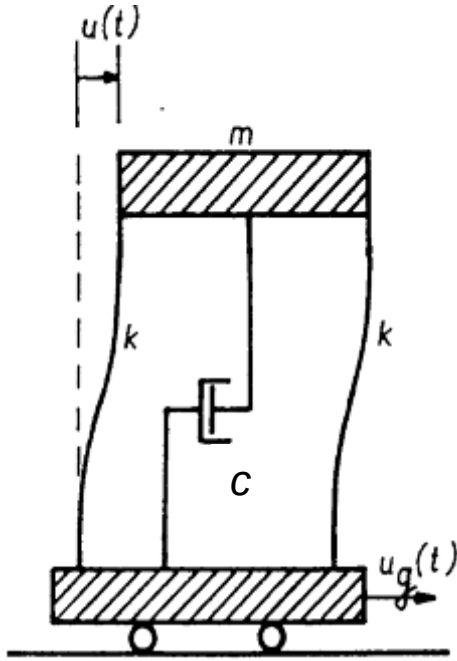


II. Výpočet odezvy na seismické zatížení

- 1. Výpočet seismické odezvy**
- 2. Spektrum odezvy**
- 3. Modální analýza pomocí spektra odezvy**
- 4. Metoda výpočtu pomocí příčných sil**
- 5. Duktilita konstrukcí**
- 6. Přímá integrace pohybových rovnic**

1. Výpočet seizmické odezvy



Soustava s 1 SV

$$u_t = u + u_g \rightarrow \ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g \leftarrow \text{akcelerogram}$$

$$m\ddot{u}_t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

Soustava s n SV

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}^s\ddot{u}_g(t)$$

směrový vektor – (složený z 0 a 1)
určuje směr zatížení zemětřesením

Řešení:

- přímá integrace (akcelerogram)
- modální analýza pomocí spektra odezvy (n SV)

1. Výpočet seizmické odezvy

Soustava s 1 SV – pohybová rovnice pro seizmické zatížení

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$



$$c = \xi c_{cr} = \xi 2\sqrt{km} = 2m\xi\omega_n \quad (\text{souč. útlumu})$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{vlastní kruhová frekvence})$$

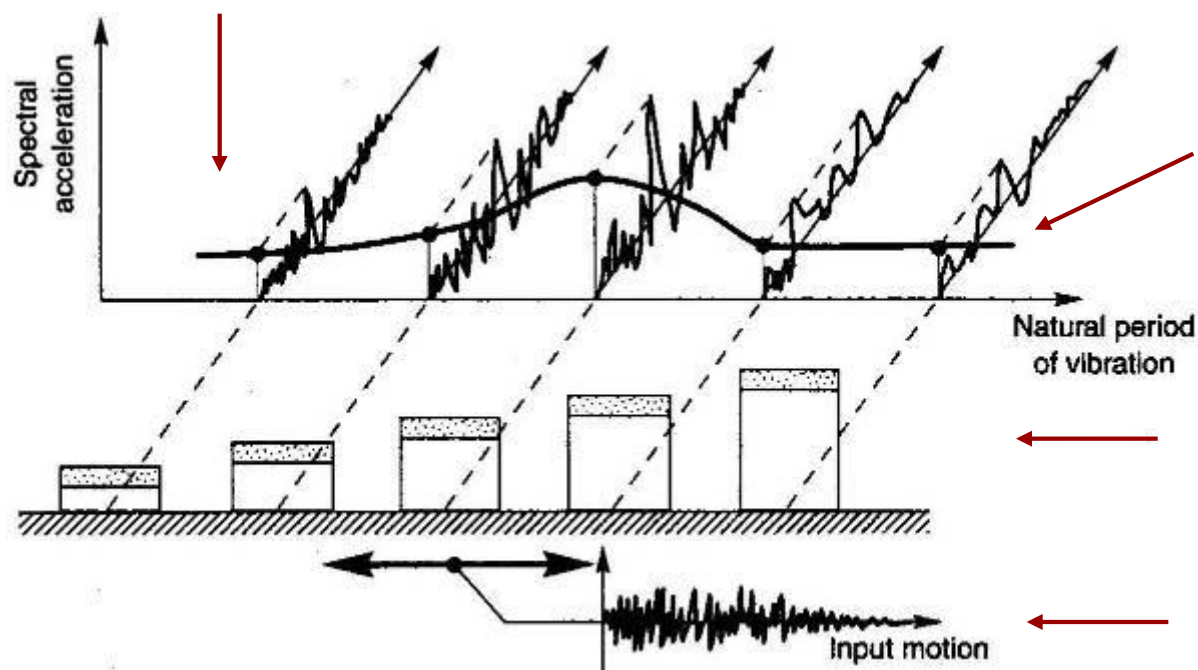
$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad \longrightarrow \quad u = u(t, \omega_n, \xi) = u(t, T_n, \xi)$$

Řešení:

