

Stavební mechanika R1

K132 SMR1

Přednáška č. 6
Šikmé a lomené nosníky

Co nás čeká ve sedmé přednášce?

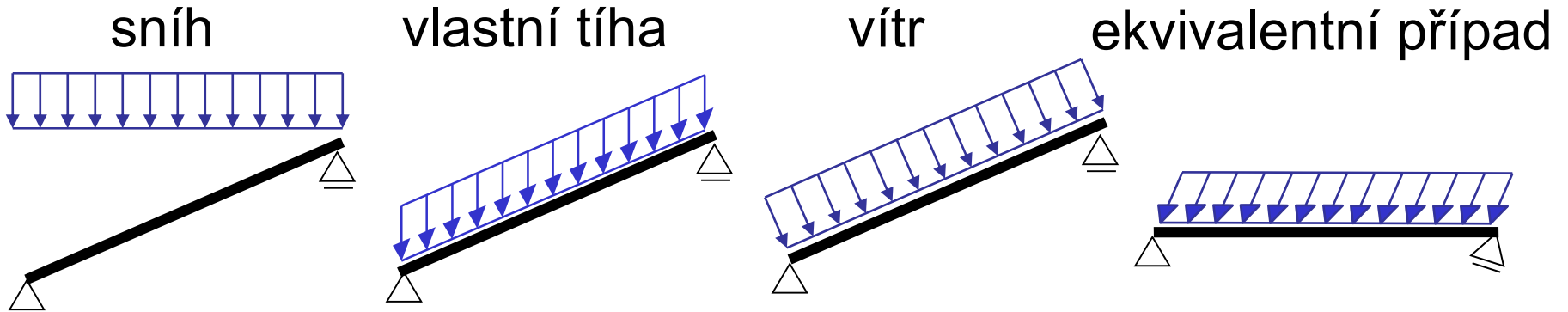
Vnitřní síly na šikmých nosnících

- Motivace
 - Výpočet výslednice spojitého zatížení
- Princip výpočtu vnitřních sil
 - Lokální a globální souřadné systémy
 - Transformace zatížení
- Principy vykreslování vnitřních sil
- Ilustrativní příklady

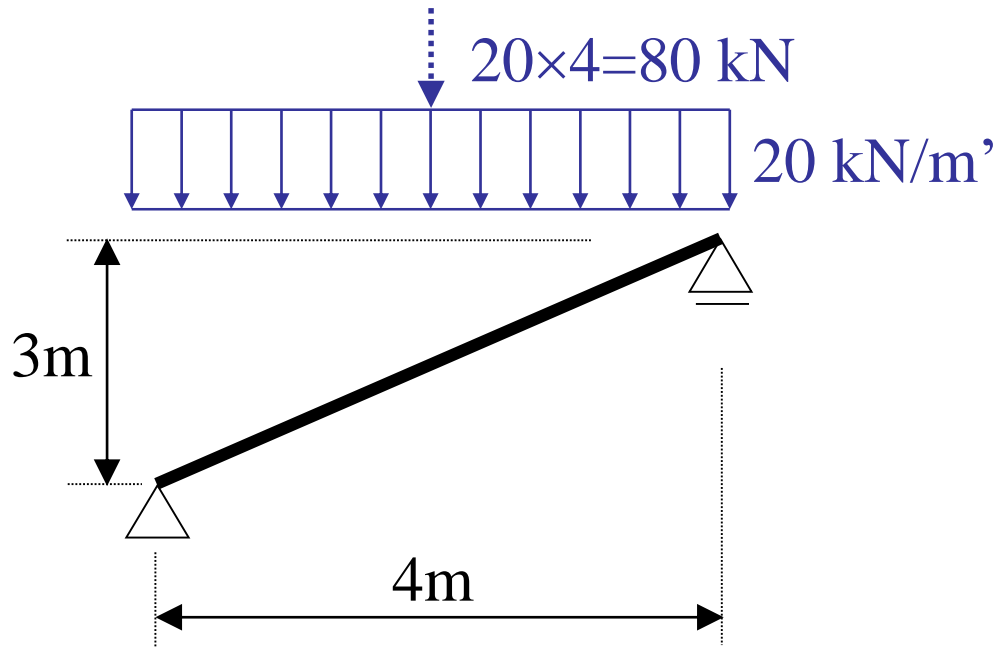
Průběhy vnitřních sil na lomených nosnících

- Trocha terminologie
- Postup výpočtu
- Styčnicková rovnováha
- Příklady

Motivace

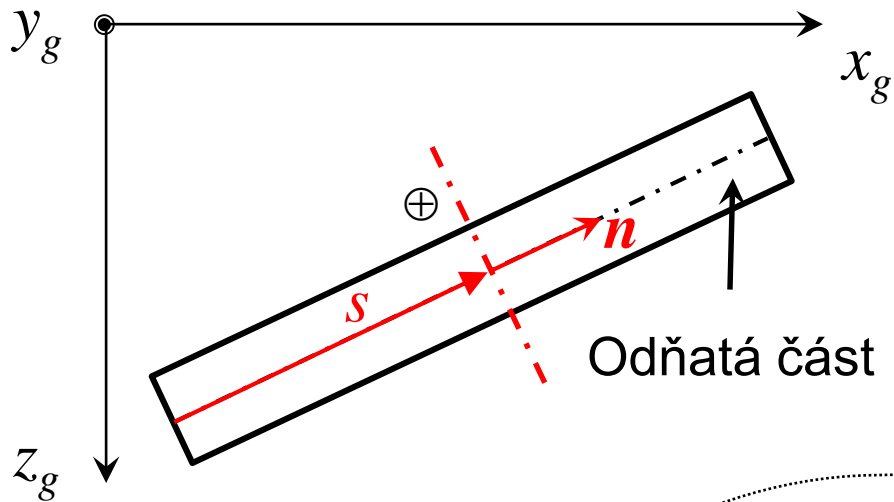


Příklad: Výslednice zatížení typu „sníh“

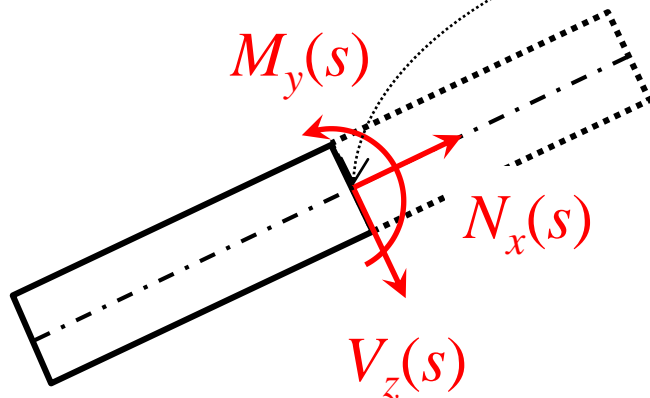
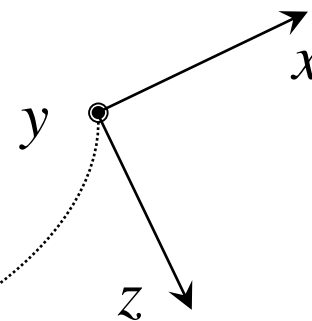


Princip výpočtu vnitřních sil

Globální souřadný systém
[reakce]

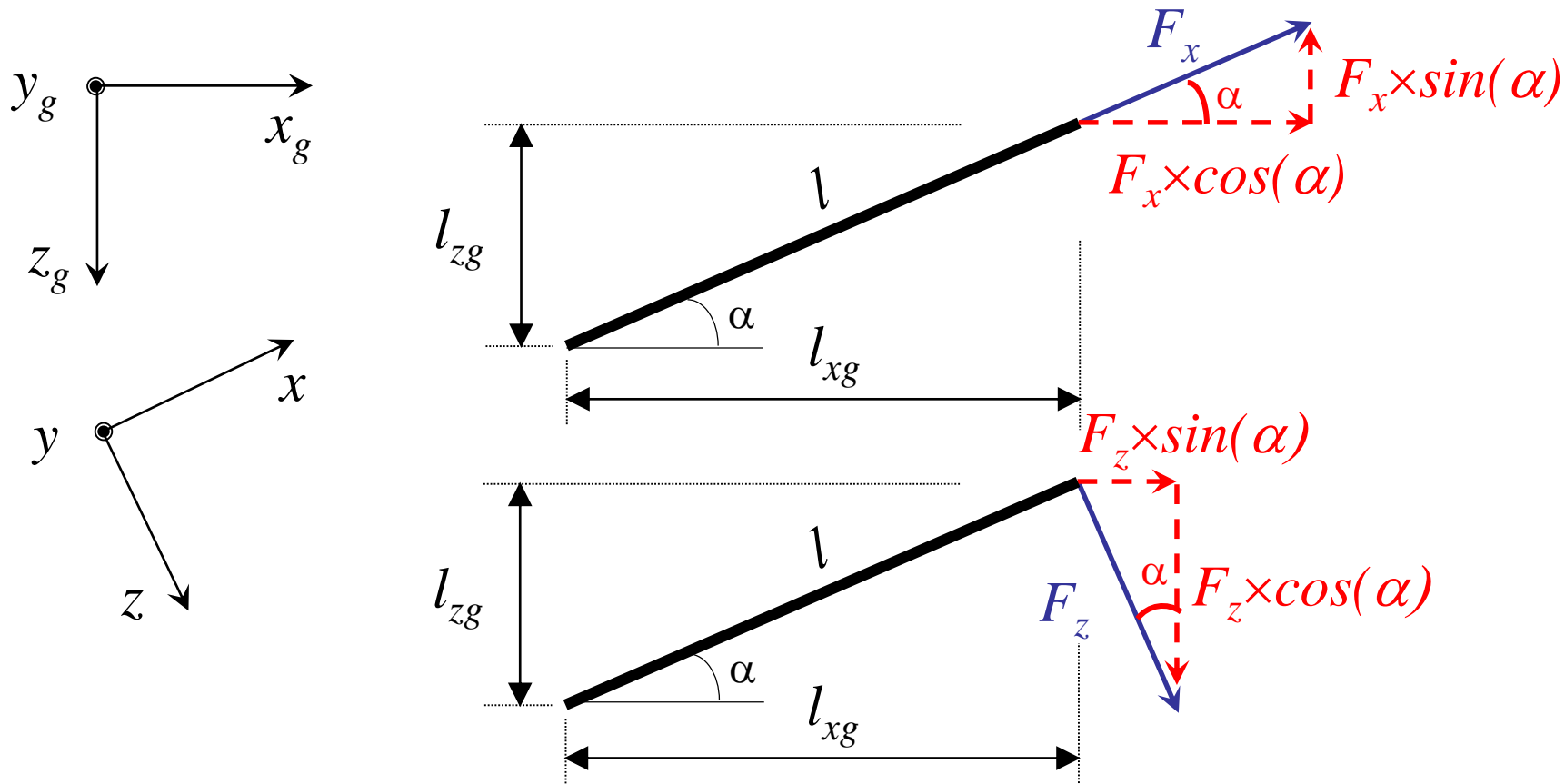


Lokální souřadný systém
[vnitřní síly]



Výpočet
Podmínka ekvivalence

Rozklad sil: lokální → globální s.s.



