

# Stavební mechanika R1

## K132 SMR1

Přednáška č. 9

Složené soustavy

a

Úvod do analýzy normálového napětí

# Co nás čeká v deváté přednášce

## Průběhy vnitřních sil na složených soustavách

- Princip výpočtu
- Příklad: Rovinná konstrukce
- Další kontroly průběhu vnitřních sil

## Základní způsoby namáhání prutů

### *Tažený/tlačený prut*

- Normálové napětí a deformace
- Modul pružnosti
- Využití při návrhu/posouzení kci

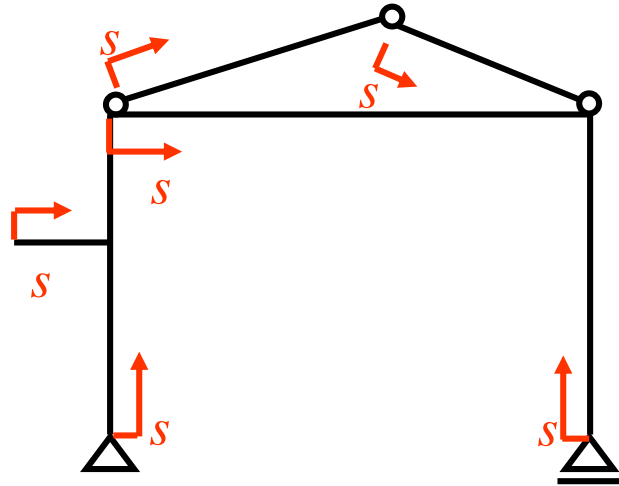
### *Ohýbaný prut*

- Ohybová křivost prutu
- Jak souvisí napětí a křivost
- Jak souvisí napětí a M

### *Zobecnění*

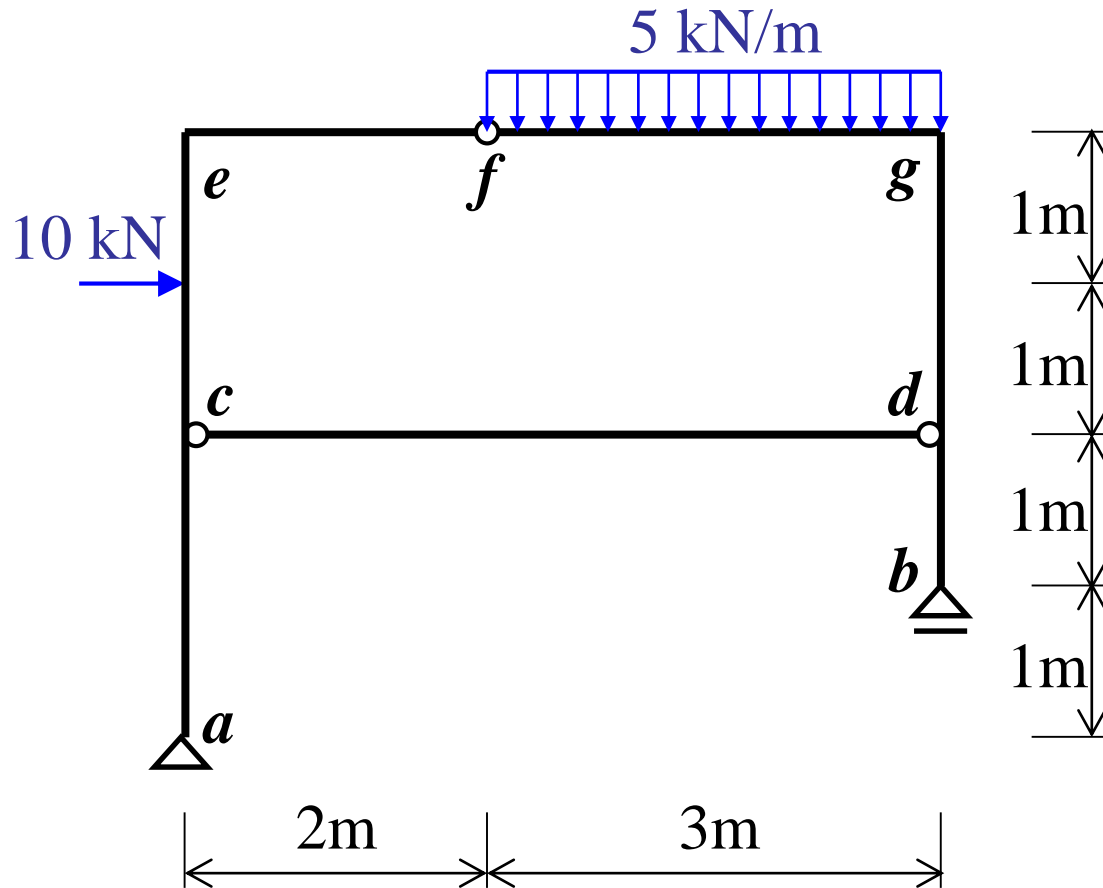
- Kombinace N a M
- Neutrální osa
- Výpočet extrémního napětí

# Princip výpočtu



- Kombinace předchozích úloh
- Soustava přímých, šikmých a lomených nosníků spojených *vnitřními* vazbami
- **Postup**
  - Určení (potřebných) vnitřních a vnějších reakcí
  - Na každém prutu zavedeme lokální souřadný systém
  - Řešíme průběhy vnitřních sil prut po prutu

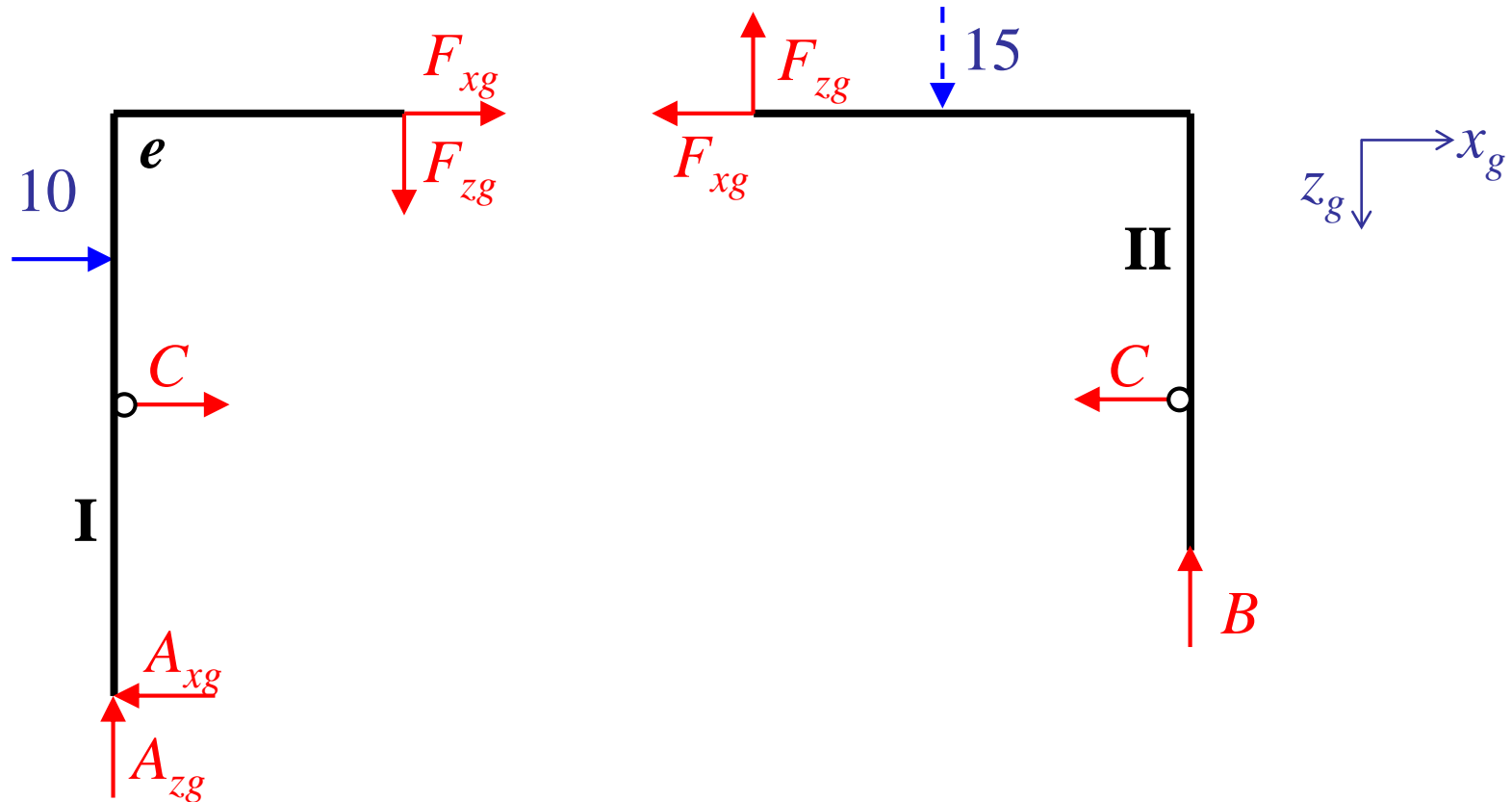
# Příklad 1: Rámová konstrukce



Pro danou konstrukci

- Určete analytický průběh vnitřních sil na intervalech  $(f,g)$  a  $(d,g)$
- Vykreslete průběh vnitřních sil