- přímá integrace (např. Newmarkova metoda)
- Duhamelův integrál

2. Spektrum odezvy

Spektrum odezvy – response spectrum



maximální výchylka
vs. vlastní frekvence
(vlastní perioda)

výpočet soustav s 1 SV

vstupní akcelerogram

odezva soust. s 1 SV

$u = u(t, T_n, \xi)$ →

$$S_d(T_n, \xi) = \max_t |u(t, T_n, \xi)|$$

$$S_v(T_n, \xi) = \max_t |\dot{u}(t, T_n, \xi)|$$

$$S_a(T_n, \xi) = \max_t |\ddot{u}_t(t, T_n, \xi)|$$

$$(\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g)$$

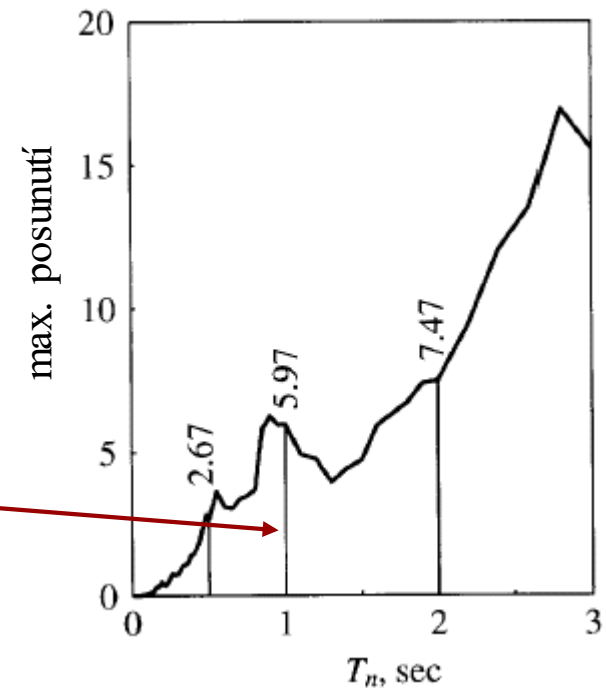
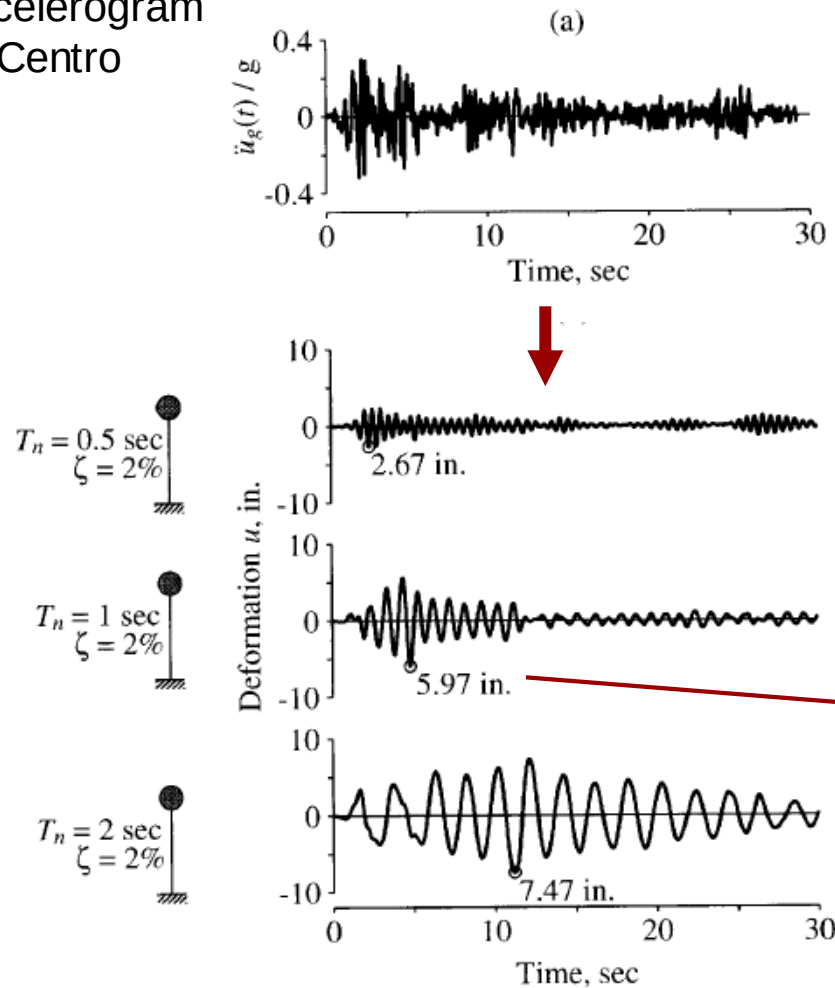
spektrum odezvy S_d

d - posunutí
 v - rychlost
 a - zrychlení

2. Spektrum odezvy

akcelerogram
El Centro

(Imperial Valley, California
May 18, 1940 N-S component)