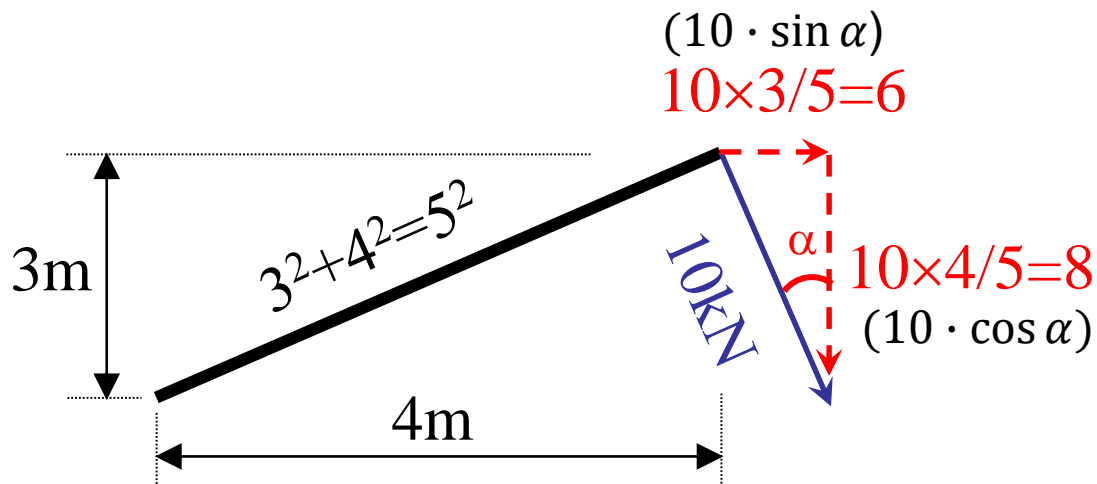
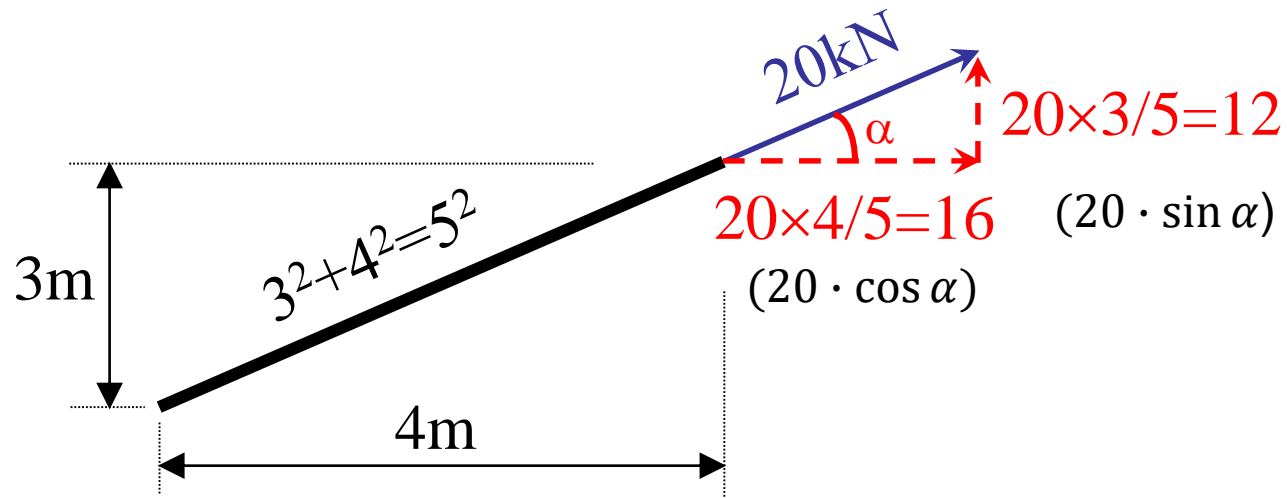
$$F_{xg} = \frac{l_{xg}}{l} \cdot F_x + \frac{l_{zg}}{l} \cdot F_z = F_x \cdot \cos \alpha + F_z \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{bmatrix} F_{xg} \\ F_{zg} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l_{xg} & l_{zg} \\ -l_{zg} & l_{xg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix}$$

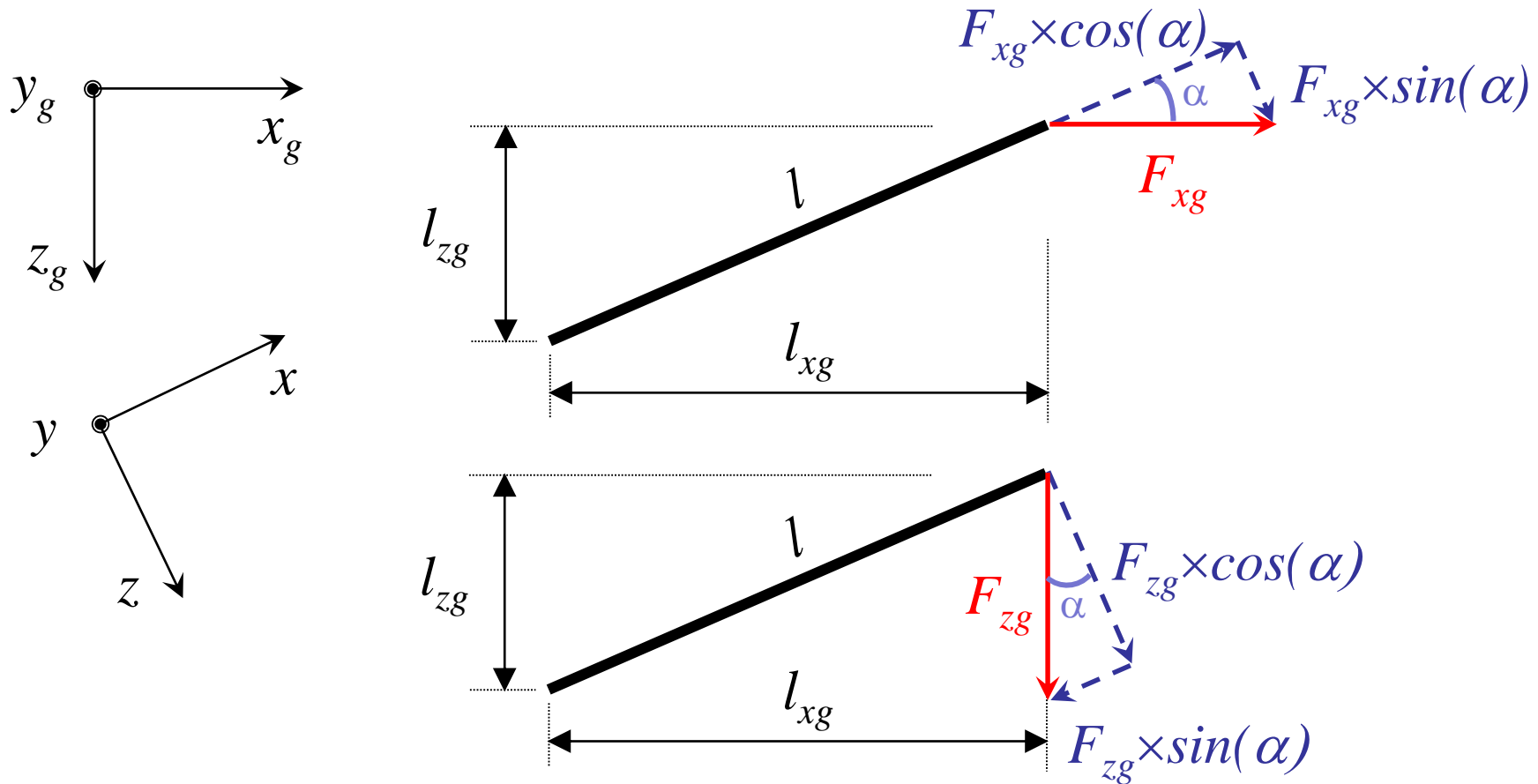
$$F_{zg} = -\frac{l_{zg}}{l} \cdot F_x + \frac{l_{xg}}{l} \cdot F_z = -F_x \cdot \sin \alpha + F_z \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} F_{xg} \\ F_{zg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix}$$

Rozklad sil: lokální → globální s.s.



Rozklad sil: globální → lokální s.s.

