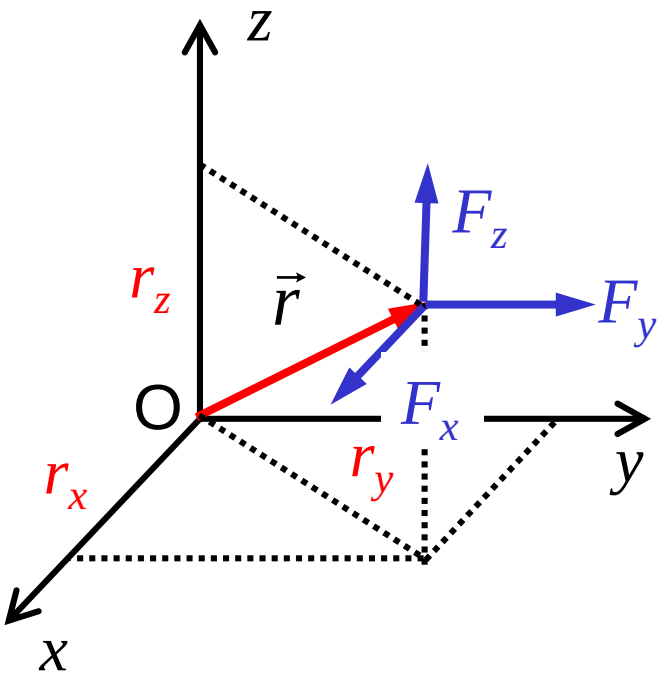
Tuhé těleso v prostoru

- **Stupně volnosti**

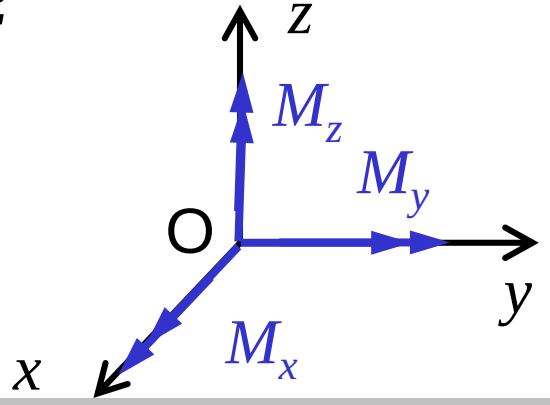


m = 6 (3 posuny u_x, u_y, u_z 3 pootočení φ_x, φ_y, φ_z)

Tuhé těleso v prostoru
Statický moment



$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$
$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