spektrum odezvy (posunutí)
pro útlum 2%

odezva 3 soustav s různou vl. periodou a útlumem 2%



2. Spektrum odezvy

Maximální hodnota vnitřní síly – může být určena pomocí S_d

$$f(t) = k u(t) \rightarrow f_{\max} = k u_{\max} = k S_d$$

$$k = m \omega_n^2 \rightarrow f_{\max} = m \omega_n^2 S_d = m S_{a, \text{pseudo}}$$

pseudo-spektrum odezvy zrychlení $S_{a, \text{pseudo}} = \omega_n^2 S_d$

pseudo-spektrum odezvy rychlosti $S_{v, \text{pseudo}} = \omega_n S_d$

pseudo-spektra velmi dobře odpovídají skutečným spektrům:

$$S_d = \max |u(t)|$$

$$S_v = \max |\dot{u}(t)| \approx S_{v, \text{pseudo}} = \omega_n S_d$$

$$S_a = \max |\ddot{u}_t(t)| \approx S_{a, \text{pseudo}} = \omega_n^2 S_d$$

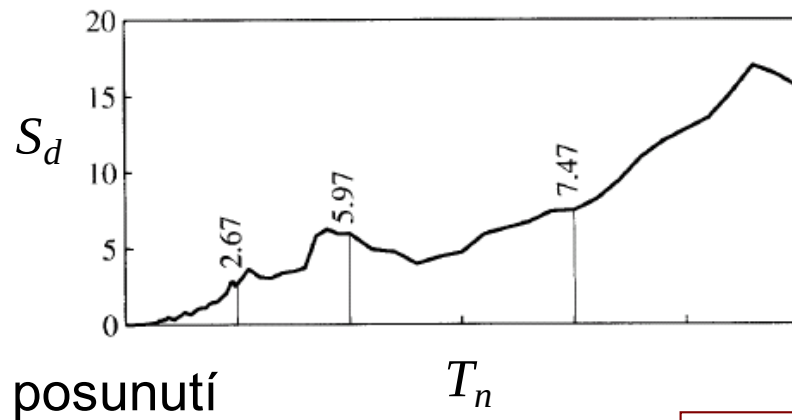
$$S_a = \omega_n S_v = \omega_n^2 S_d$$

v praxi se používají pseudo-spektra,
ale označení „pseudo“ se neužívá

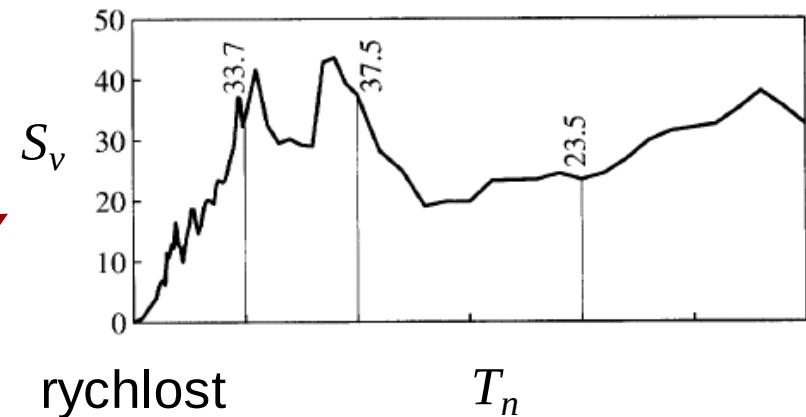


2. Spektrum odezvy

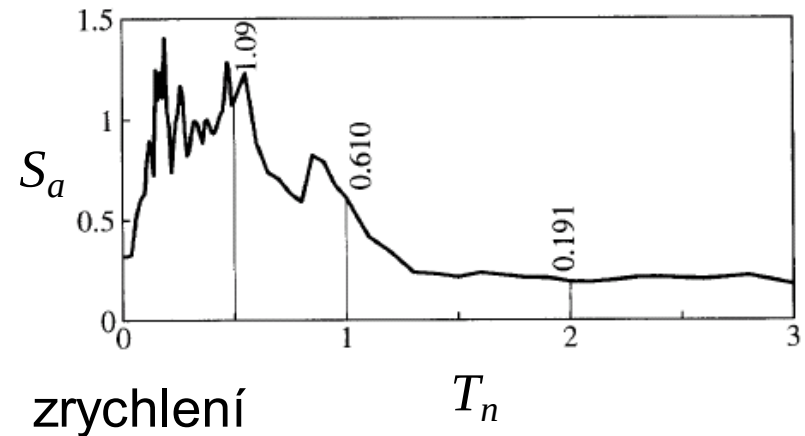
zemětřesení El Centro
(útlum 2%)