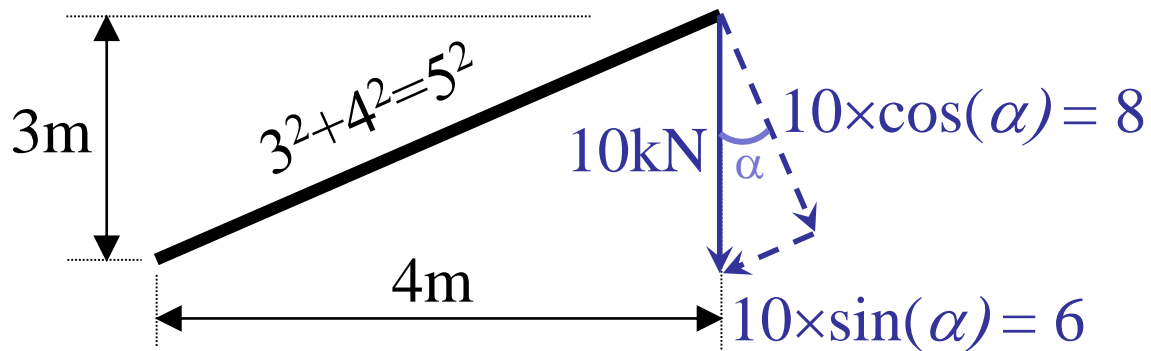
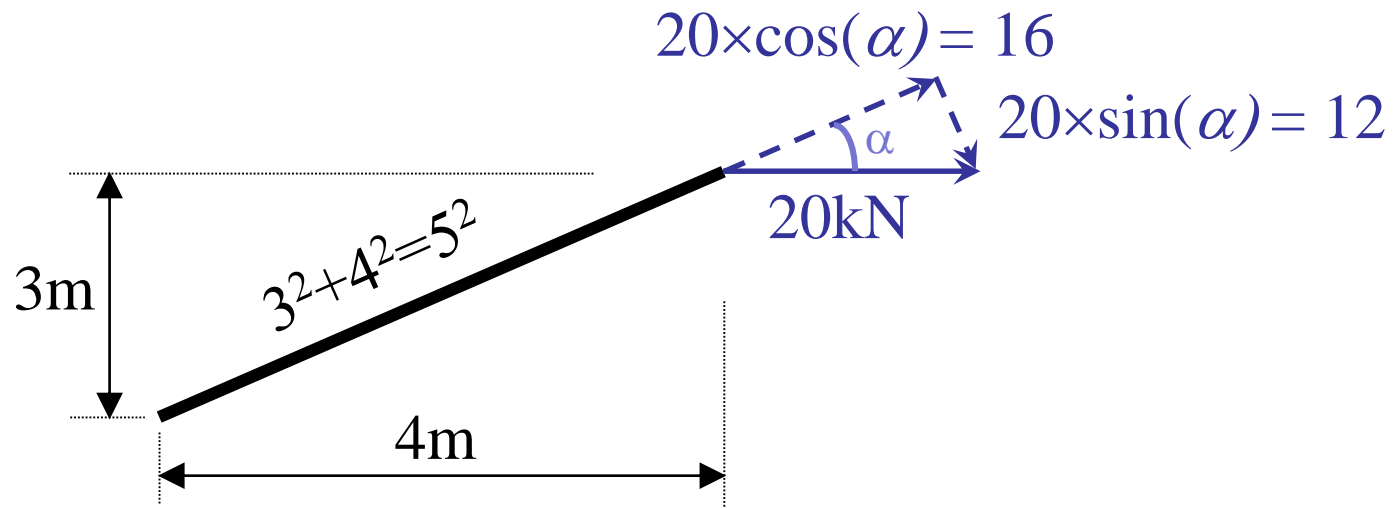


$$F_x = \frac{l_{xg}}{l} \cdot F_{xg} - \frac{l_{zg}}{l} \cdot F_{zg} = F_{xg} \cdot \cos \alpha - F_{zg} \cdot \sin \alpha$$

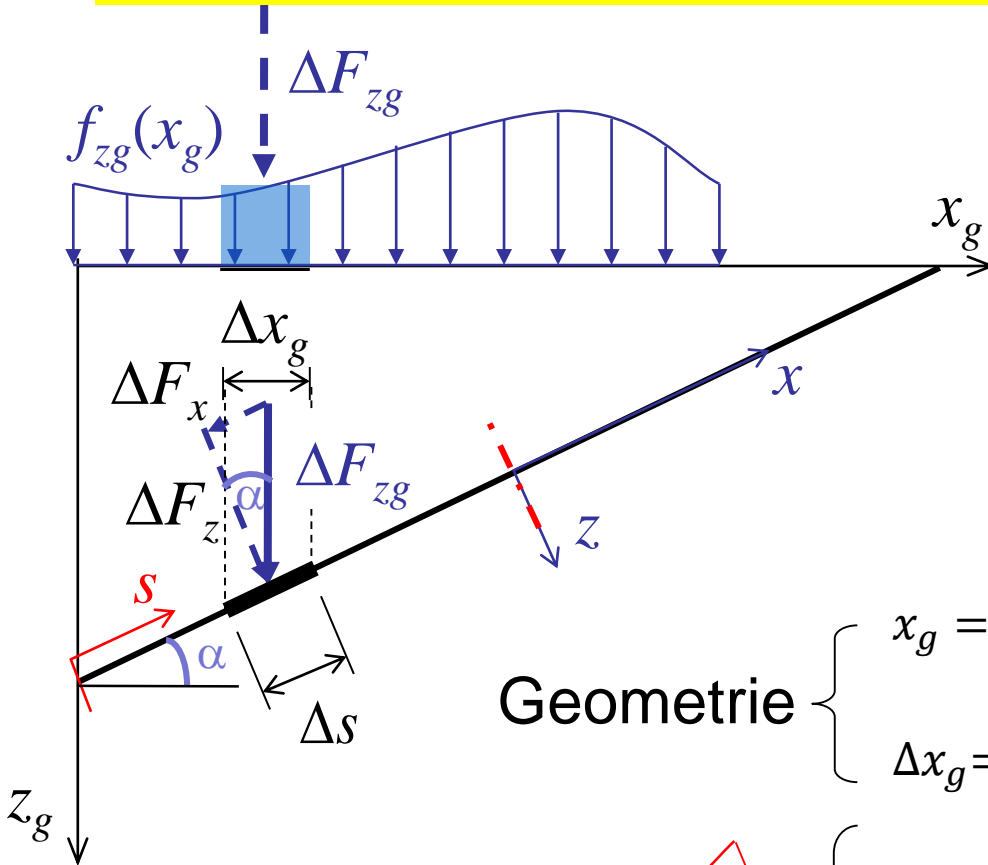
$$F_z = \frac{l_{zg}}{l} \cdot F_{xg} + \frac{l_{xg}}{l} \cdot F_{zg} = F_{xg} \cdot \sin \alpha + F_{zg} \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} F_{xg} \\ F_{zg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix}$$

Rozklad sil: globální → lokální s.s.



Transformace zatížení typ „sníh“



$$\Delta F_{zg} = f_{zg} \cdot \left(x_g + \frac{\Delta x_g}{2} \right) \cdot \Delta x_g$$

$$\Delta F_x = -\frac{l_{zg}}{l} \cdot \Delta F_{zg} = -\sin \alpha \cdot \Delta F_{zg}$$

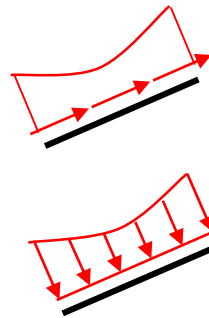
$$\Delta F_z = \frac{l_{xg}}{l} \cdot \Delta F_{zg} = \cos \alpha \cdot \Delta F_{zg}$$

Geometrie

$$x_g = \frac{l_{xg}}{l} \cdot s = \cos \alpha \cdot s$$

$$\Delta x_g = \frac{l_{xg}}{l} \cdot \Delta s = \cos \alpha \cdot \Delta s$$

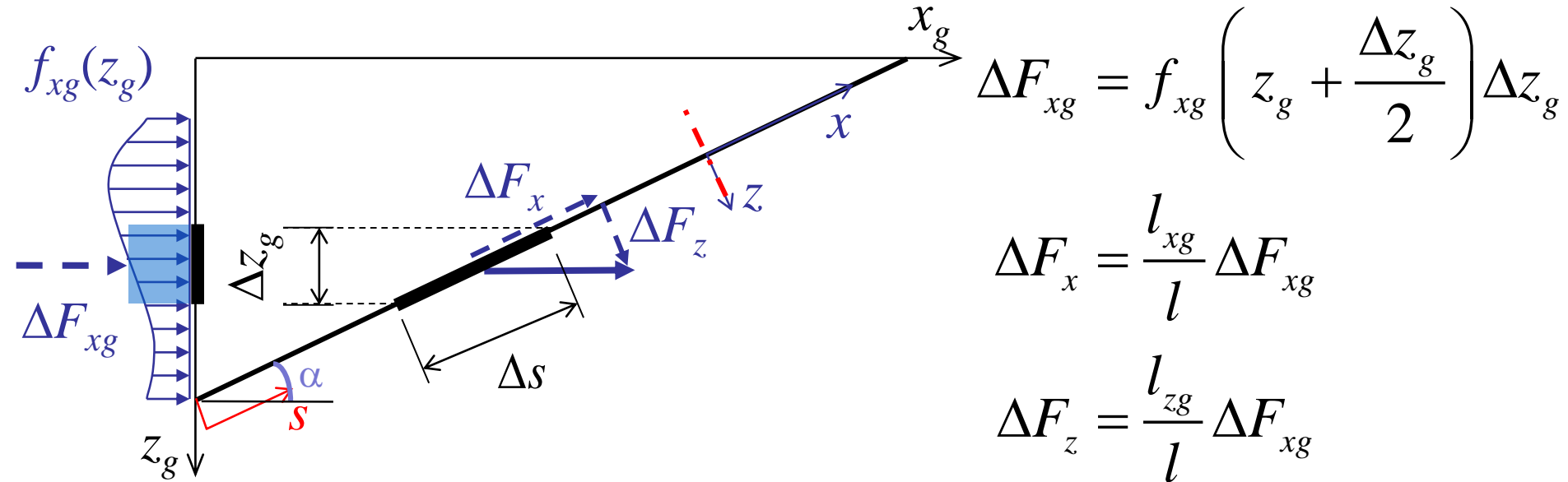
Limitní přechod →



$$f_x(x_g) ds = -\frac{l_{zg}}{l} \cdot f_{zg}(x_g) \cdot \frac{l_{xg}}{l} ds$$

$$f_z(x_g) ds = \frac{l_{xg}}{l} \cdot f_{zg}(x_g) \cdot \frac{l_{xg}}{l} ds$$

Transformace zatížení typ „vítr“



$$\Delta F_{xg} = f_{xg} \left(z_g + \frac{\Delta z_g}{2} \right) \Delta z_g$$

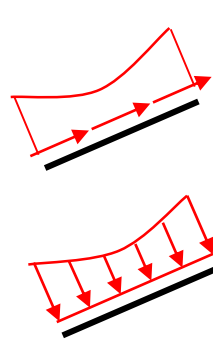
$$\Delta F_x = \frac{l_{xg}}{l} \Delta F_{xg}$$