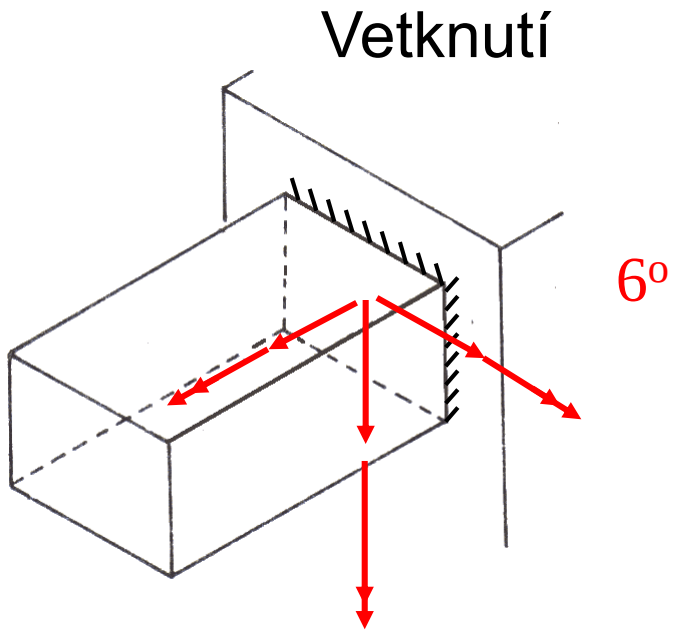


Moment k síly ose je nulový

- paprsek síly protíná danou osu
- paprsek síly je s osou rovnoběžný

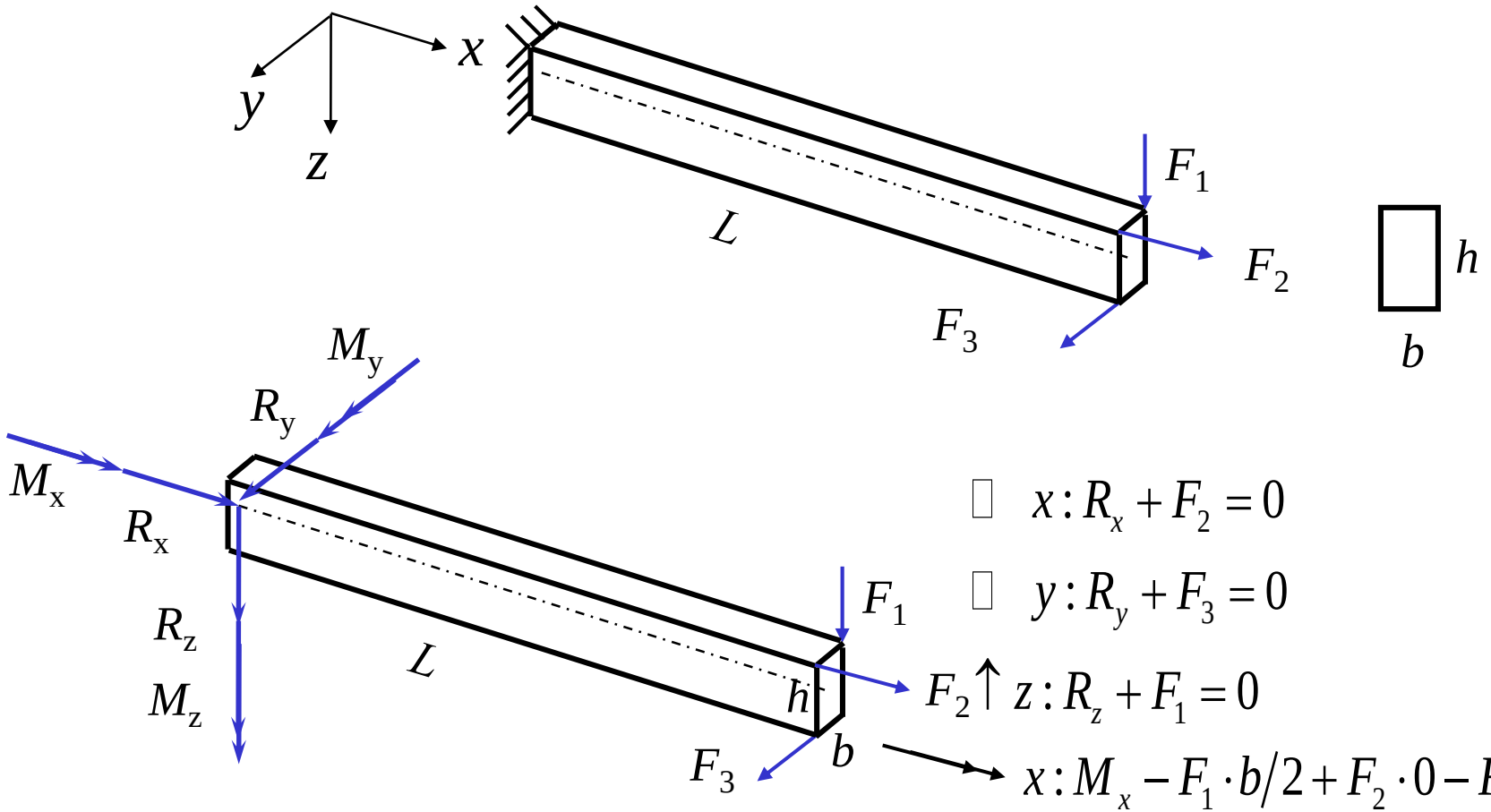
Rameno není rovnoběžné s osou ani se složkou síly