$$S_v = \omega_n S_d$$



$$S_a = \omega_n^2 S_d$$



reálné spektrum

pseudo - spektra

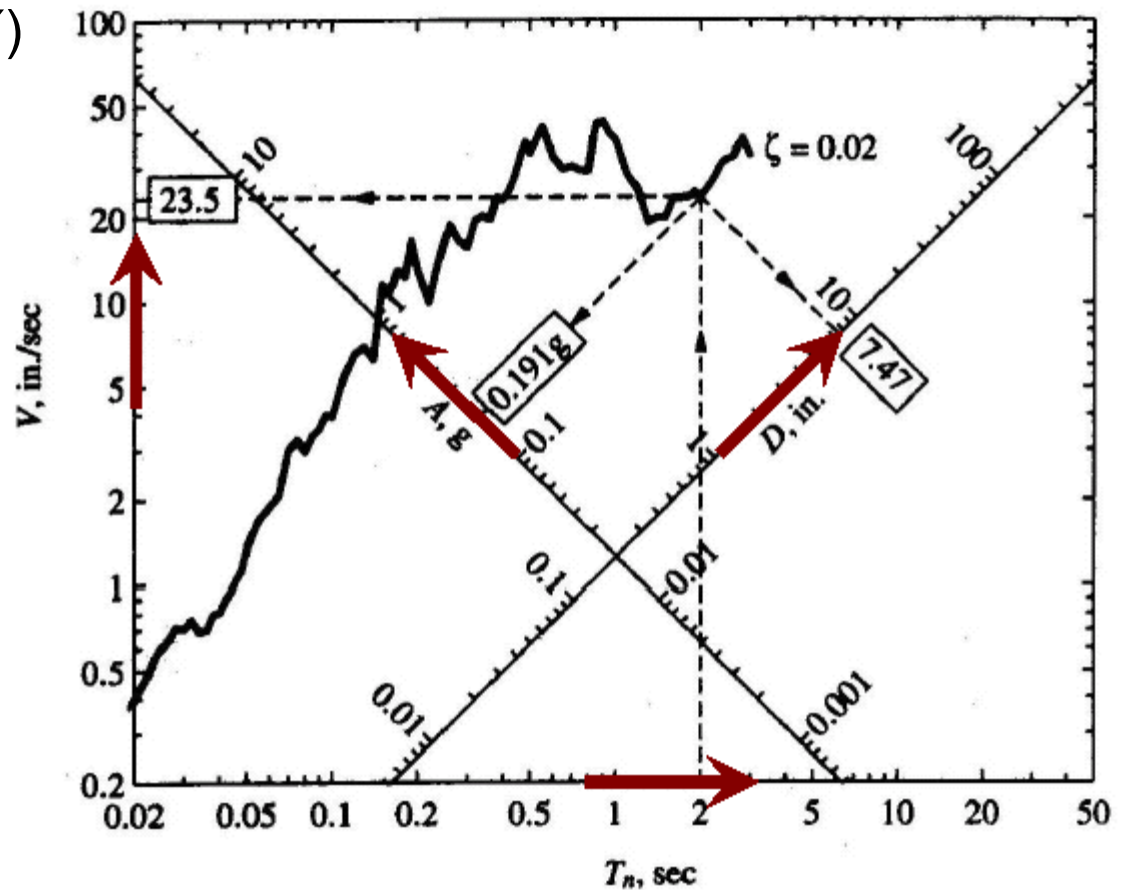


2. Spektrum odezvy

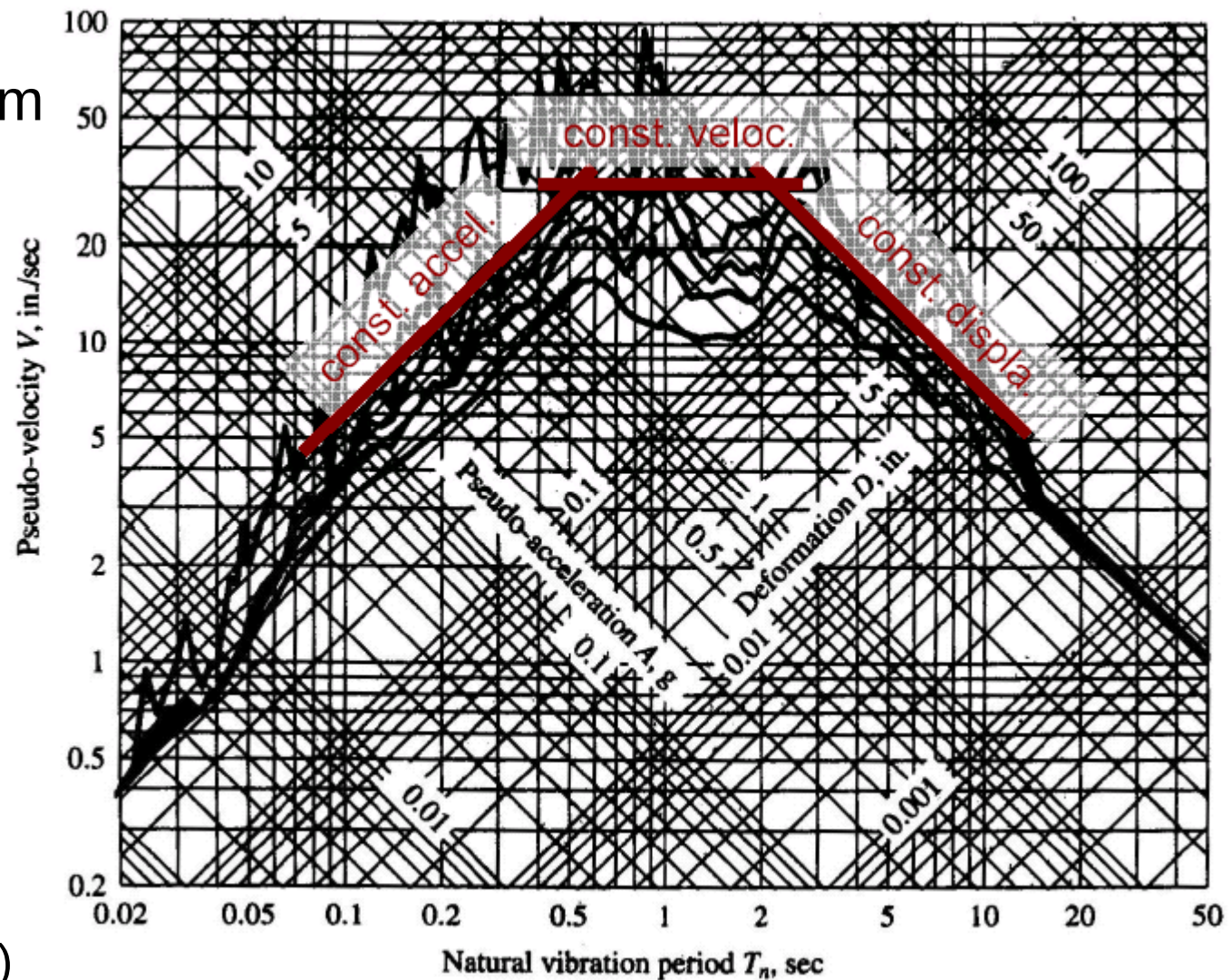
Kombinované D-V-A spektrum

D – displacement (posunutí)