$$\Delta F_z = \frac{l_{zg}}{l} \Delta F_{xg}$$

Geometrie

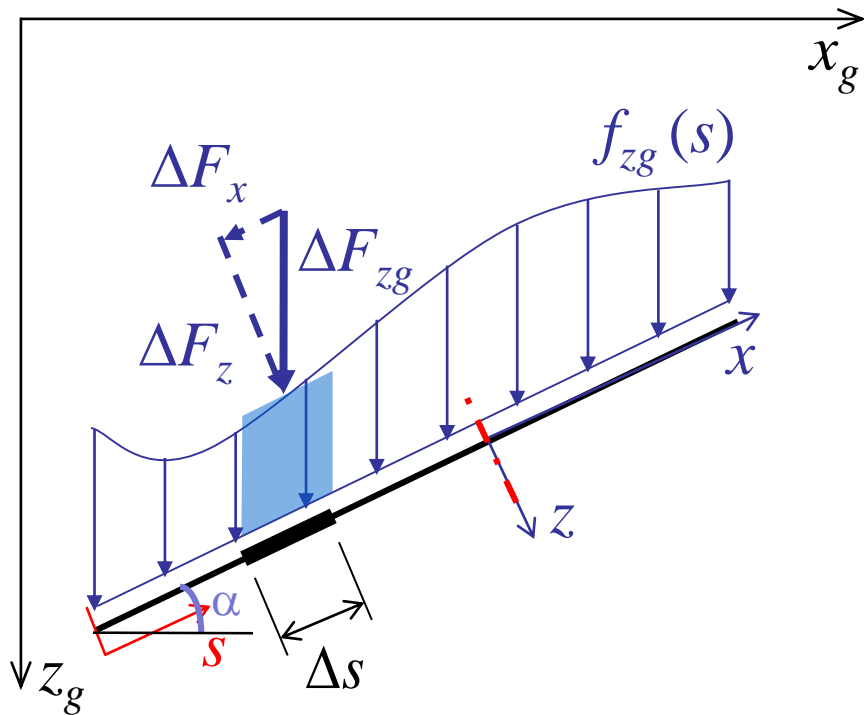
$$\left\{ \begin{array}{l} z_g = l_{zg} \left(1 - \frac{s}{l} \right), \\ \Delta z_g = \frac{l_{zg}}{l} \Delta s \end{array} \right.$$

Limitní přechod →



$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(z_g) ds = \frac{l_{xg}}{l} \cdot f_{xg}(z_g) \cdot \frac{l_{zg}}{l} ds \\ f_z(z_g) ds = \frac{l_{zg}}{l} \cdot f_{xg}(z_g) \cdot \frac{l_{zg}}{l} ds \end{array} \right.$$

Transformace zatížení typ „vlastní tíha“

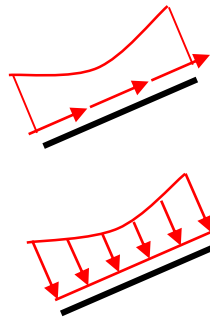


$$\Delta F_{zg} = f_{zg} \left(s + \frac{\Delta s}{2} \right) \Delta s$$

$$\Delta F_x = -\frac{l_{zg}}{l} \Delta F_{zg}$$

$$\Delta F_z = \frac{l_{xg}}{l} \Delta F_{zg}$$

Limitní přechod →



$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(s) ds = -\frac{l_{zg}}{l} \cdot f_{zg}(s) ds \\ f_z(s) ds = \frac{l_{xg}}{l} \cdot f_{zg}(s) ds \end{array} \right.$$

Kontrola pomocí podmínek rovnováhy

- Okrajové podmínky
- Schwedlerovy věty

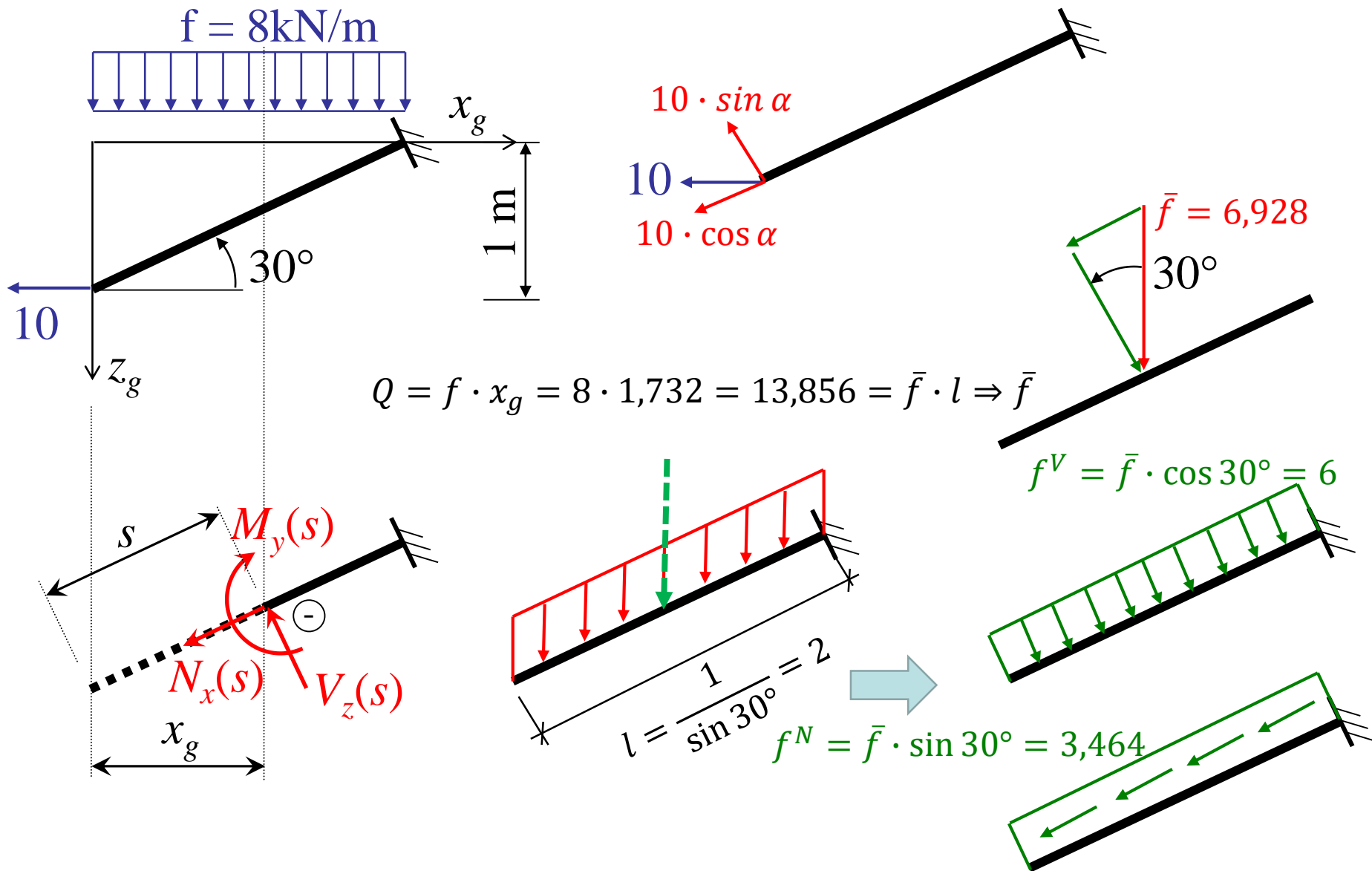
$$\frac{dN_x(s)}{d_s} = -f_x(s)$$

$$\frac{dV_z(s)}{d_s} = -f_z(s)$$

$$\frac{dM_y(s)}{d_s} = V_z(s)$$

≡ *zcela* identický postup jako pro „rovné“ nosníky

Př.1: Určete průběh vnitřních sil



Př.1: Analytické vyjádření

- Podmínky ekvivalence

$$\leftarrow N_x(s) = 10 \cdot \cos 30^\circ + f^N \cdot s$$

$$\uparrow V_z(s) = 10 \cdot \sin 30^\circ - f^V \cdot s$$

$$\curvearrowright M_y(s) = 10 \cdot \sin 30^\circ \cdot s - f^V \cdot s \cdot \frac{s}{2}$$

- Vnitřní síly ve vetknutí

$$N_x(s = 2) = 8,66 + 3,464 \cdot 2 = 15,588 \text{ kN}$$

$$V_z(s = 2) = 5 - 6 \cdot 2 = -7 \text{ kN}$$

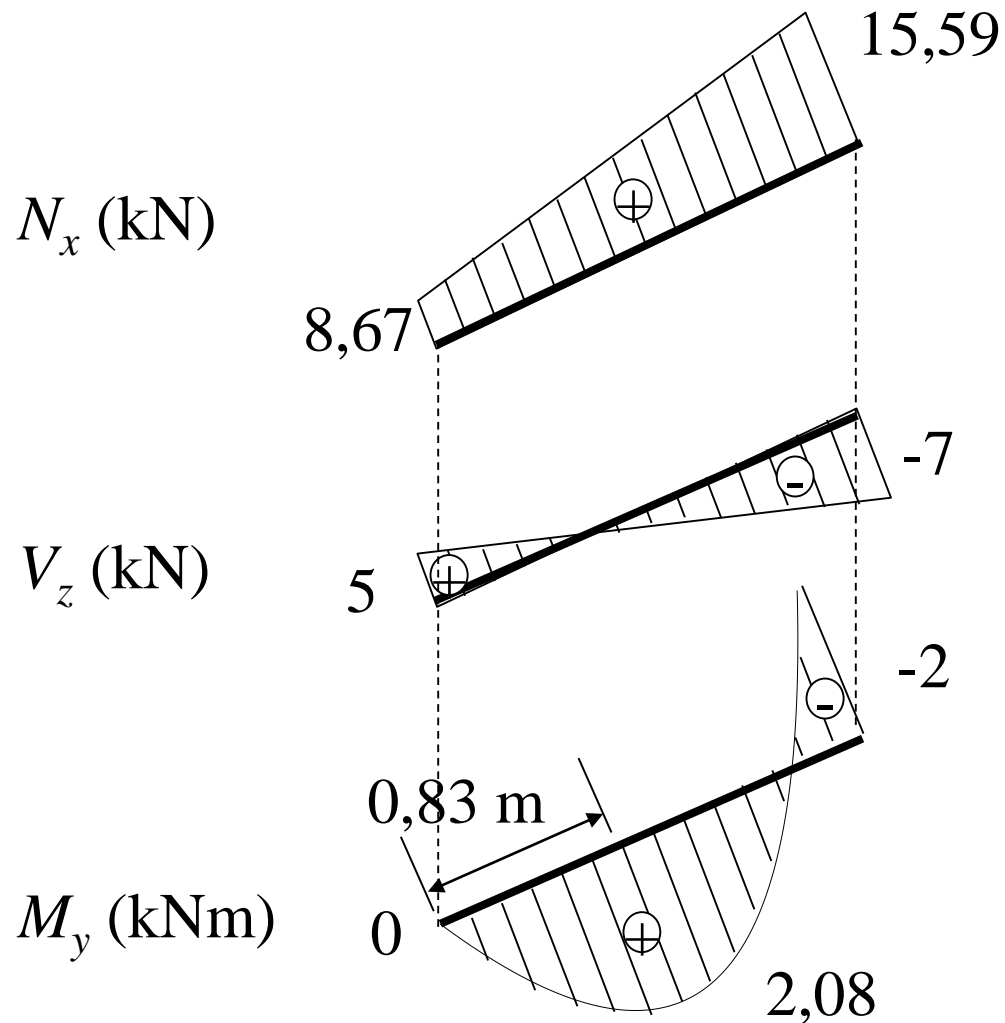
$$M_y(s = 2) = 5 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{2^2}{2} = -2 \text{ kNm}$$