Tuhé těleso v prostoru
Vazby



Další vazby nebudou v rámci tohoto předmětu uvažovány

Příklad: Určete reakce ve vazbách



$$x: R_x + F_2 = 0$$

$$y: R_y + F_3 = 0$$

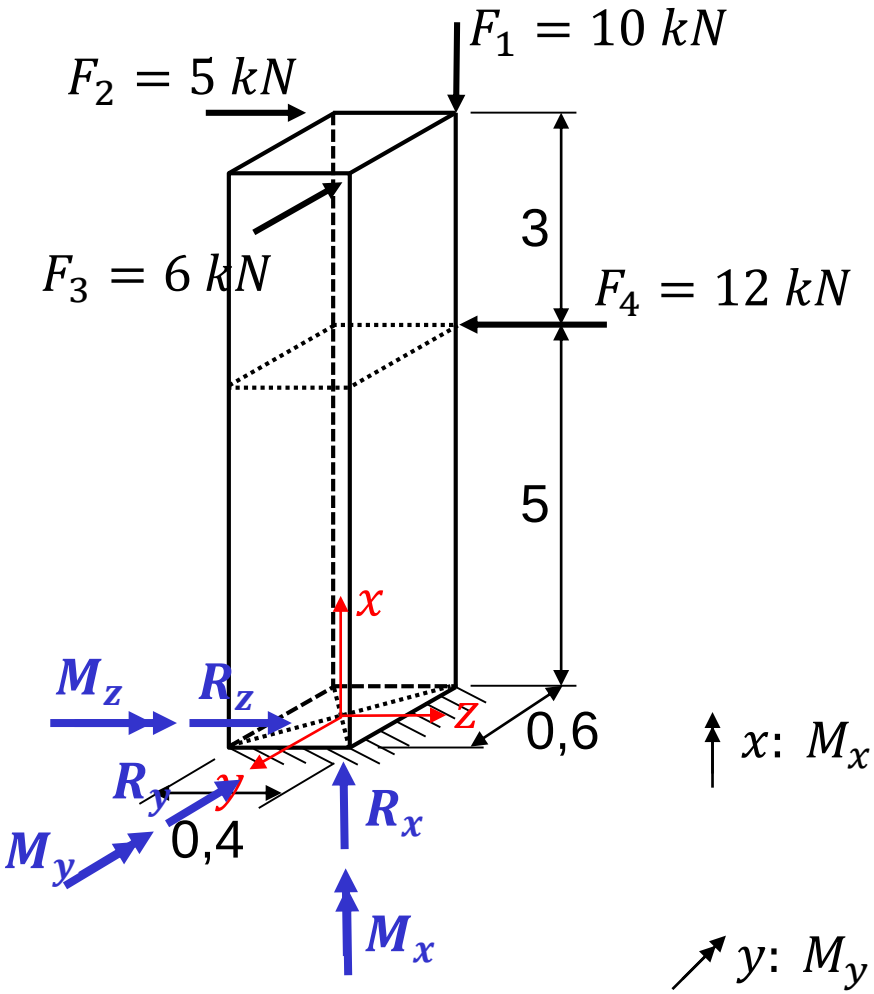
$$z: R_z + F_1 = 0$$

$$x: M_x - F_1 \cdot b/2 + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot h/2 = 0$$

$$y: M_y - F_1 \cdot L - F_2 \cdot h/2 + F_3 \cdot 0 = 0$$

$$z: M_z + F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot b/2 + F_3 \cdot L = 0$$

Příklad: Určete reakce ve vazbách



$$\uparrow x:\ R_x - F_1 = 0 \Rightarrow R_x = 10\ kN$$

$$\rightarrow z:\ R_z + F_2 - F_4 = 0 \Rightarrow R_z = 7\ kN$$

$$\nearrow y:\ R_y + F_3 = 0 \Rightarrow R_y = -6\ kN$$

$$\uparrow x:\ M_x - F_2 \cdot \frac{0{,}6}{2} + F_3 \cdot \frac{0{,}4}{2} + F_4 \cdot \frac{0{,}6}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M_x = -2{,}1\ kNm$$

$$\nearrow y:\ M_y + F_1 \cdot \frac{0{,}4}{2} + F_2 \cdot 8 - F_4 \cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow M_y = -18\ kNm$$

$$\rightarrow z:\ M_z - F_1 \cdot \frac{0{,}6}{2} - F_3 \cdot 8 = 0 \Rightarrow M_z = 51\ kNm$$

Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu Stavební mechanika R1 pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze. Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.

Při přípravě této přednášky byla použita řada materiálů volně přístupných na serveru en.wikipedia.org a materiálů laskavě poskytnutých Janem Zemanem, Petrem Kabelem, Matějem Lepšem, Vítem Šmilauerem, Michalem Polákem a Alešem Jírou ze Stavební fakulty ČVUT v Praze.

Pokud v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na tesarek@.fsv.cvut.cz

Datum poslední revize:06.10.2020