# Příklad 1: Výpočet reakcí



Stupeň statické určitosti

$$s = 2 \cdot 3 - 2 - 1 - 1 - 2 = 0 \checkmark$$

# Příklad 1: Výpočet reakcí

$$\text{I} + \text{II} \rightarrow A_{xg} = 10$$

$$\text{I} + \text{II} \overset{a}{\curvearrowright} 5B_{zg} - 15 \cdot 3,5 - 10 \cdot 3 = 0 \Rightarrow B = 16,5$$

$$\text{I} + \text{II} \downarrow A_{zg} + B - 15 = 0 \Rightarrow A_{zg} = -1,5$$

$$\text{II} \downarrow F_{zg} + 15 - B = 0 \Rightarrow F_{zg} = 1,5$$

$$\text{II} \overset{f}{\curvearrowright} -15 \cdot 1,5 + 3B - 2C = 0 \Rightarrow C = 13,5$$

$$\text{II} \rightarrow -F_{xg} - C = 0 \Rightarrow F_{xg} = -13,5$$

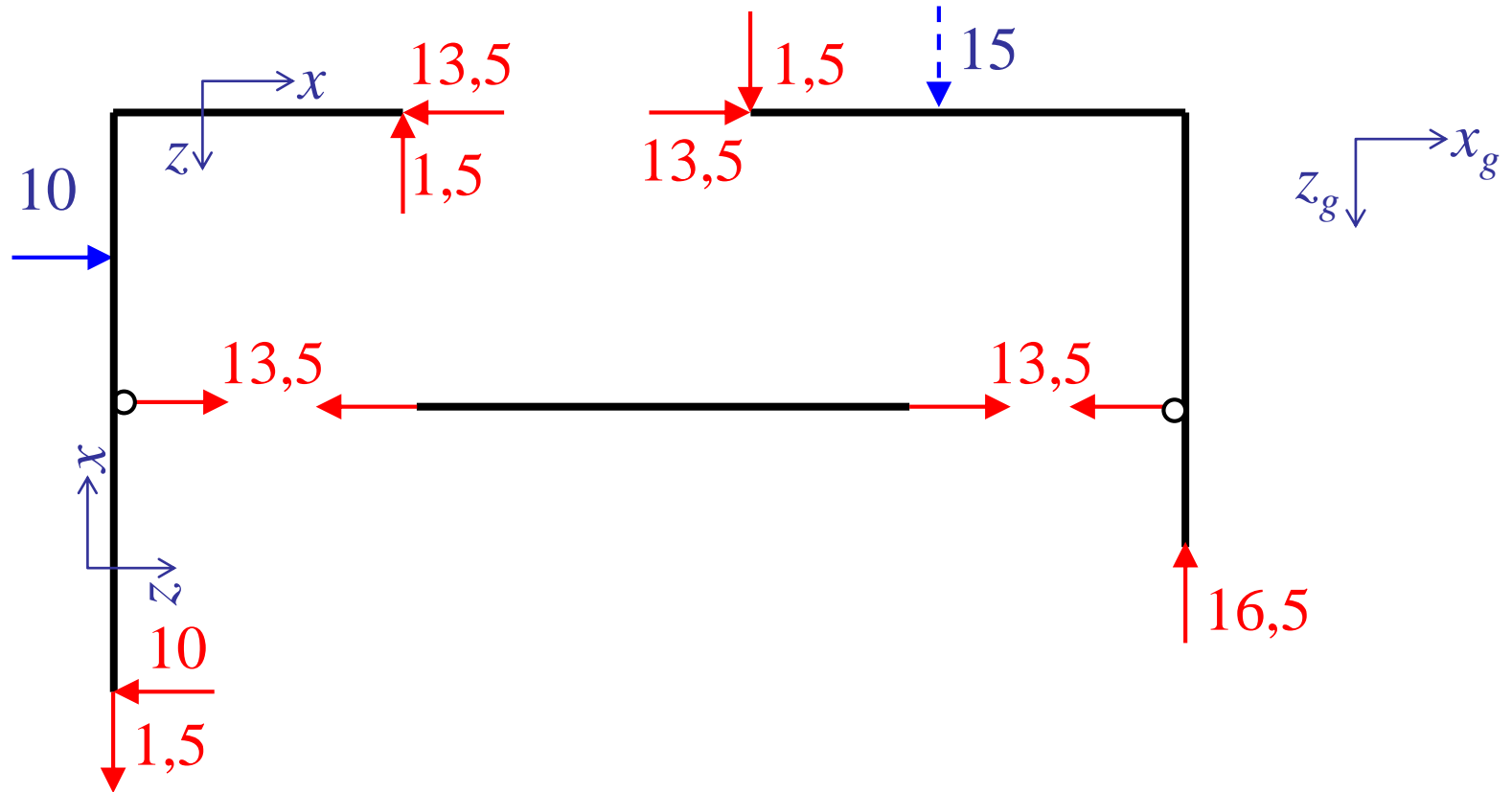
Kontrola:

$$\text{I} \overset{e}{\curvearrowright} 10 + 2F_{zg} + 2C - 4A_{xg} = 0$$

$$10 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 13,5 - 4 \cdot 10 = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$

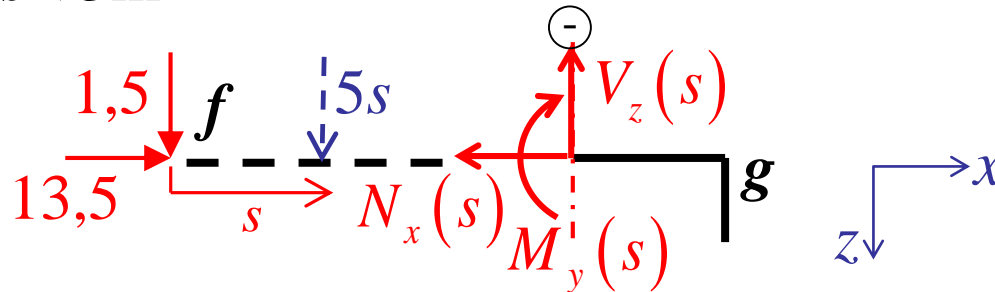
# Příklad 1: Volba souřadných systémů



Stejná volba souřadného systému pro vodorovné a svislé pruty

# Příklad 1: Analytické průběhy

Prut ( $f,g$ ):  $0 < s < 3\text{m}$

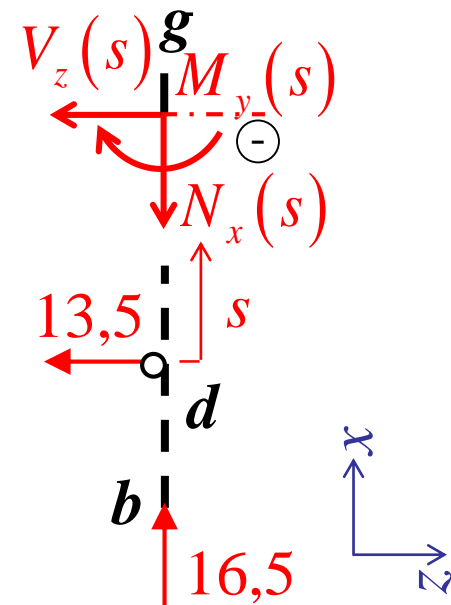


$$N_x(s) = -13,5 \quad N_x^{gf} = N_x(s=3) = -13,5$$

$$V_z(s) = -1,5 - 5s \quad V_z^{gf} = V_z(s=3) = -16,5$$

$$M_y(s) = -1,5s - 5s \cdot 0,5s \quad M_y^{gf} = M_y(s=3) = -27$$

Prut ( $d,g$ ):  $0 < s < 2\text{m}$



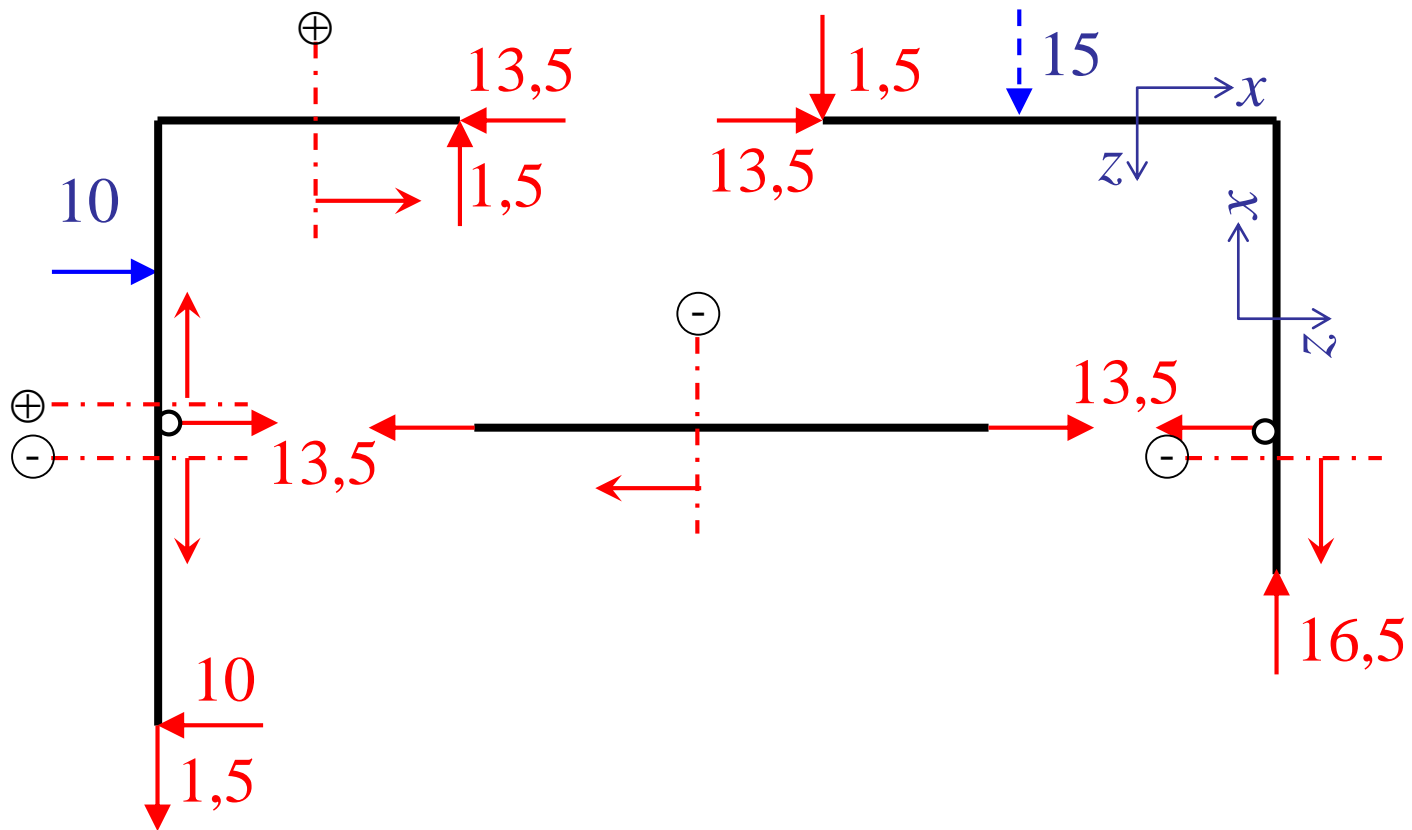
$$N_x(s) = -16,5 \quad N_x^{gd} = N_x(s=2) = -16,5$$