- Extrémní moment

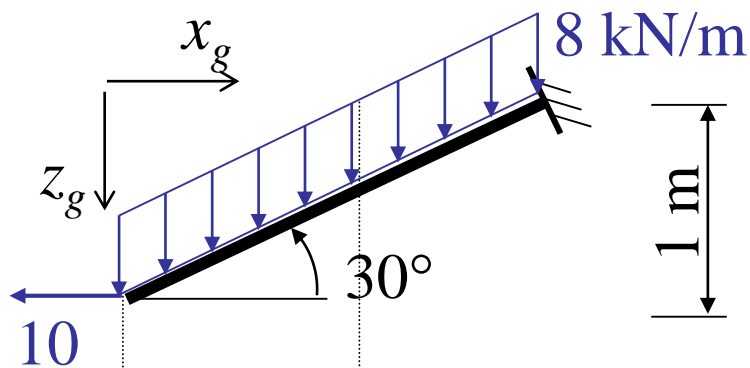
$$V_z(s_{max}) = 0 = 5 - 6 \cdot s_{max} \Rightarrow s_{max} = 0,833 \text{ m}$$

$$M_{max} = 5 \cdot s_{max} - 6 \cdot \frac{(s_{max})^2}{2} = -2,083 \text{ kNm}$$

Př. 1: Vykreslení



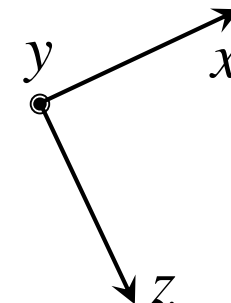
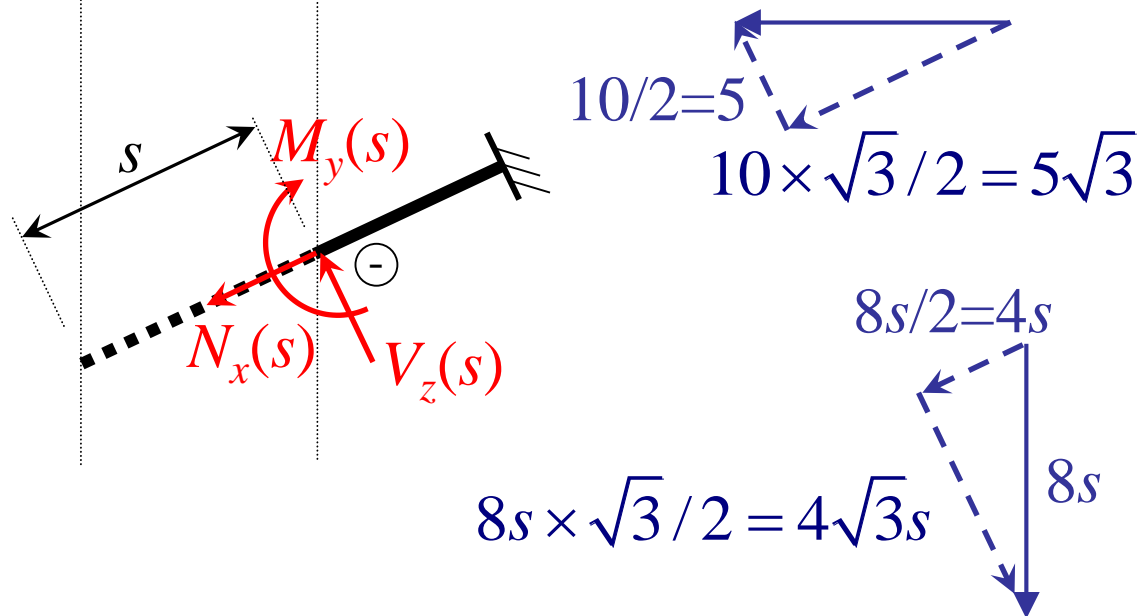
Př. 2: Určete průběh vnitřních sil



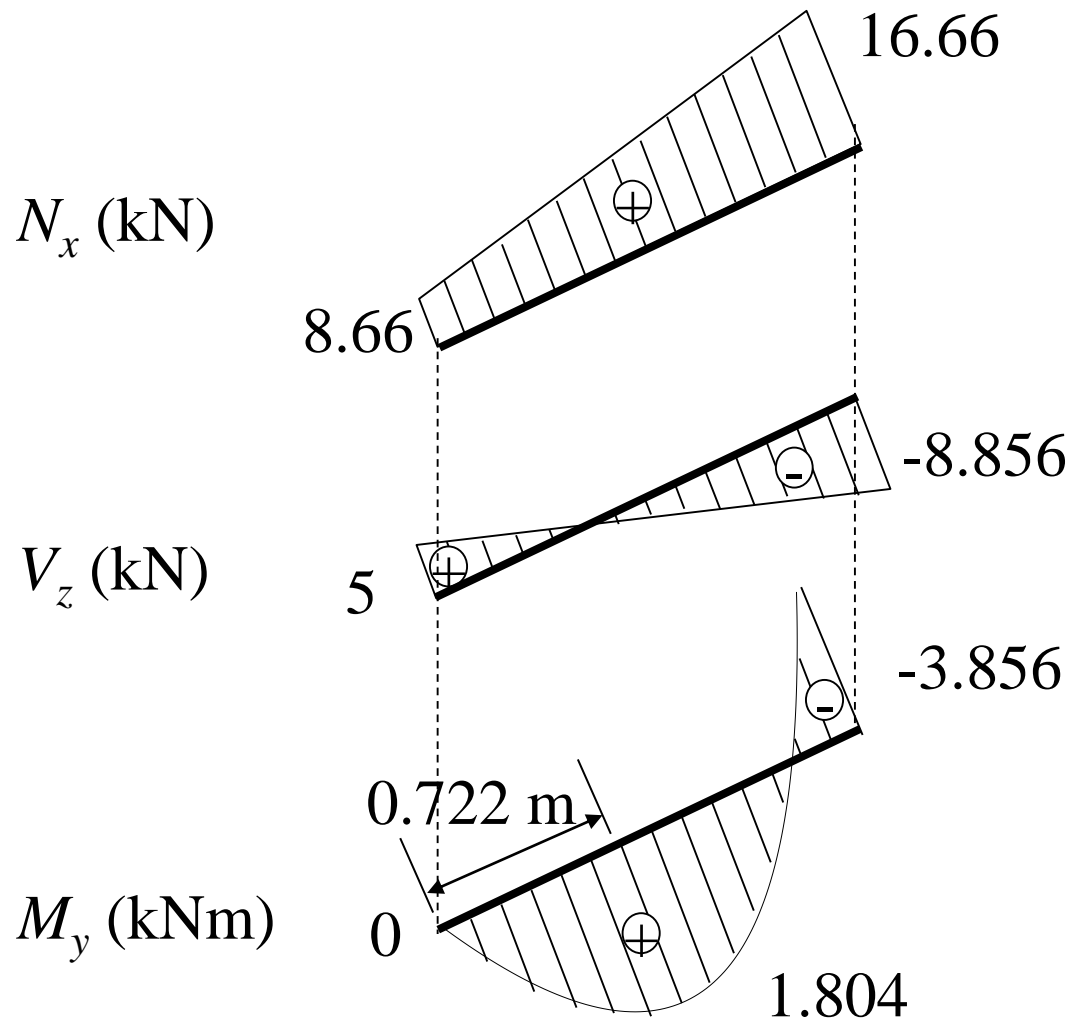
$$l_{xg} = 1 \cdot \cotg 30^\circ = \sqrt{3} \text{ m}$$