 V – velocity (rychlost)
 A – acceleration (zrychlení)

zemětřesení El Centro
 (útlum 2%)



2. Spektrum odezvy

Kombinované
D-V-A spektrum

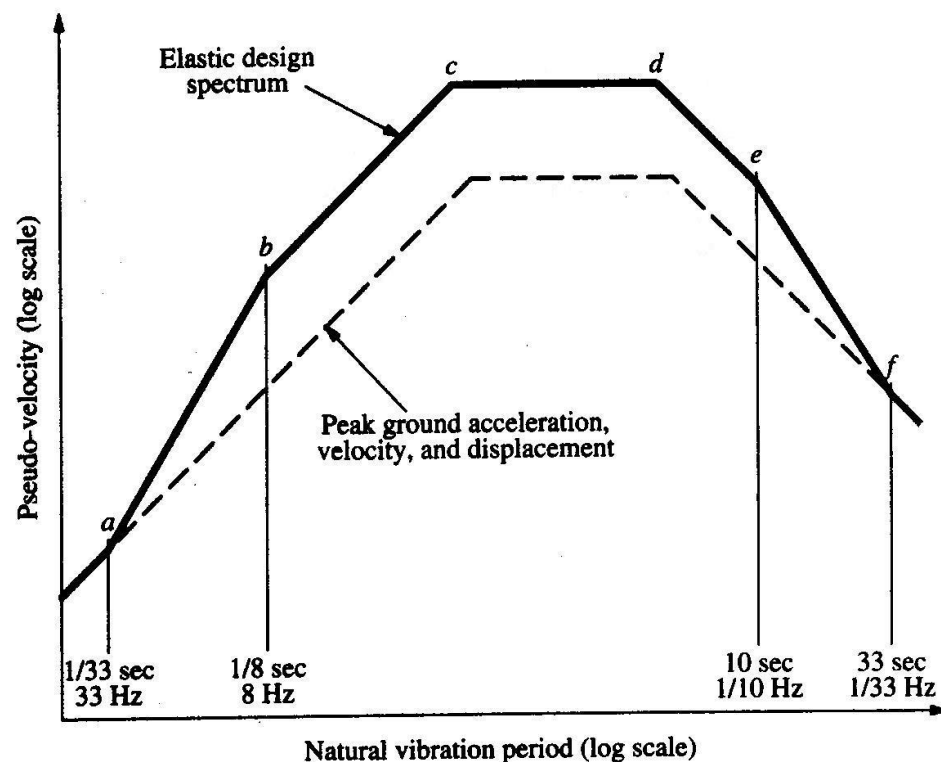
zemětřesení
El Centro
(útlum
0, 2, 5, 10, 20 %)