$$V_z(s) = 13,5 \quad V_z^{gd} = V_z(s=2) = 13,5$$

$$M_y(s) = 13,5s \quad M_y^{gd} = M_y(s=2) = 27$$

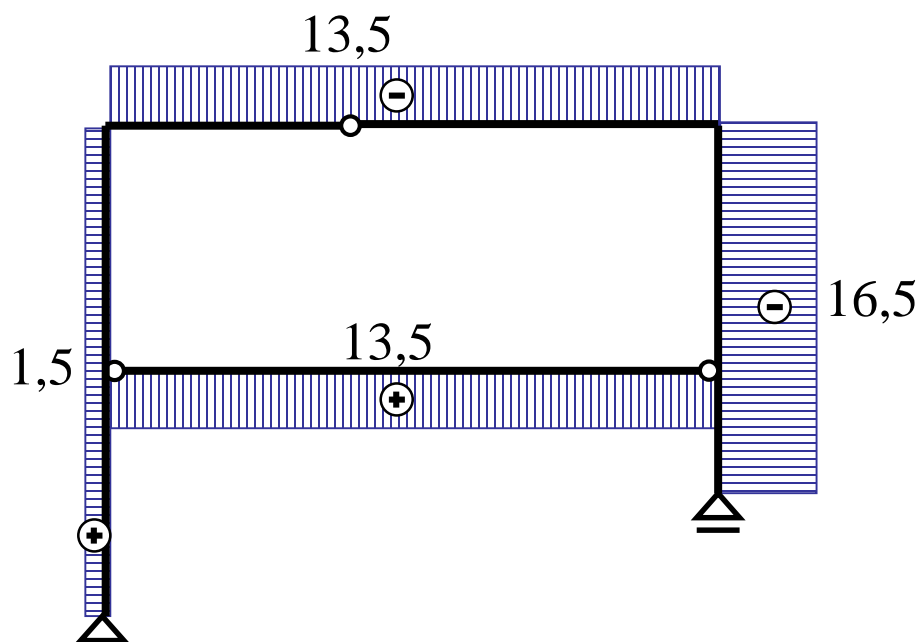


# Příklad 1: „Odňaté části“ na zbytku konstrukce

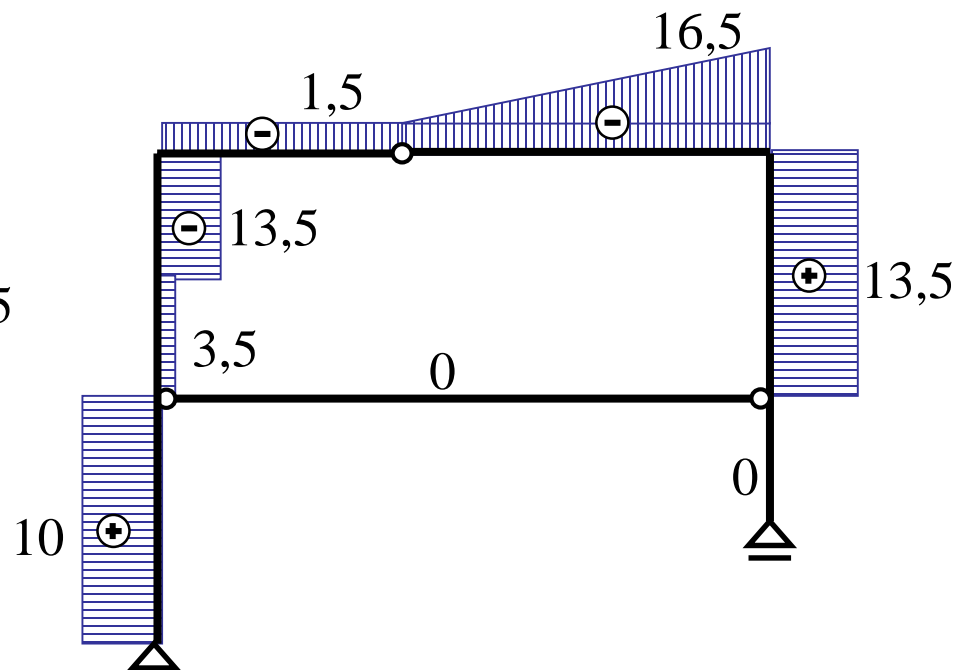


# Příklad 1: Průběhy vnitřních sil

$N_x$  [kN]

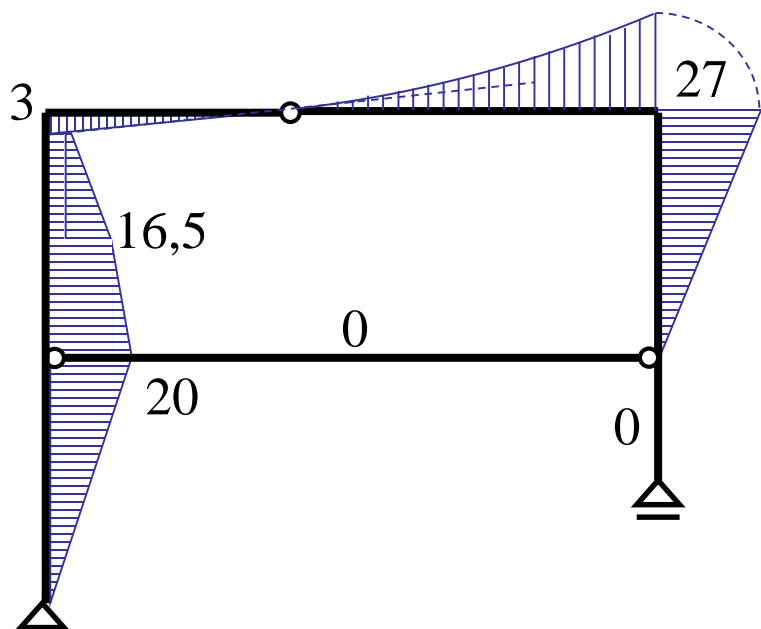


$V_z$  [kN]

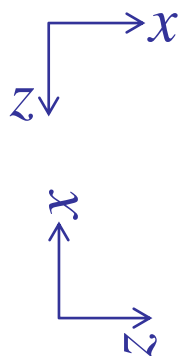
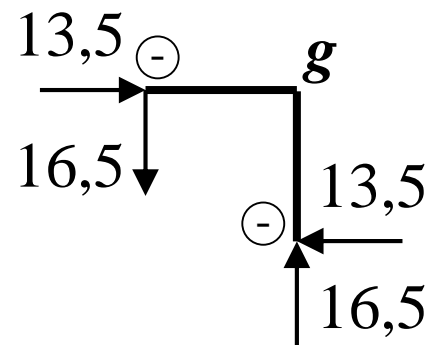
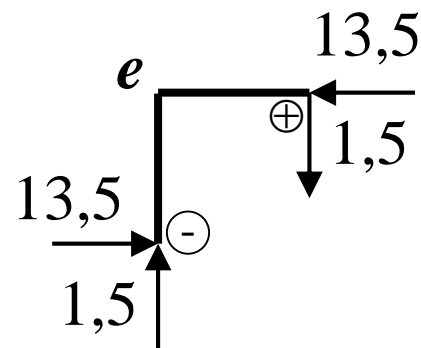


# Příklad 1: Průběhy vnitřních sil

$M_y$  [kNm]



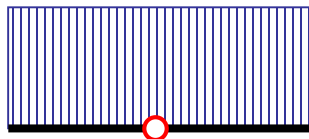
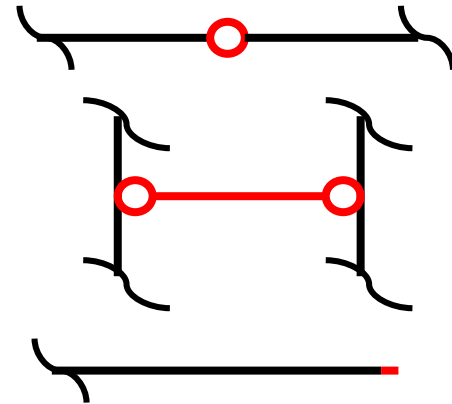
Styčnickové kontroly  
(Silové)



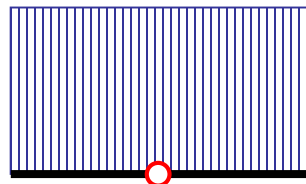
# Kontroly vnitřních sil na složených soustavách

Vnitřní síly ve vazbách

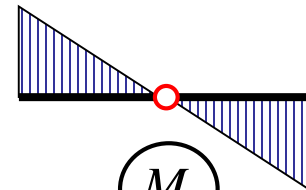
- Nezátížené vazby
  - Nezátížený kloub  
 $M_y=0$
  - Nezátížený kyvný prut  
 $V_z=0, M_y=0$
  - Nezátížený volný konec  
 $N_x=V_z=0, M_y=0$
- Okolí zatíženého kloubu



$N_x$



$V_z$



$M_y$

# Co nás čeká v deváté přednášce

## Průběhy vnitřních sil na složených soustavách

- Princip výpočtu
- Příklad: Rovinná konstrukce
- Další kontroly průběhu vnitřních sil

## Základní způsoby namáhání prutů

### *Tažený/tlačený prut*

- Normálové napětí a deformace
- Modul pružnosti
- Využití při návrhu/posouzení kci