$$l_{zg} = 1 \text{ m}$$

$$l = \sqrt{3+1} = 2 \text{ m}$$

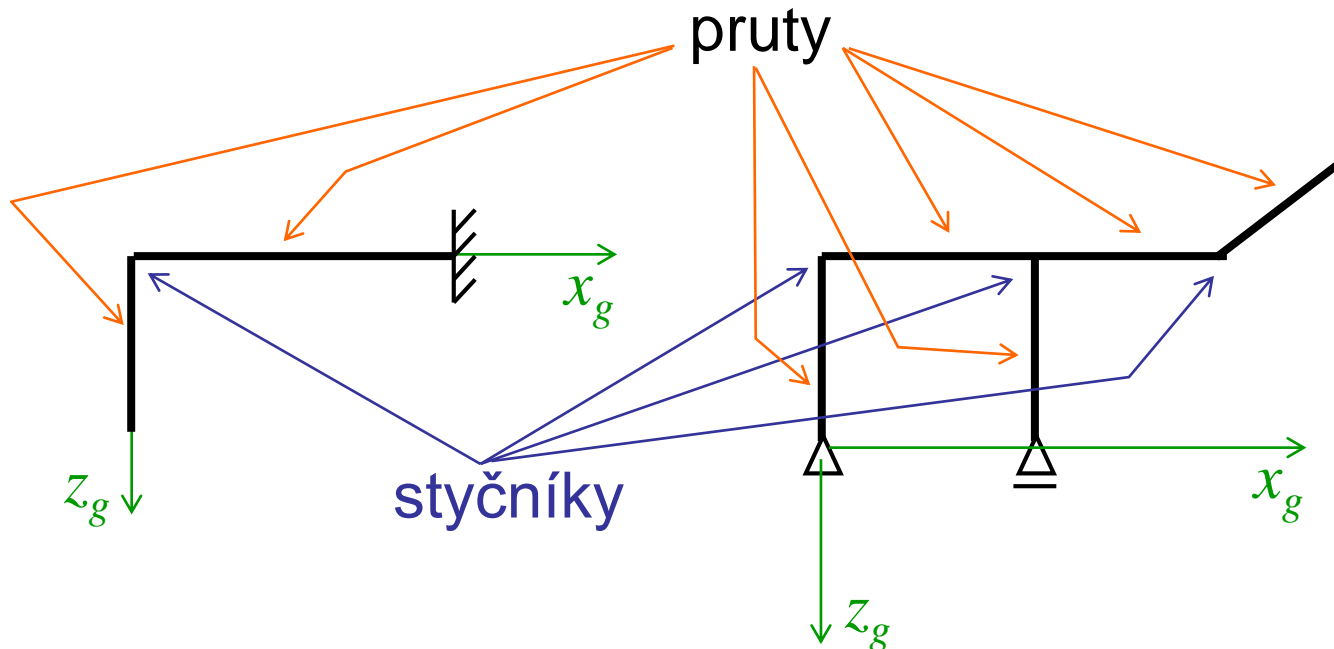


Př. 2: Vykreslení



Lomené nosníky

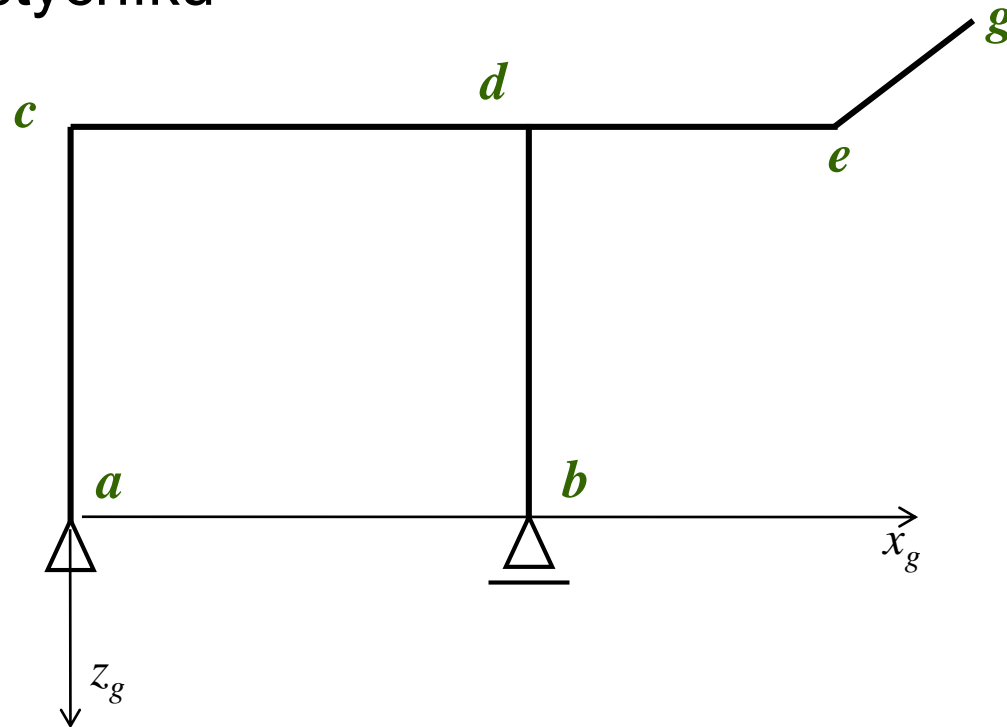
- Lomený nosník \equiv soustava přímých prutů spojených styčníky



- Globální souřadný systém
 - výpočet reakcí
 - kontrola
- Lokální *prutové* souřadné systémy: vnitřní síly

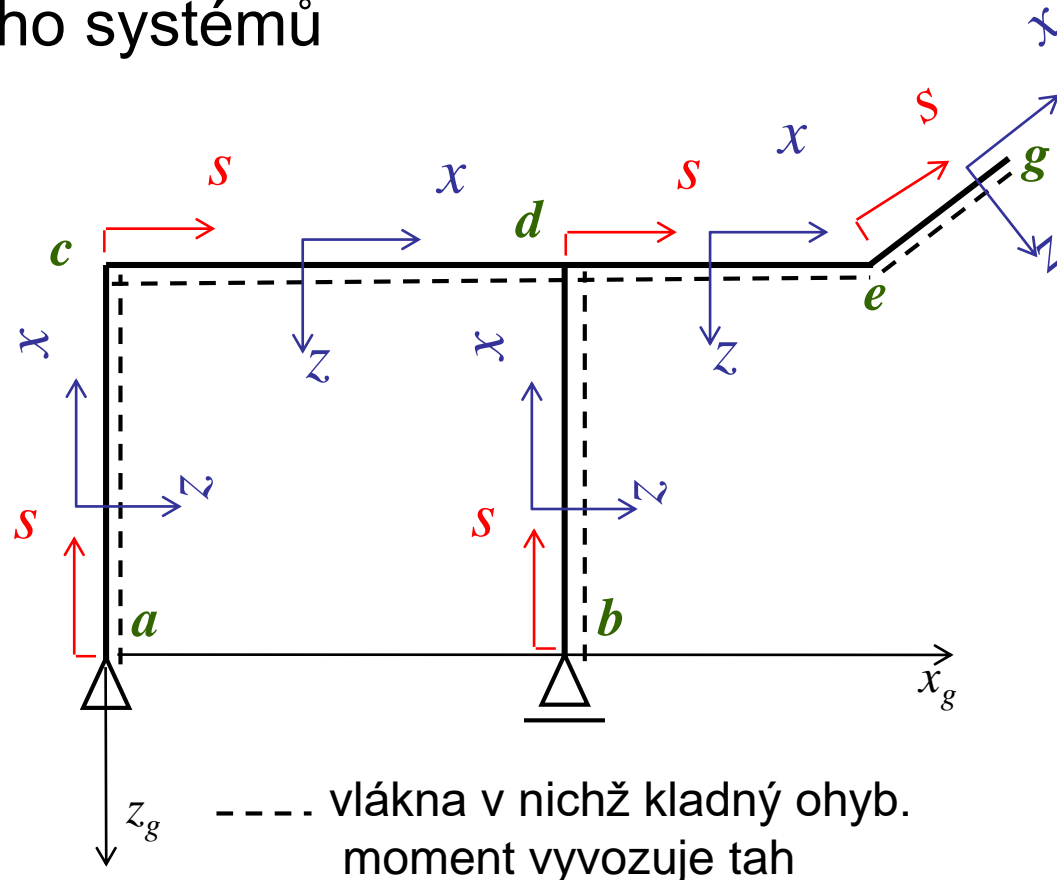
Postup výpočtu

- Rozdělení prutů na intervaly (dělicí body)
 - místa změny funkcí spojitého zatížení
 - působišťe osamělých sil a momentů
 - podpory, vazby (působišťe reakcí)
 - konce prutů
- Označení styčnicků



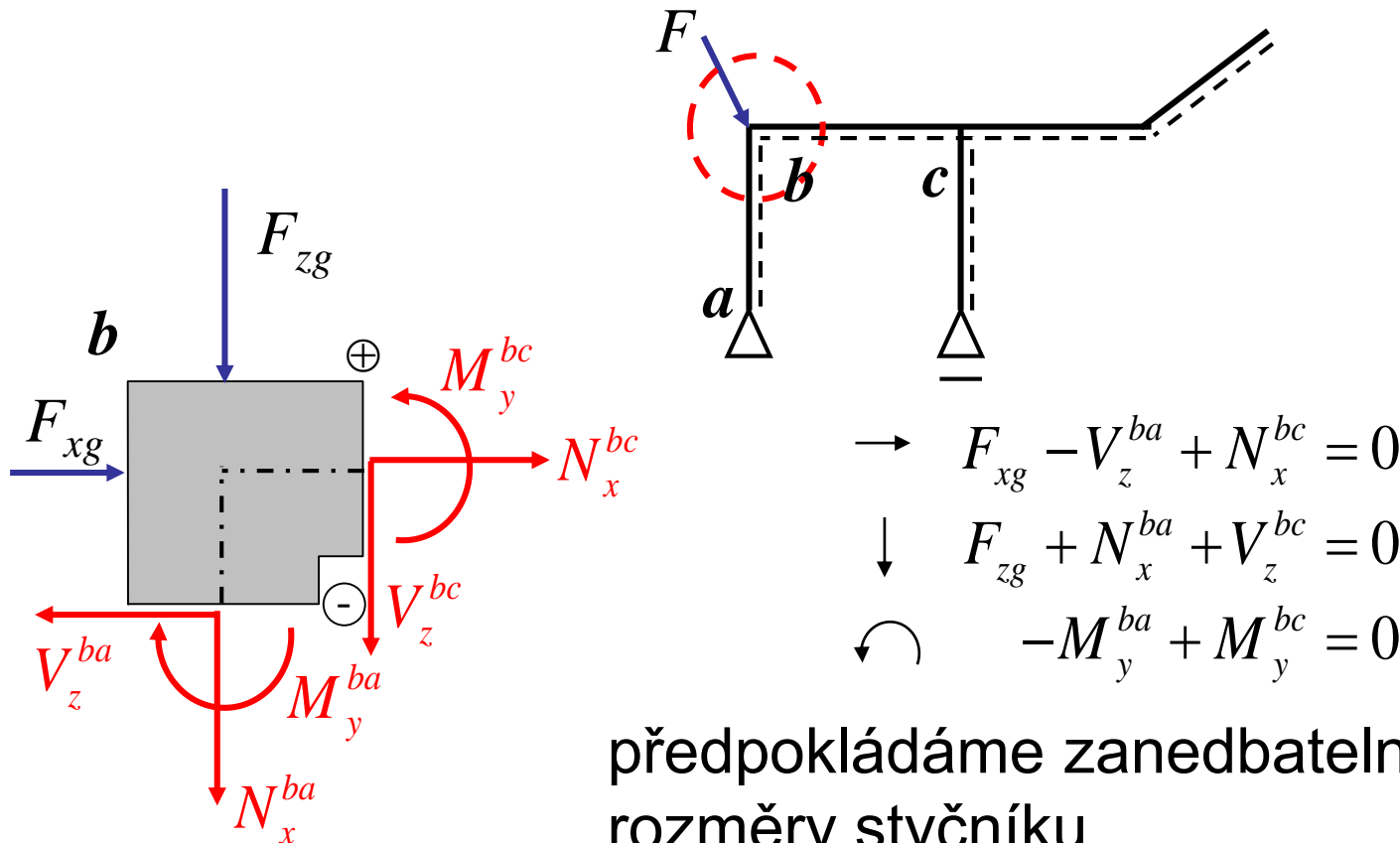
Postup výpočtu

- Zavedení lokálních souřadných systémů na prutech
- Zavedení souřadnice s [pokud potřebuji analyticky vyjádřit průhyb]
- „Spodní vlákna“: alternativní způsob zavedení souřadného systémů