2. Spektrum odezvy

Návrhové spektrum

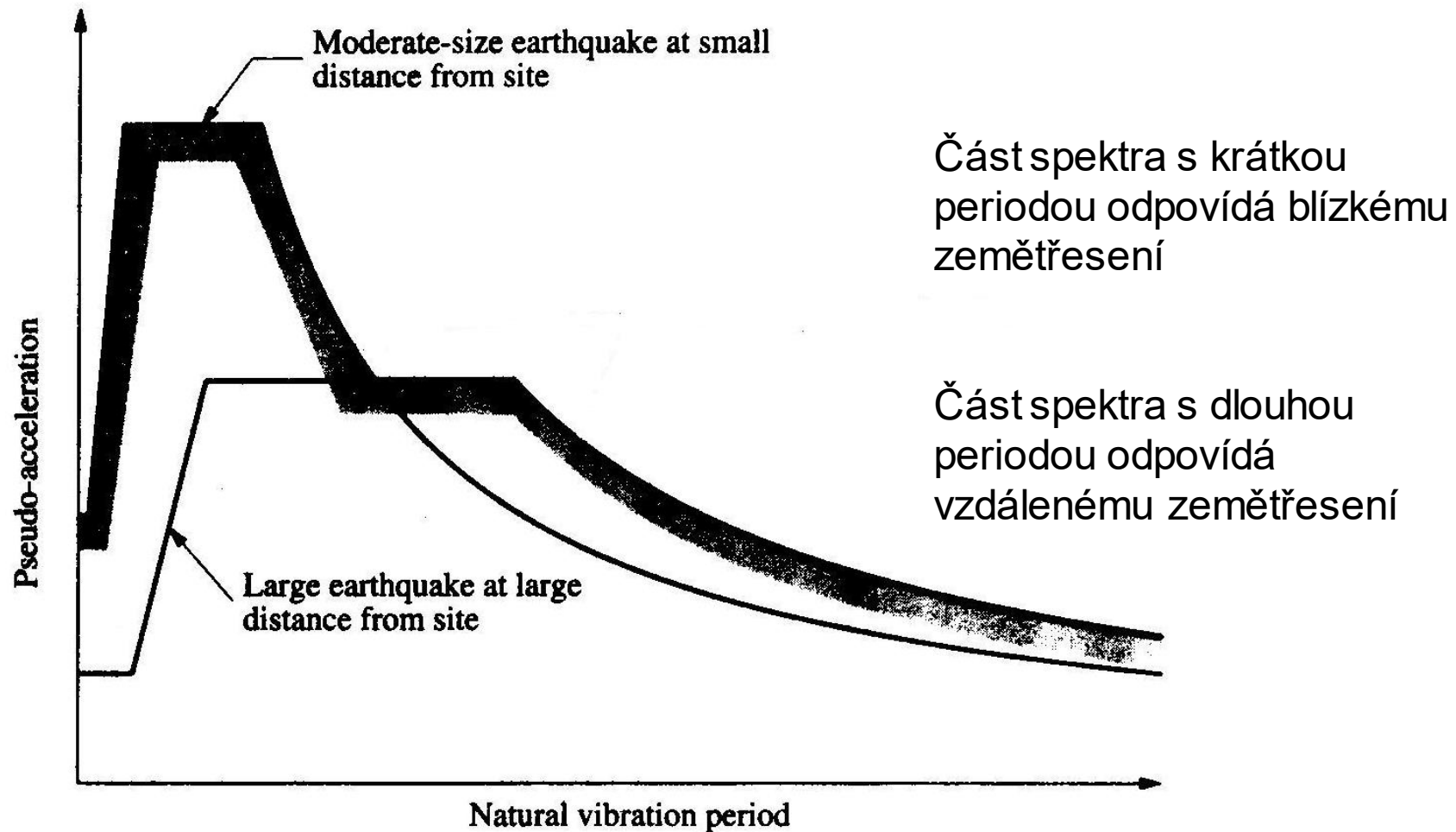
- je používáno pro návrhové účely – konstrukce (nové i existující) musí odolat všem **předpokládaným budoucím zemětřesením**
- skládá se ze soustavy **přímek a hladkých křivek**, pro danou úroveň útlumu
- stanovení návrhového spektra je založeno na **pravděpodobnostní seizmické rizikové analýze**