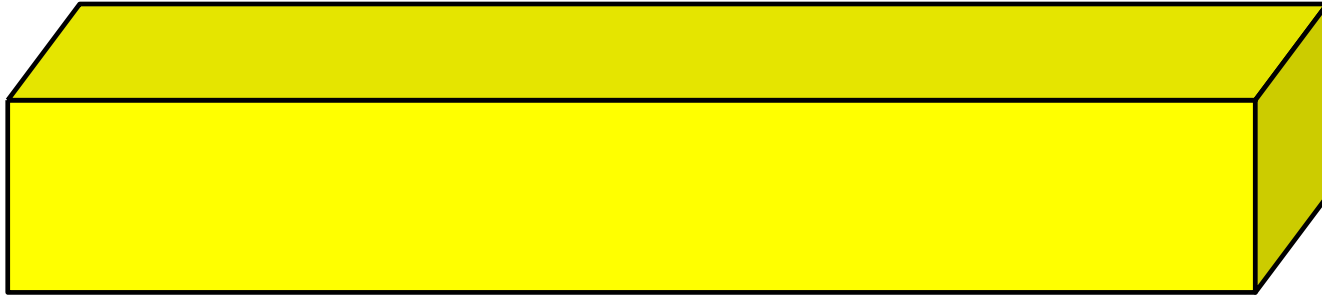
### *Ohýbaný prut*

- Ohybová křivost prutu
- Jak souvisí napětí a křivost
- Jak souvisí napětí a M

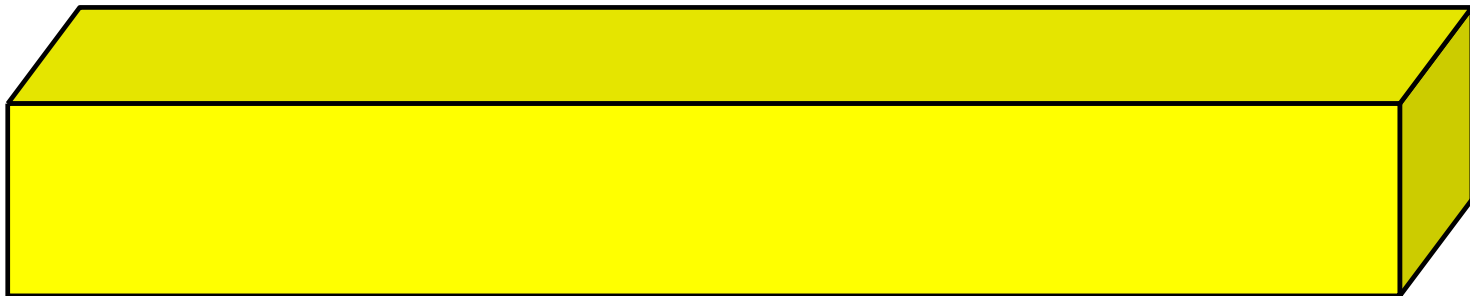
### *Zobecnění*

- Kombinace N a M
- Neutrální osa
- Výpočet extrémního napětí

# Základní typy namáhání prutů



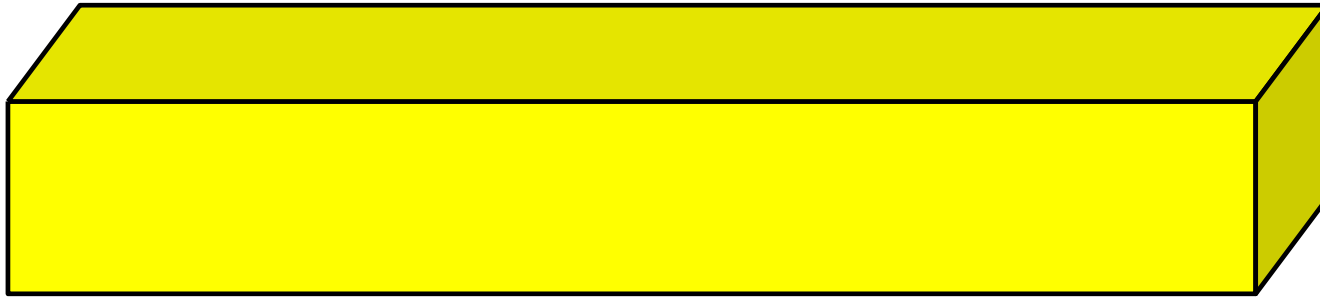
**tah (tlak)**



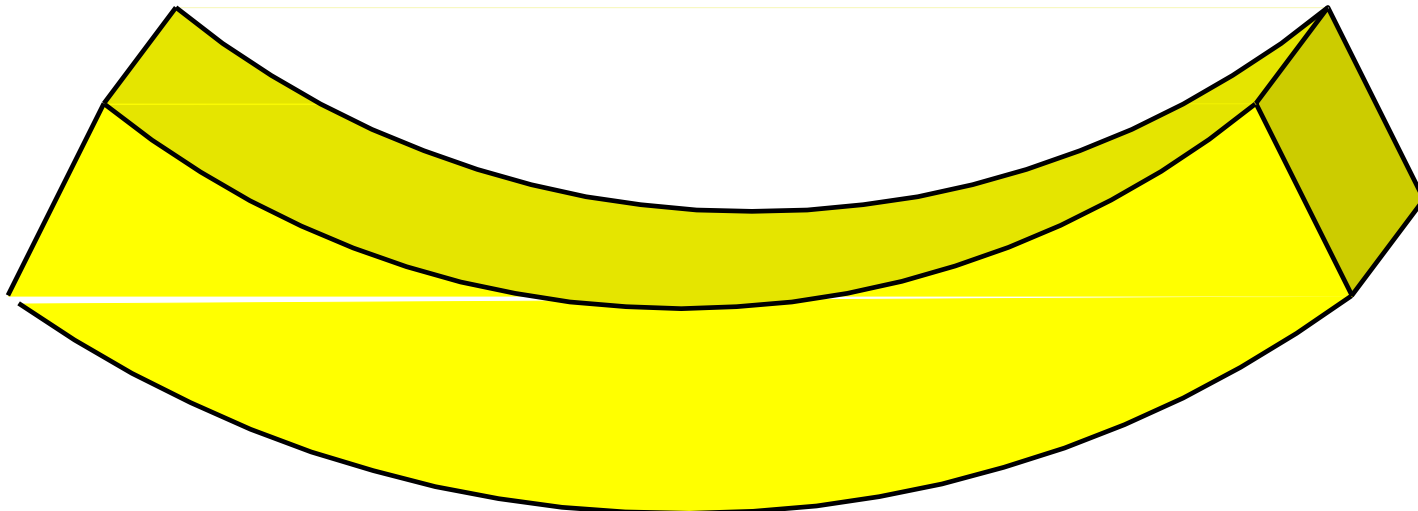
Dominantní pro

- sloupy
- pruty příhradových konstrukcí

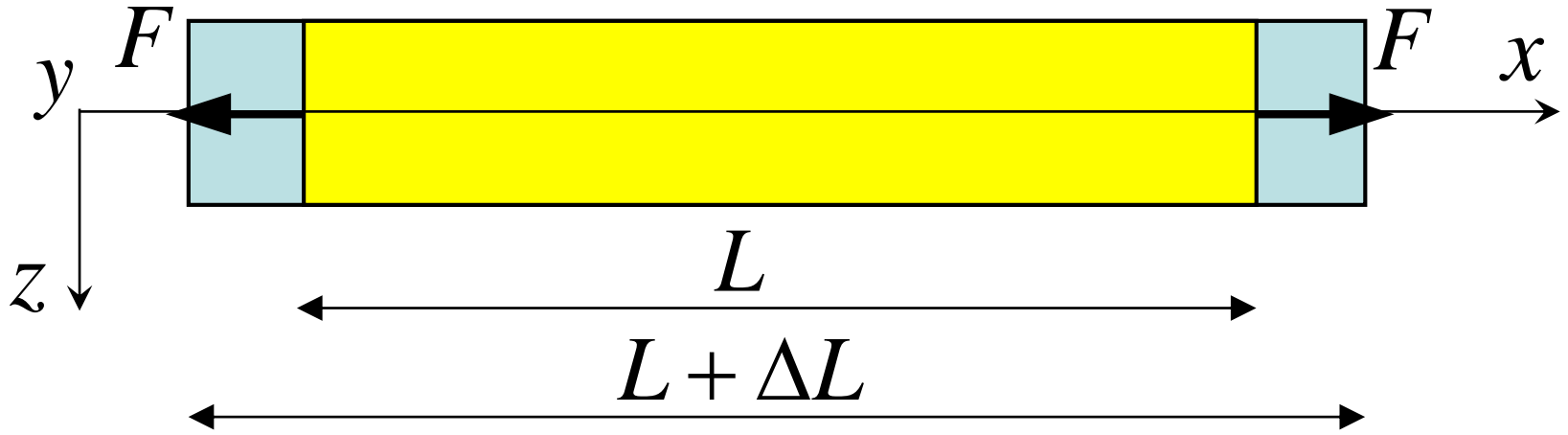
# Základní typy namáhání prutů



**ohyb**



# Tažený/tlačený prut



- Nenulové vnitřní síly

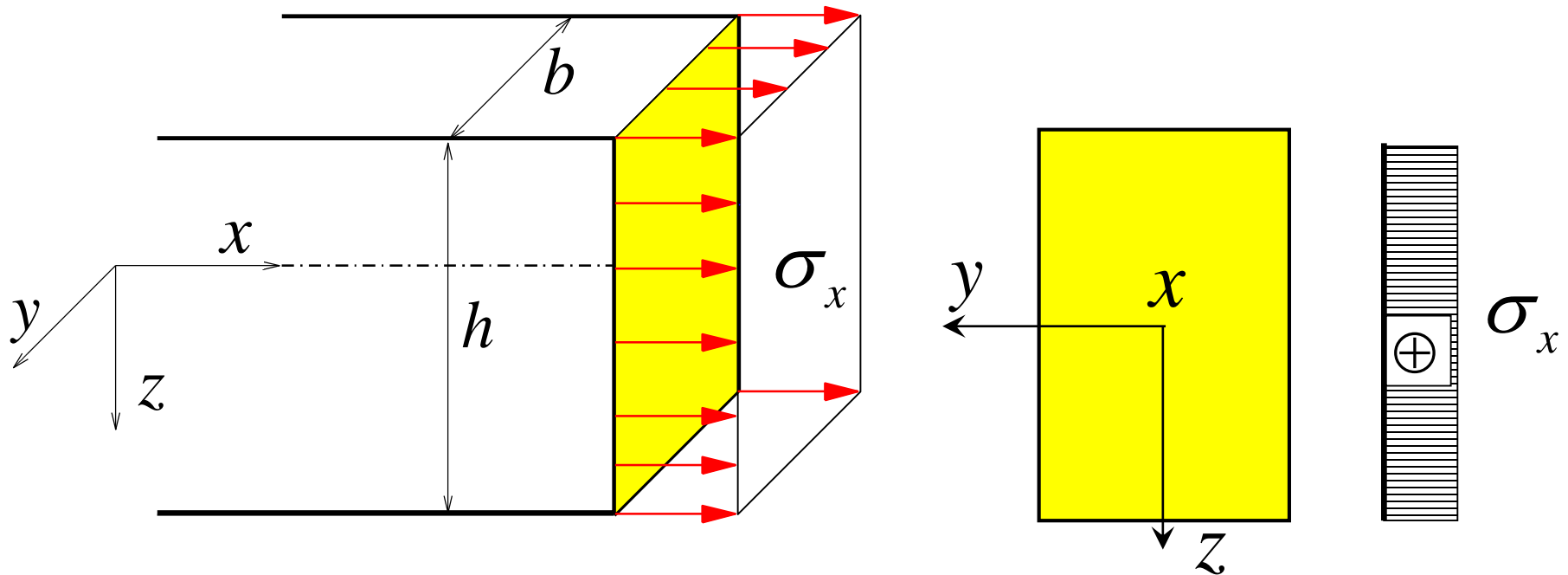
$$N_x = F$$

- Absolutní protažení  $\Delta L$  [m]
- Relativní protažení/normálová **deformace**

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} [-]$$



# Tažený/tlačený prut



**Normálové napětí**

$$\sigma_x = \frac{N_x}{bh} = \frac{N_x}{A} \text{ [Pa]}$$