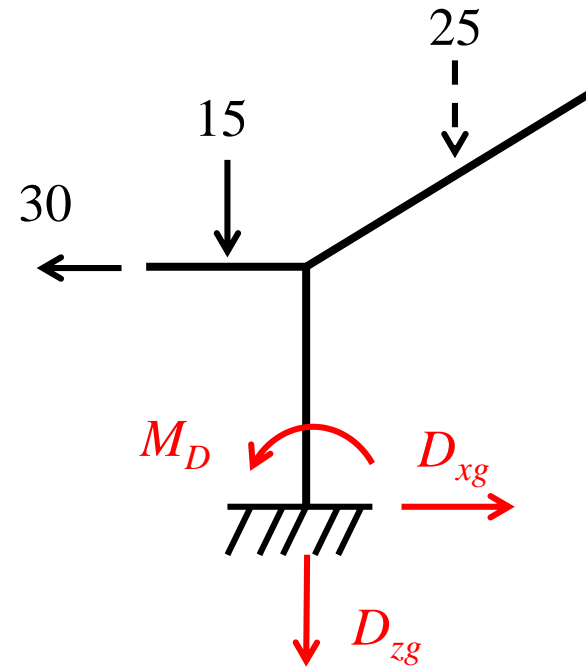
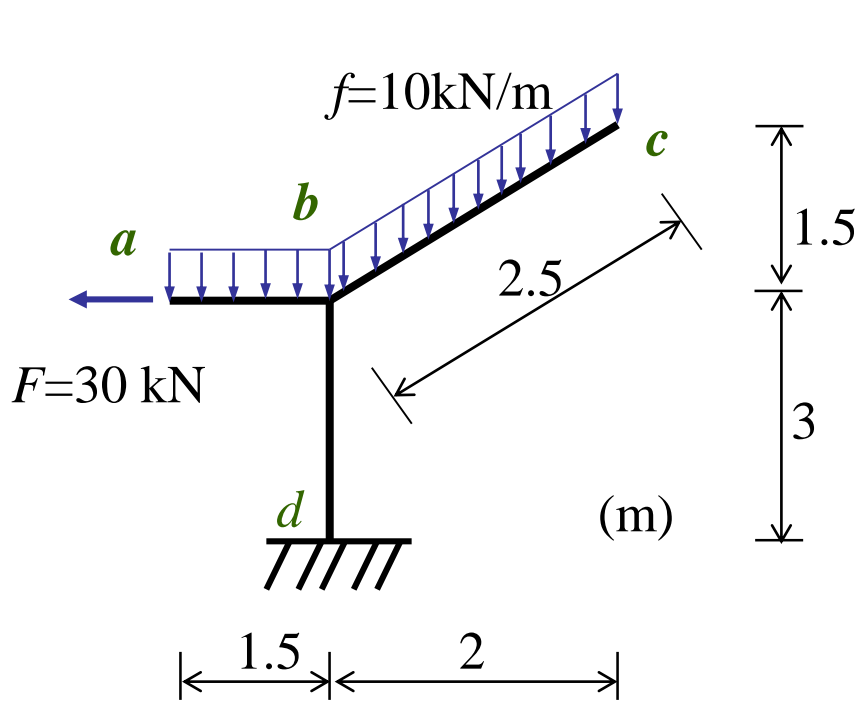
Kontrola styčnickové rovnováhy

Princip: Vyjmeme-li z konstrukce její libovolnou část a účinek odňatých částí nahradíme vnitřními silami, výsledná soustava sil {vnitřní síly; vnější zatížení; reakce} **musí být rovnovážná**



předpokládáme zanedbatelně malé rozměry styčnicku

Př.3: Zadání a výpočet reakcí



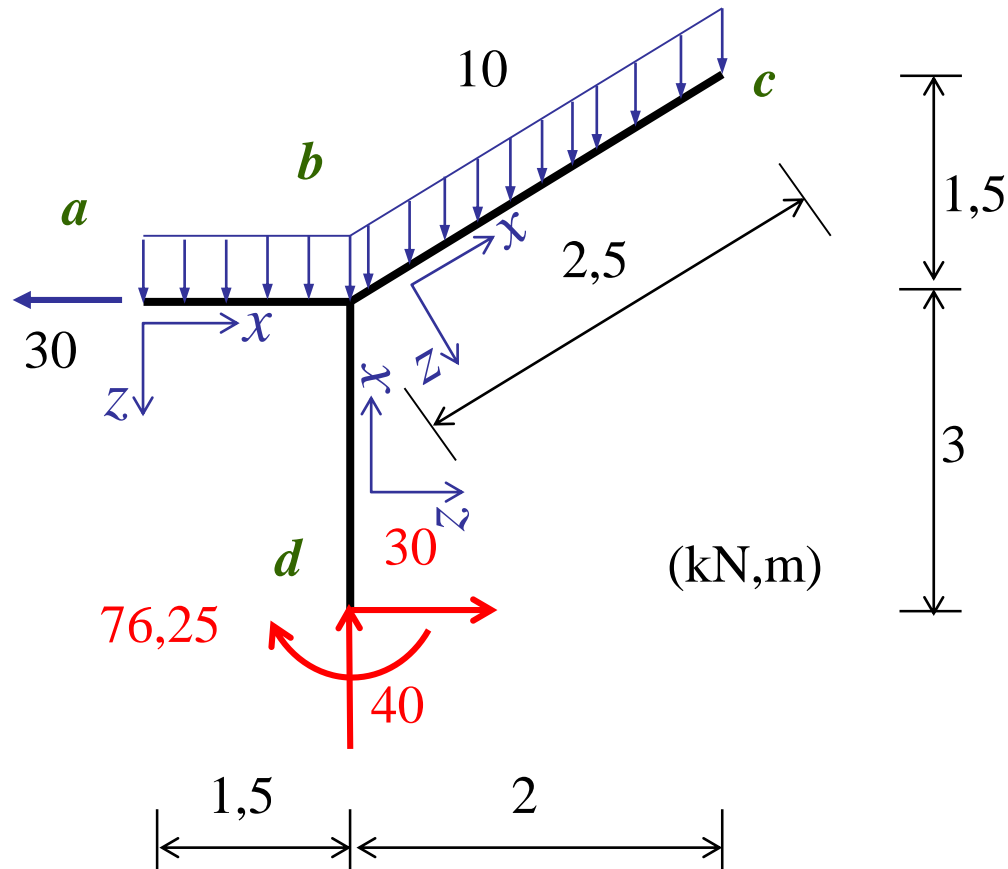
$$\rightarrow -30 + D_{xg} = 0 \Rightarrow D_{xg} = 30 \text{ kN}$$

$$\downarrow 15 + 25 + D_{zg} = 0 \Rightarrow D_{zg} = -40 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright 30 \cdot 3 + 15 \cdot 0.75 - 25 + M_D = 0$$

$$M_D = -76,25 \text{ kNm}$$

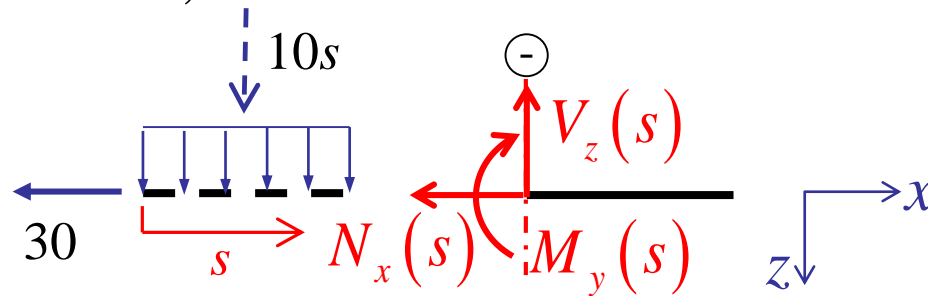
Př.3: Souřadnicové systémy



- Dále postupujeme prut po prutu
- Opakujeme kroky z předchozích přednášek

Př.3: Analytické průběhy

Prut (a;b): $0 < s < 1,5$ m



$$N_x(s) = 30 \quad N_x^{ba} = N_x(s = 1,5) = 30$$

$$V_z(s) = -10s \quad V_z^{ba} = V_z(s = 1,5) = -15$$

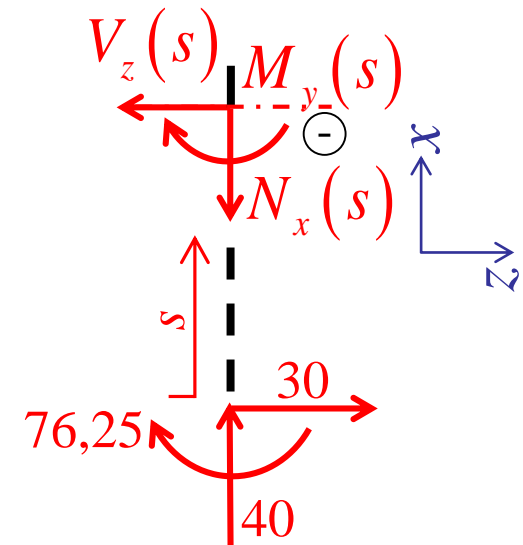
$$M_y(s) = -5s^2 \quad M_y^{ba} = M_y(s = 1,5) = -11,25$$