Příklad návrhového spektra

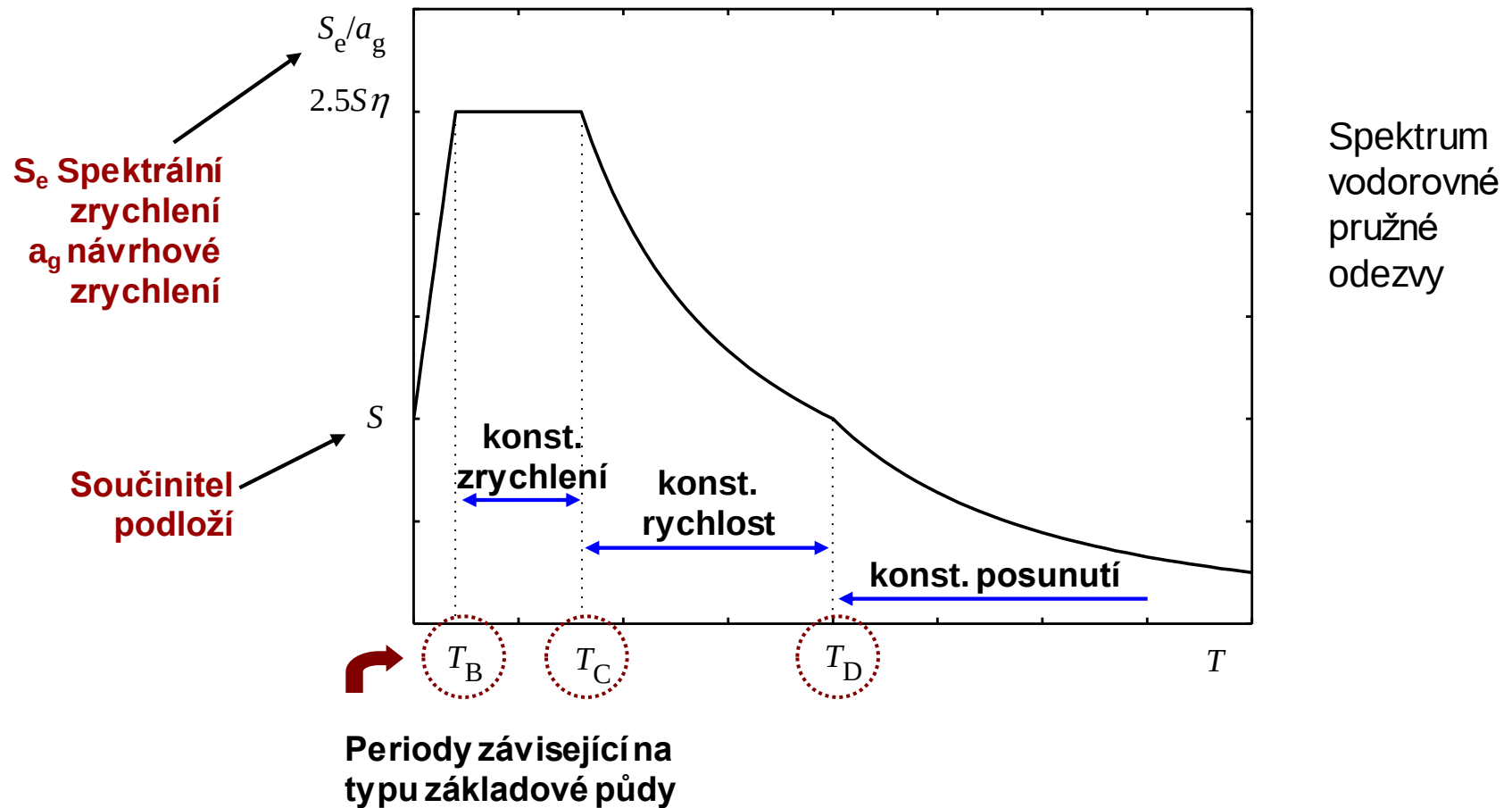
2. Spektrum odezvy

Návrhové spektrum



2. Spektrum odezvy

Spektrum pružné odezvy - EC8



2. Spektrum odezvy

Spektrum pružné odezvy - EC8

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 0 \leq T \leq T_B \longrightarrow S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2.5 - 1) \right] & \text{(přímka)} \\
 T_B \leq T \leq T_C \longrightarrow S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 & \text{(přímka)} \\
 T_C \leq T \leq T_D \longrightarrow S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right] & \text{(křivka } 1/x) \\
 T_D \leq T \leq 4 \text{ s} \longrightarrow S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2.5 \cdot \left[\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right] & \text{(křivka } 1/x^2)
 \end{array} \right.$$

$$\eta = \max \left\{ \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}}; 0.55 \right\} \longrightarrow \text{pro } \xi = 5\% , \eta = 1$$

korekční součinitel útlumu

2. Spektrum odezvy

Návrhové spektrum - EC8

- Většinou není ekonomické navrhovat konstrukce na (velké) seizmické zatížení za předpokladu pružného chování – akceptuje se **omezené poškození**
- Konstrukce mají kapacitu odolávat seizmickému zatížení v **pružně-plastickém stavu** (schopnost konstrukcí disipovat energii).
- Tato disipační schopnost (kapacita) konstrukce umožňuje provádět návrh na **seizmické síly, které jsou nižší než síly odpovídající lineárně pružnému chování konstrukce**.
- Místo nelineární analýzy konstrukce je možné provádět elastickou analýzu založenou na redukovaném spektru pružné odezvy – **návrhové spektrum**.
- Redukce se provádí pomocí tzv. **součinitele duktility q** (*behaviour factor*)