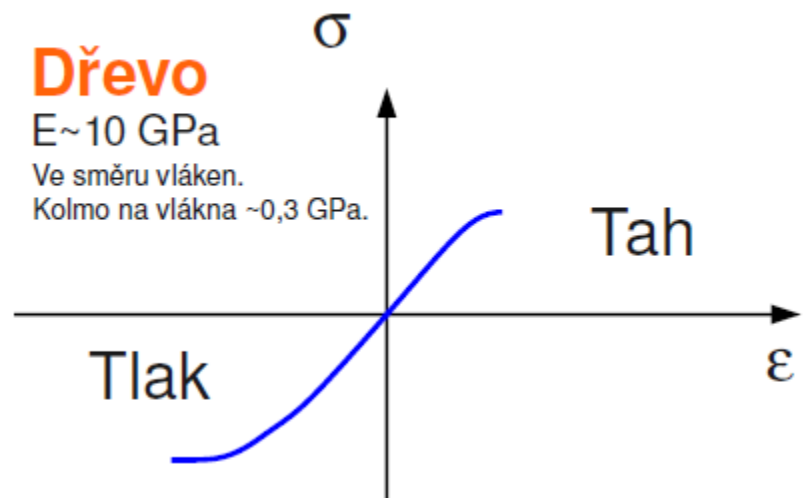
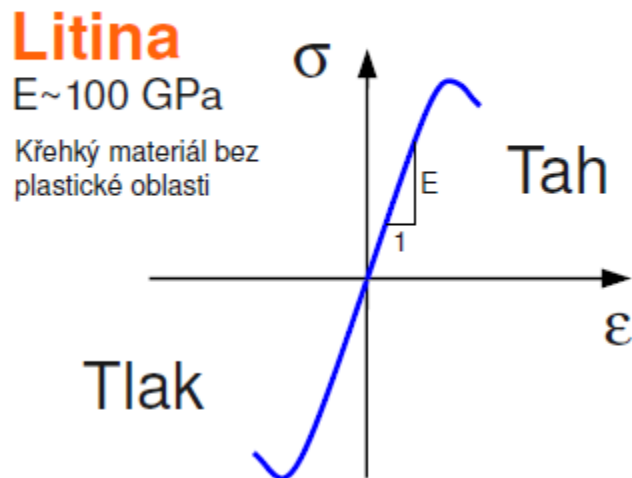
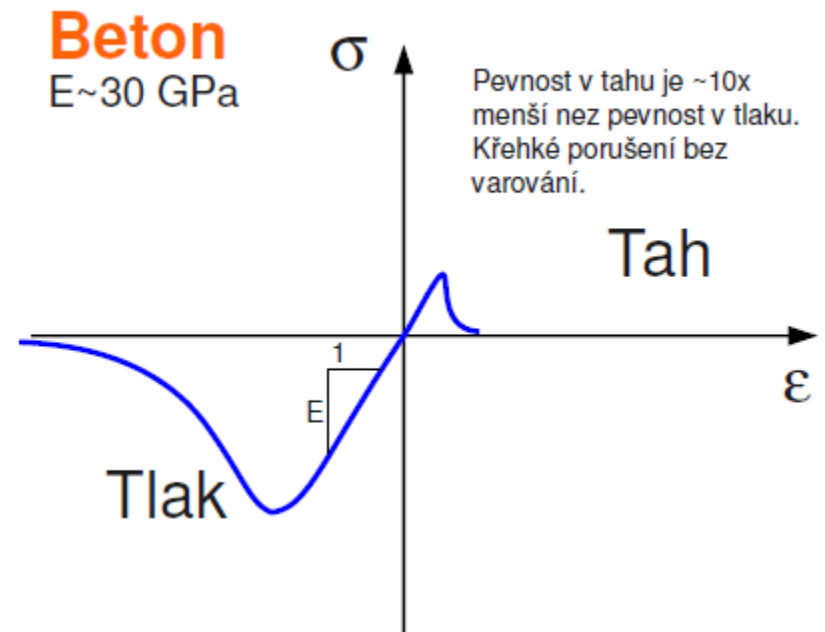
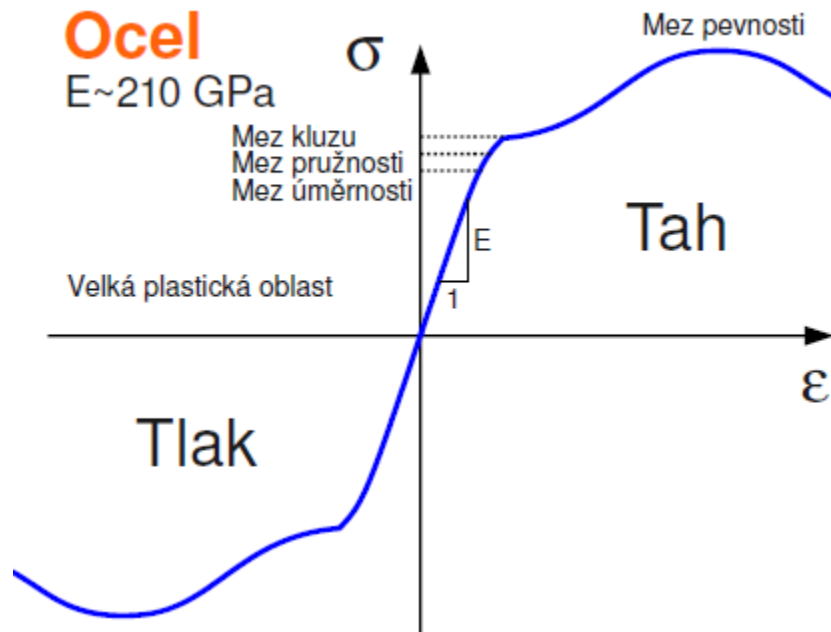
Vnitřní síla

Průřezová  
charakteristika

rozděleno rovnoměrně po průřezu

charakteristika

# Vztah mezi napětím a deformací



# Vztah mezi napětím a deformací

- Hookeův zákon

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

Materiálová konstanta

- Youngův modul pružnosti  $E$  [Pa]
- Nezávislé na geometrických rozměrech  $L, b$  a  $h$

Využití např. při **posouzení/návrhu** konstrukcí

- Na úrovni „materiálu“

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \leq f_d \leftarrow \text{Návrhová pevnost}$$

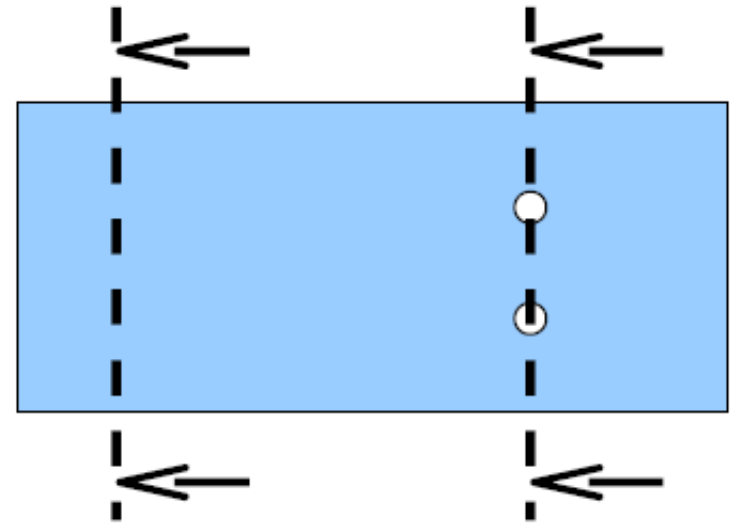
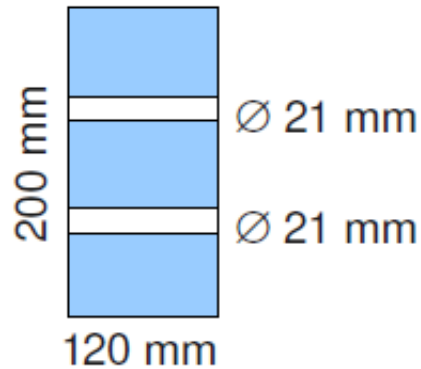
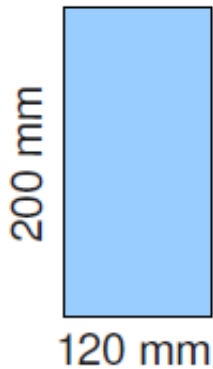
- Na úrovni „průřezu“