Prut (d;b): $0 < s < 3$ m

$$N_x(s) = -40 \quad N_x^{bd} = N_x(s = 3) = -40$$

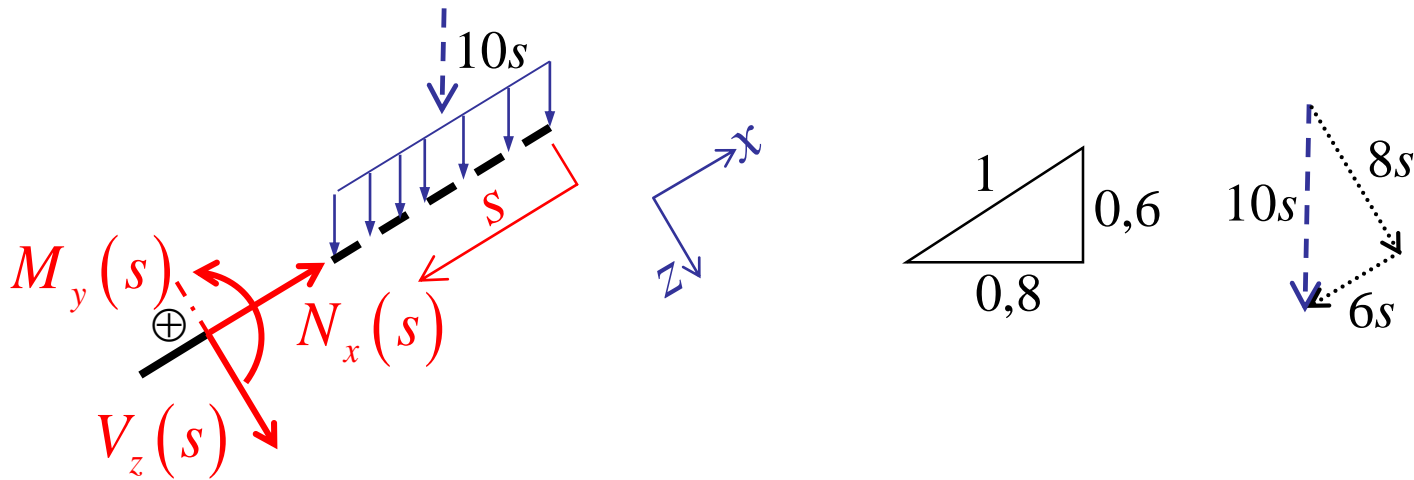
$$V_z(s) = -30 \quad V_z^{bd} = V_z(s = 3) = -30$$

$$M_y(s) = 76,25 - 30s \quad M_y^{bd} = M_y(s = 3) = -13,75$$



Př.3: Analytické průběhy

Prut ($b;c$): $0 < s < 2,5$ m

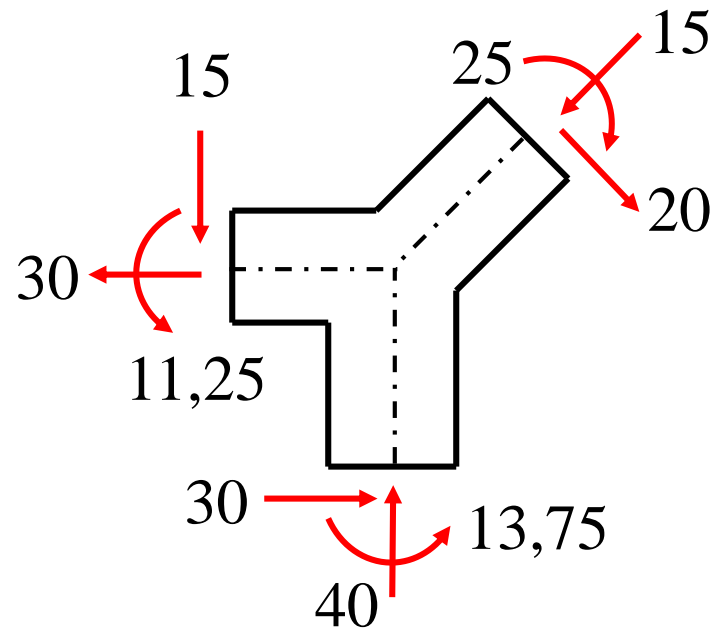
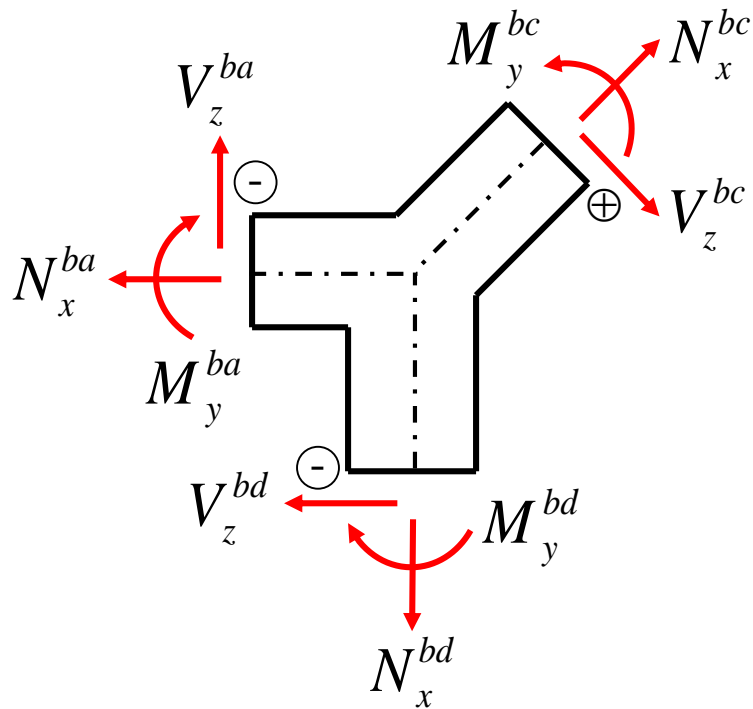


$$N_x(s) = -6s \quad N_x^{bc} = N_x(s = 2,5) = -15$$

$$V_z(s) = 8s \quad V_z^{bc} = V_z(s = 2,5) = 20$$

$$M_y(s) = -4s^2 \quad M_y^{bc} = M_y(s = 2,5) = -25$$

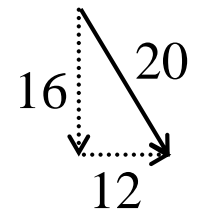
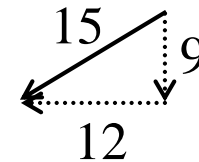
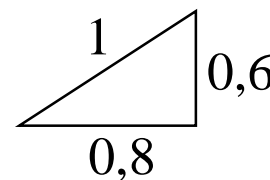
Př.3: Styčnicková kontrola



$$\rightarrow -30 + 30 - 12 + 12 = 0$$

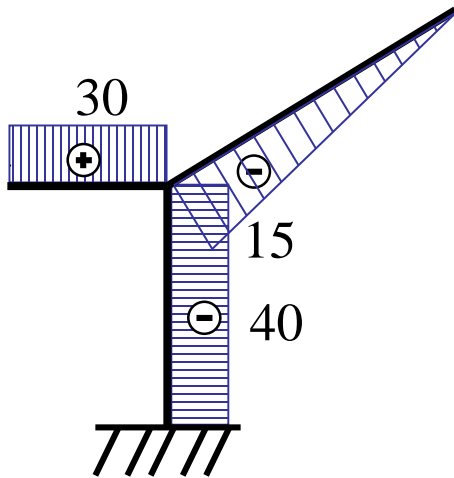
$$\downarrow 15 - 40 + 9 + 16 = 0$$

$$\curvearrowright 11,25 + 13,75 - 25 = 0$$

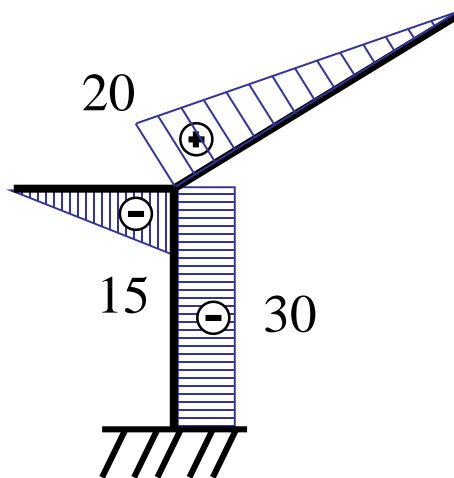


Př.3: Vykreslení vnitřních sil

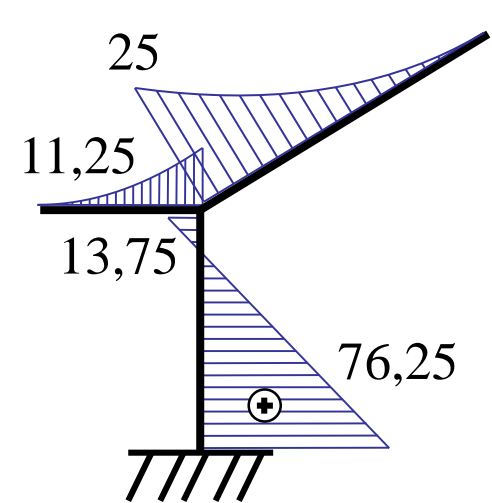
N_x [kN]



V_z [kN]



M_y [kNm]



Kontrola

- Na volných koncích je nulový moment
- „Vizuální“ kontrola pomocí Schwedlerových vět
- Moment má vypouklé bříško ve směru působícího spojitého zatížení

Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu Stavební mechanika R1 pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze. Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.

Při přípravě této přednášky byla použita řada materiálů laskavě poskytnutých Janem Zemanem, Petrem Kabelem, Matějem Lepšem, Vitem Šmilauerem, Michalem Polákem a Alešem Jírou ze Stavební fakulty ČVUT v Praze.

Pokud v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na tesarek@fsv.cvut.cz

Datum poslední revize: 10.11.2020