$$N_x \leq N_{Rd} = f_d A$$

Návrhová únosnost

# Příklad

- Posudte únosnost plného a oslabeného průřezu



mezní únosnost materiálu  $f_d = 8$  Mpa

Plný průřez

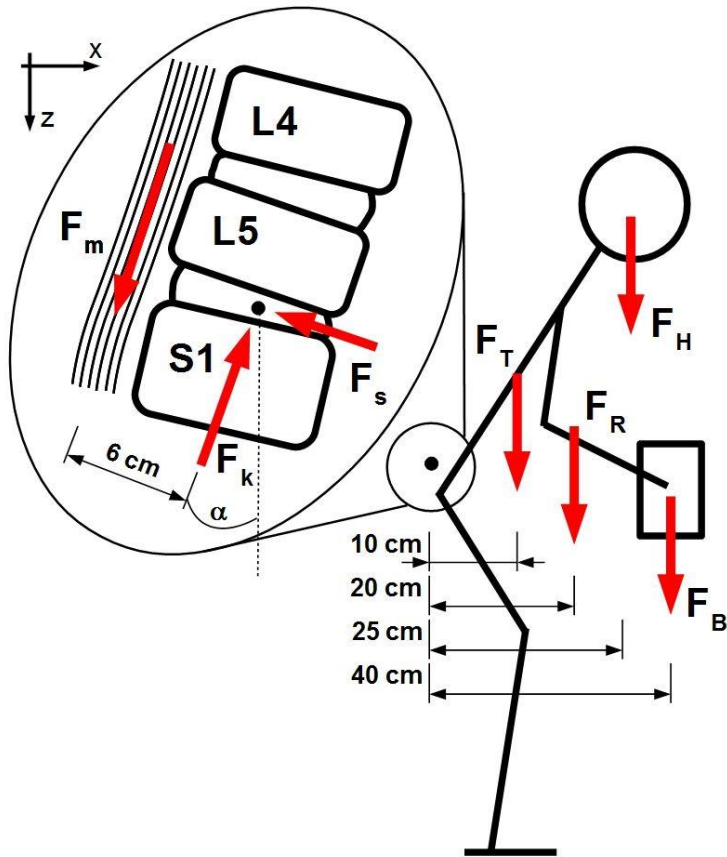
$$\sigma_x = f_d \geq \frac{N_{Rd}}{A^1} \rightarrow N_{Rd} = f_d \cdot A^1 = 8000 \cdot (0,12 \cdot 0,2) = 192 \text{ kN}$$

Průřez oslabený otvory

$$\sigma_x = f_d \geq \frac{N_{Rd}}{A^2} \rightarrow N_{Rd} = f_d \cdot A^2 = 8000 \cdot (0,12 \cdot 0,2 - 2 \cdot 0,021 \cdot 0,12) = 151,7 \text{ kN}$$

# Trocha biomechaniky

Jaké bude namáhání páteře při zvedání břemen o hmotnosti 10 kg?



Neznámé:

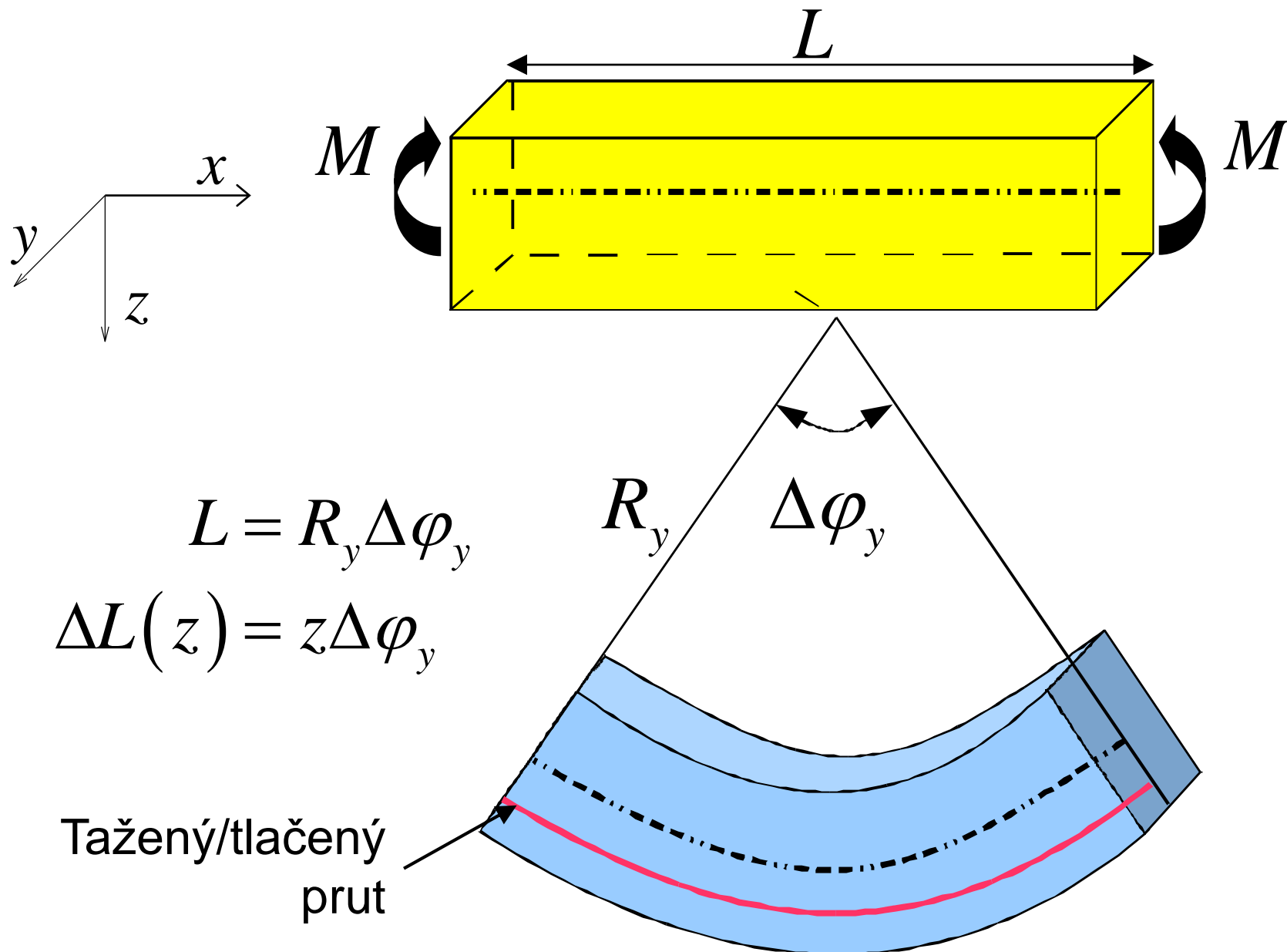
- $F_m$  síla ve svalu *m. erector spinae*
- $F_k$  tlaková síla v meziobrat. disku
- $F_s$  smyková síla v meziobrat. disku

Znamé hodnoty:

- $F_H$  hmotnost hlavy = 5,8 kg = 58 N
- $F_T$  hmotnost trupu = 32,8 kg = 328 N
- $F_R$  hmotnost paží = 8,1 kg = 81 N
- $F_B$  hmotnost břemene = 10 kg = 100 N
- $\alpha = \text{cca } 20^\circ$



# Ohýbaný prut



# Ohýbaný prut

- Nenulové vnitřní síly

$$M_y = M$$

- Poměrná deformace

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\Delta L(z)}{L} = \frac{z \Delta \varphi_y}{R_y \Delta \varphi_y} = z \kappa_y$$

Ohybová křivost

- Napětí

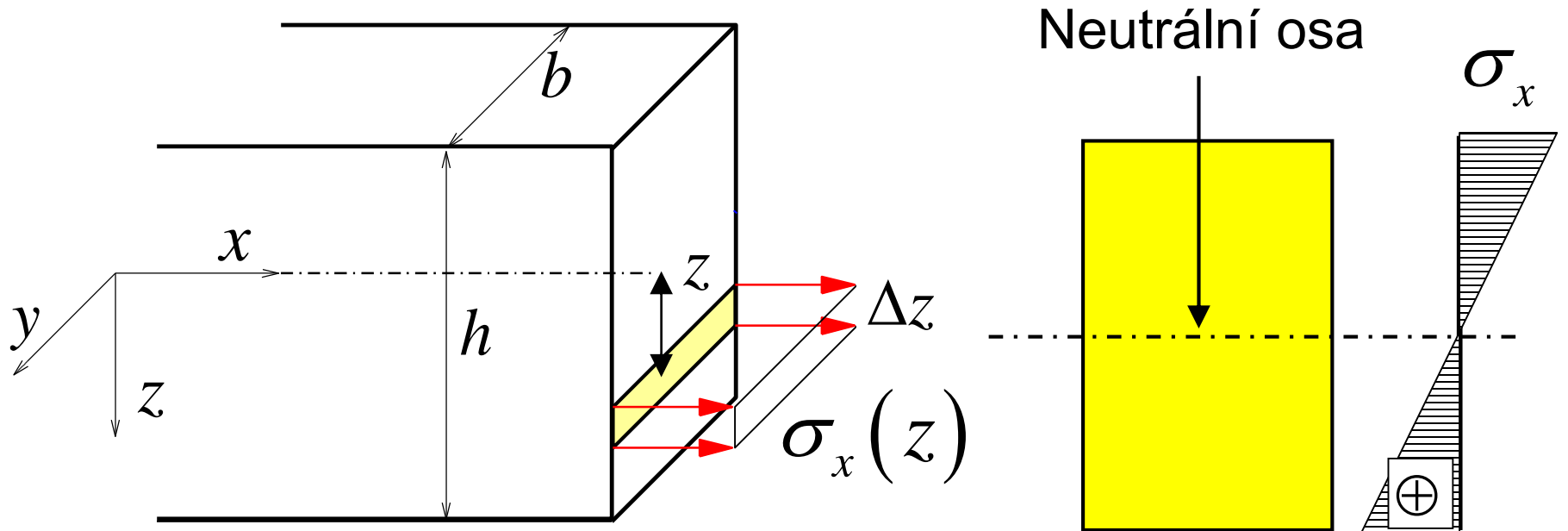
$$\sigma_x(z) = E \varepsilon_x(z) = E \kappa_y z$$

je rozloženo **lineárně** po výšce průřezu

- Jak ale souvisí s působícím momentem?



# Ohýbaný prut



$$\Delta M_y \approx \sigma_x(z) \cdot b \Delta z \cdot z = E \kappa_y z \cdot b \Delta z \cdot z$$

- Výsledný moment

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} E \kappa_y b z^2 dz = E \kappa_y b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = E \kappa_y \frac{1}{12} b h^3$$

# Ohýbaný prut

- Obecněji

$$M_y = E\kappa_y I_y$$

Průřezová  
charakteristika

kde  $I_y$  [m<sup>4</sup>] je **moment setrvačnosti průřezu** k ose  $y$

- Výsledná rovnice pro průběh napětí

$$\sigma_x(z) = E\kappa_y z = E \frac{M_y}{EI_y} z = \frac{M_y}{I_y} z$$

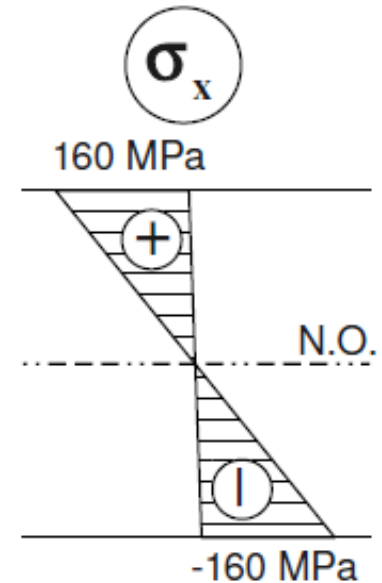
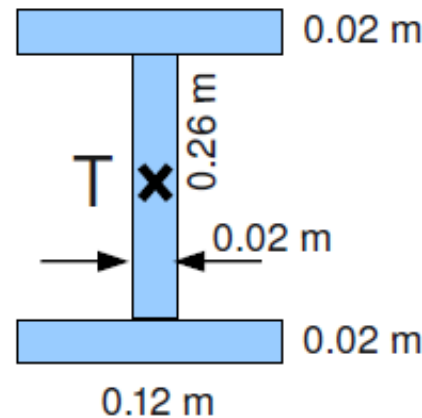
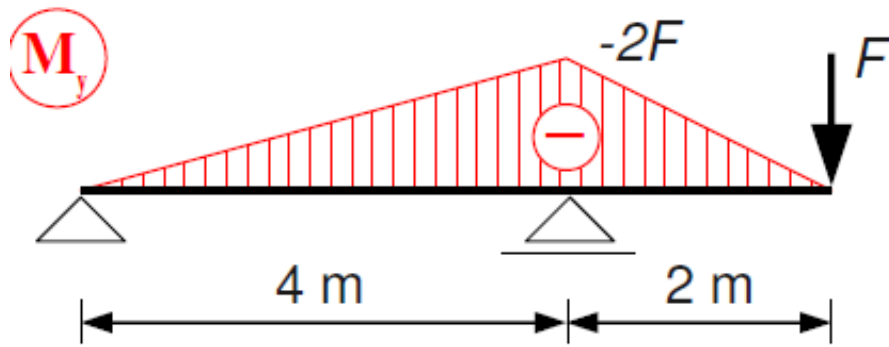
extrémní napětí tedy vznikají pro  $z = \pm h/2$

- Proměnná hodnota ohybového momentu  $M_y(x)$

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

# Příklad: Maximální napětí

- Jak velká síla  $F$  může namáhat nosník, aby největší napětí nepřestoupilo  $f_y = 160$  MPa?



$$\max M_y = -2F$$

$$I_y = 1.235 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{2F}{I_y} z$$

$$|\sigma_x^{\max}| = |\sigma_x(\pm 0,15 \text{ m})| = f_y$$

$$\Rightarrow F^{\max} = \frac{160 \cdot 10^6 \times 1,235 \cdot 10^{-4}}{2 \times 0,15} \text{ N} = 65,88 \text{ kN}$$

# Některá zobecnění

- Ohyb okolo osy  $z$

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} y$$

kde  $I_z$  [m<sup>4</sup>] je moment setrvačnosti průřezu k ose  $z$ , pro obdélník

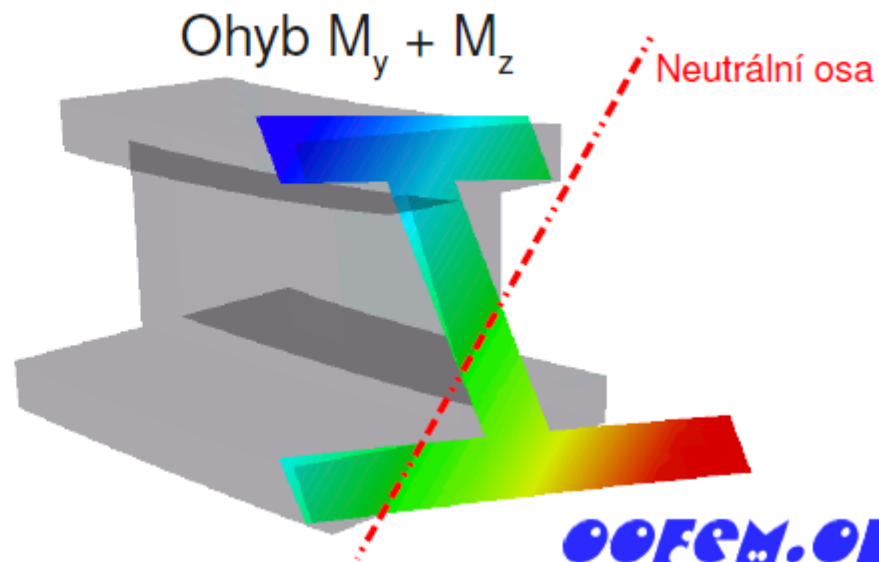
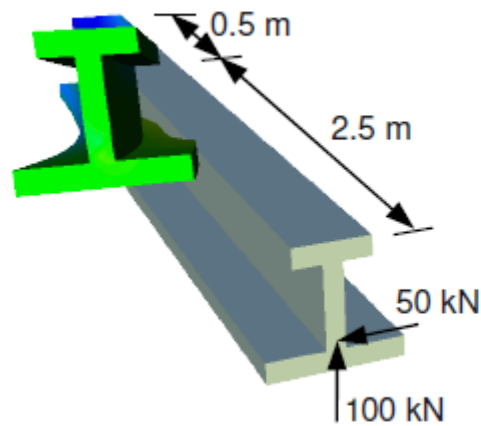
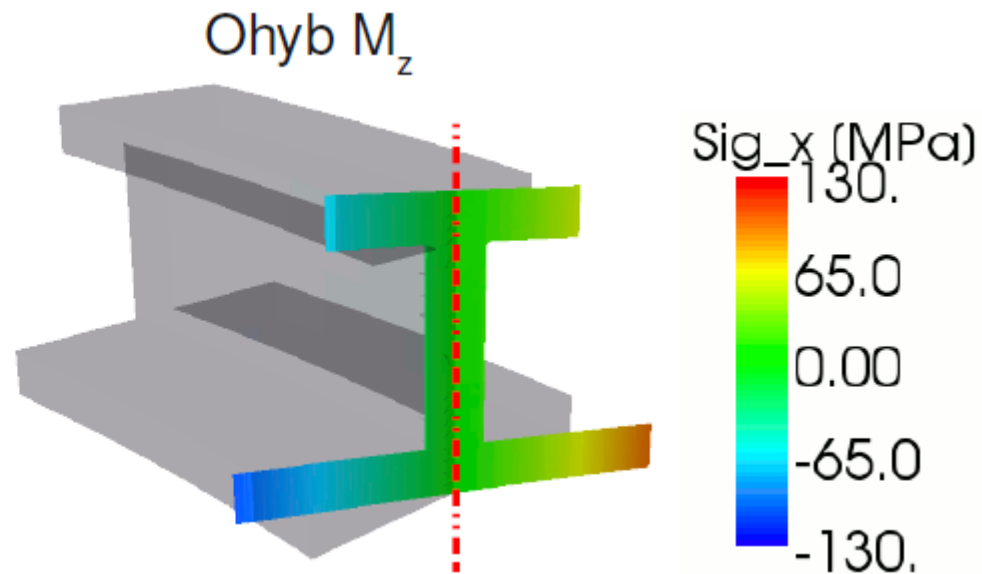
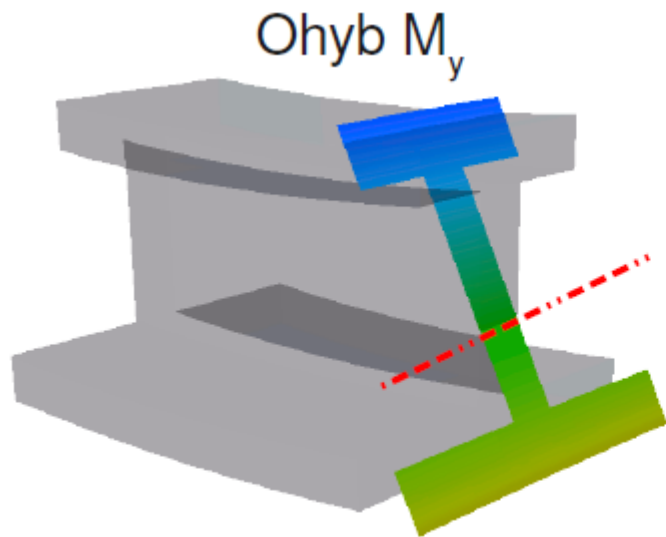
$$I_z = \frac{1}{12} b^3 h$$

- **Obecný vztah pro „obdélníkový“ průřez**

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N_x(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

na úrovni průřezu ( $x$ =konst) je tedy napětí **afinní** funkcí proměnných  $y$  a  $z$

# Některá zobecnění



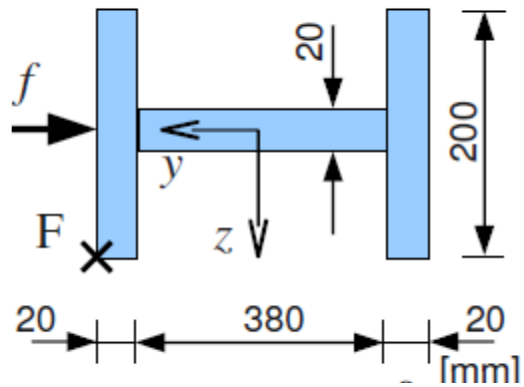
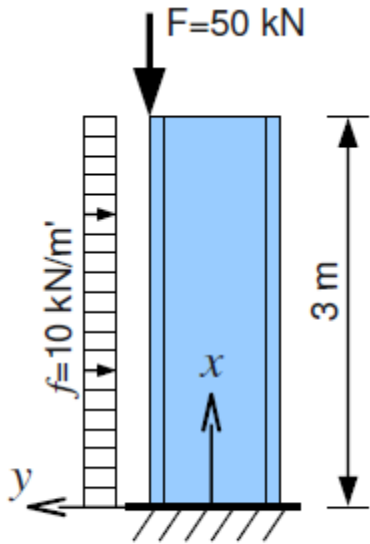
# Některá zobecnění

- Průběh napětí nad průřezem je reprezentován rovinou
- Stopa roviny odpovídá **neutrální ose**

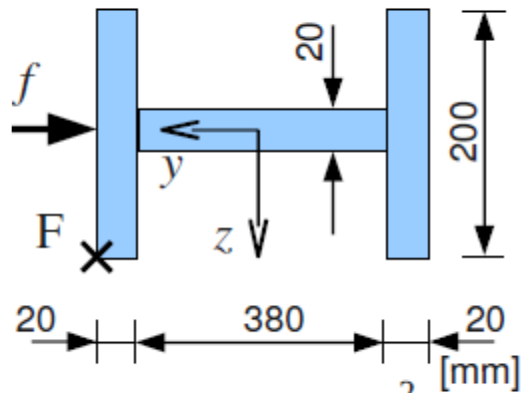
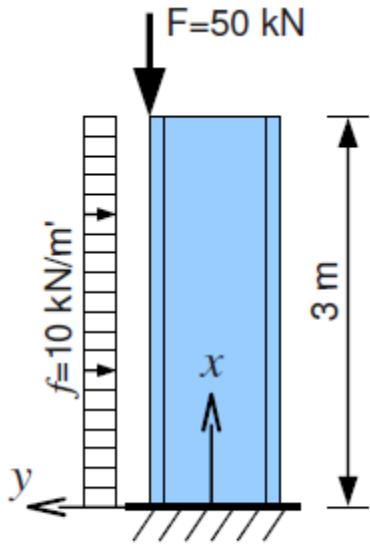
$$0 = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

- Na všech přímkách rovnoběžných s neutrální osou je hodnota napětí **konstantní**
- Největší/nejmenší hodnota napětí vzniká v bodu (nebo bodech) které leží
  - nejdále od neutrální osy
  - na hranici průřezu
- Průběh napětí tady stačí vynést **kolmo** na neutrální osu

# Příklad



# Příklad



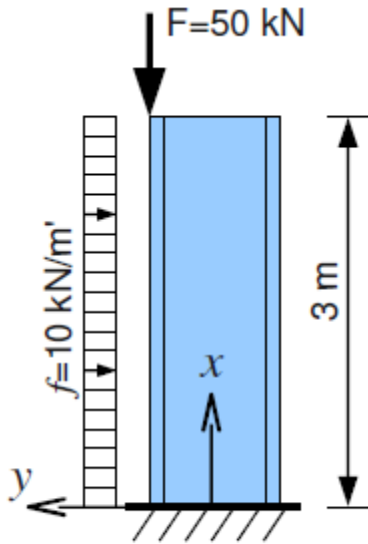
$$A = 1.56e - 2 \text{ m}^2$$

$$I_y = 2.692e - 5 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.1172e - 4 \text{ m}^4$$



# Příklad

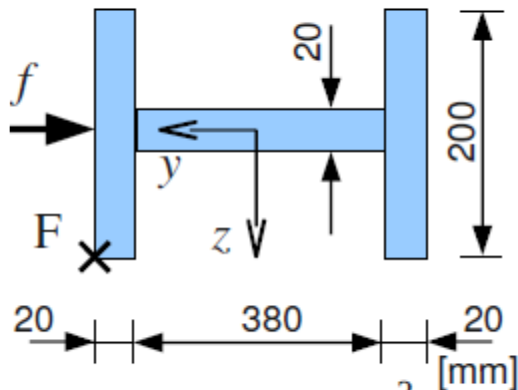


$$N_x = -50 \text{ kN}$$

$$M_y = -50 \cdot 0.1 = -5 \text{ kNm}$$

$$M_z = 50 \cdot 0.21 - 10 \cdot 3^2 / 2 = -34.5 \text{ kNm}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{-0.05}{1.56e-2} + \frac{-0.005}{2.692e-5} z - \frac{-0.0345}{4.1172e-4} y$$

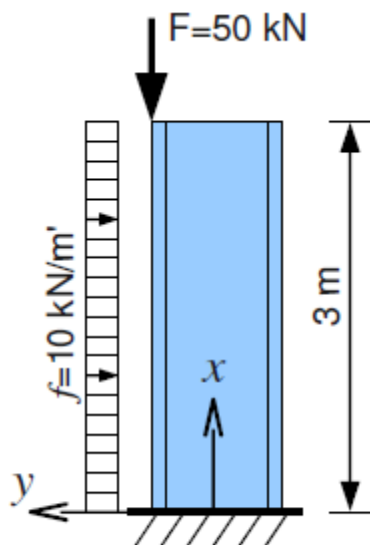


$$A = 1.56e-2 \text{ m}^2$$

$$I_y = 2.692e-5 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.1172e-4 \text{ m}^4$$

# Příklad



$$N_x = -50 \text{ kN}$$

$$M_y = -50 \cdot 0.1 = -5 \text{ kNm}$$

$$M_z = 50 \cdot 0.21 - 10 \cdot 3^2 / 2 = -34.5 \text{ kNm}$$

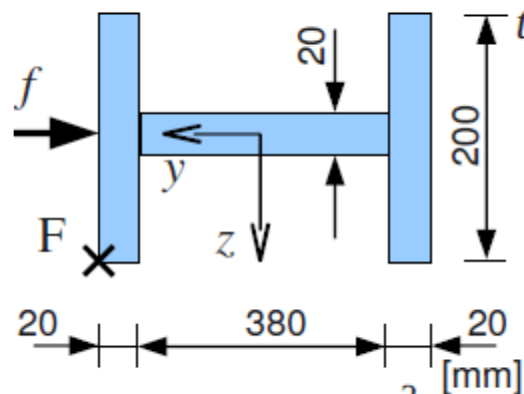
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{-0.05}{1.56e-2} + \frac{-0.005}{2.692e-5} z - \frac{-0.0345}{4.1172e-4} y$$

$$= -3.205 - 185.7z + 83.8y$$

$$z=0, 0 = -3.205 + 83.8y_N, y_N = 38 \text{ mm}$$

$$y=0, 0 = -3.205 - 185.7z_N, z_N = -17 \text{ mm}$$

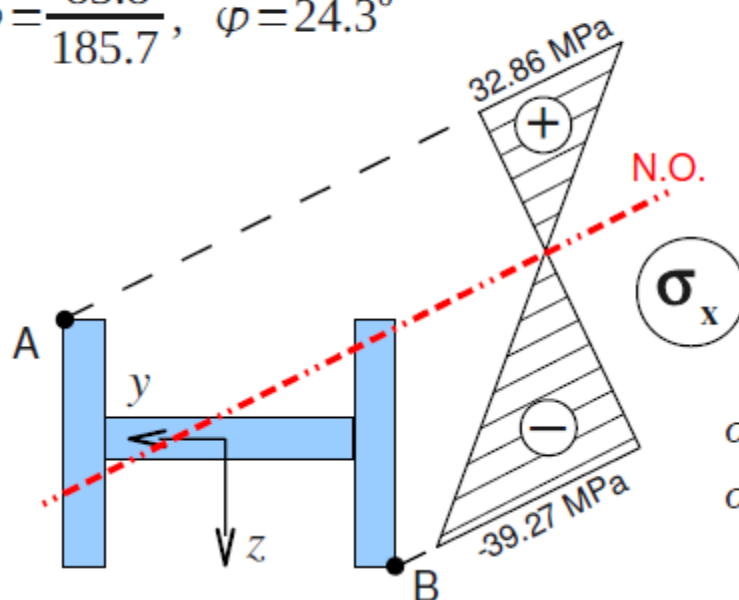
$$\tan \varphi = \frac{83.8}{185.7}, \varphi = 24.3^\circ$$



$$A = 1.56e-2 \text{ m}^2$$

$$I_y = 2.692e-5 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.1172e-4 \text{ m}^4$$



$$\sigma_x^{A[0.21,-0.1]} = 32.86 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_x^{B[-0.21,0.1]} = -39.27 \text{ [MPa]}$$

# Shrnutí

- Obecná rovnice pro průběh napětí

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N_x(x)}{A} + \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

- Otevřené otázky
  - Jaké jsou podmínky na **volbu souřadného systému**  $(x, y, z)$
  - Lze tuto rovnici formulovat i pro **obecné průřezy**?

*Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu  
Stavební mechanika R1 pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze.  
Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes  
veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.*

*Při přípravě této přednášky byla použita řada materiálů laskavě  
poskytnutých Janem Zemanem, Milanem Jiráskem, Vítem Šmilauerem a  
Alešem Jírou Stavební fakulty ČVUT v Praze.*

*Pokud v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho  
vylepšení, ozvěte se prosím na [tesarek@fsv.cvut.cz](mailto:tesarek@fsv.cvut.cz)*

*Datum poslední revize: 09.12.2020*