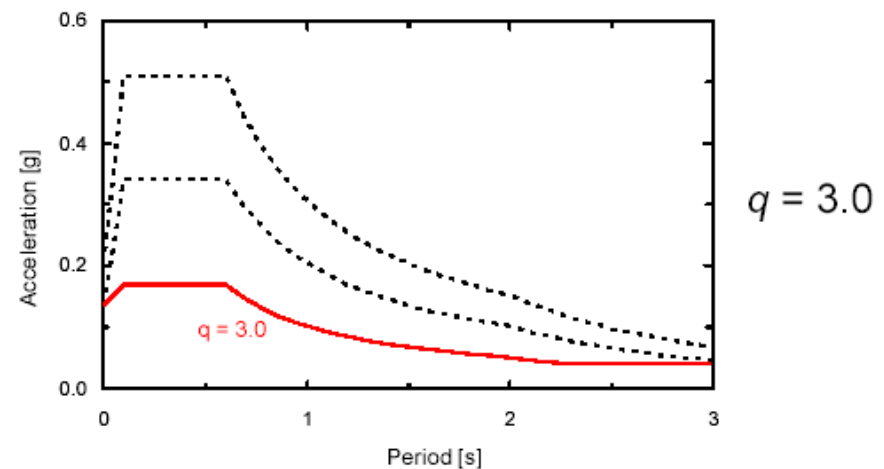
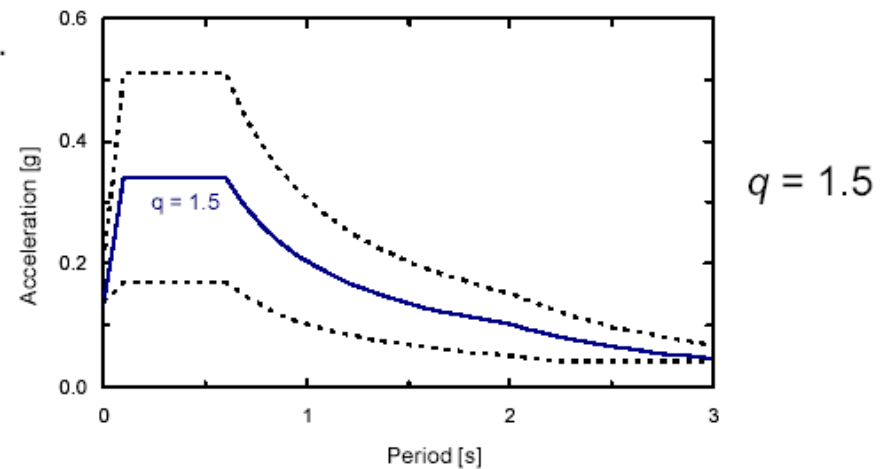
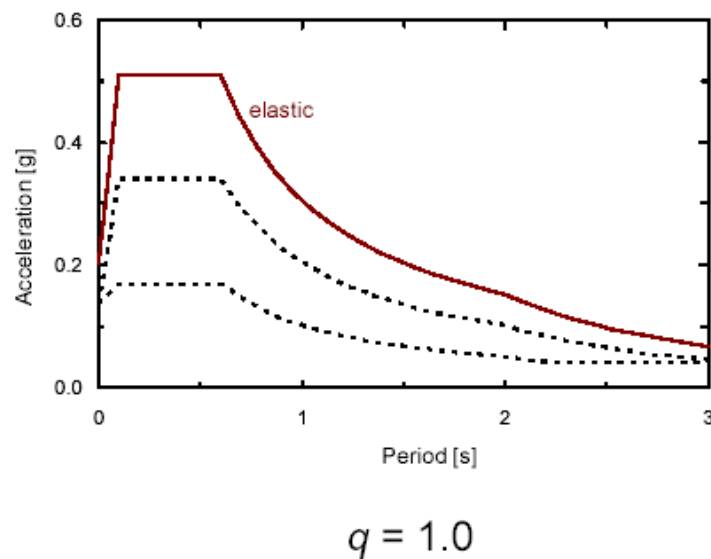
$$q = \frac{\text{elastické seizmické síly}}{\text{nelineární seizmické síly}}$$



2. Spektrum odezvy

Návrhové spektrum - EC8

- Design spectrum as a function of q ...



3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

pohybová rovnice pro 1 SV

$$ku(t) + c\dot{u}(t) + m\ddot{u}(t) = ku(t) + 2\xi\sqrt{km}\dot{u}(t) + m\ddot{u}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$\omega_n^2 u(t) + 2\xi\omega_n \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{u_{\max} = S_d}$$

vlastní tvar kmitání

modální souřadnice

modální rovnice

– klasický útlum + normované vlastní tvary

$$\omega_j^2 q_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \ddot{q}_j(t) = \phi_j^T \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j q_j(t)$$

$$\omega_j^2 q_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \ddot{q}_j(t) = -\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s \ddot{u}_g(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{q_{j,\max} = \phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s S_d}$$

$$q_{j,\max} = \phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s S_d \quad \longleftarrow \quad \text{spektrum odezvy posunutí}$$

nebo:

$$q_{j,\max} = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s}{\omega_j^2} S_a \quad \longleftarrow \quad \text{spektrum odezvy zrychlení}$$



3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

Modální analýza pomocí spektra odezvy – postup řešení

1. konstrukce se řeší rozkladem do vlastních tvarů
maximum odezvy libovolné veličiny $R_{j,\max}$ (průhybu, vnitřní síly),
které přísluší j -tému tvaru ϕ_j , se určí

$$R_{j,\max} = q_{j,\max} R_j$$

$$q_{j,\max} = \phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s S_d$$

nebo

$$q_{j,\max} = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s}{\omega_j^2} S_a$$

R_j je hodnota veličiny R , odpovídající kmitání v j -tém tvaru
(např. pořadnice vlast. tvaru, setrvačná síla apod.)

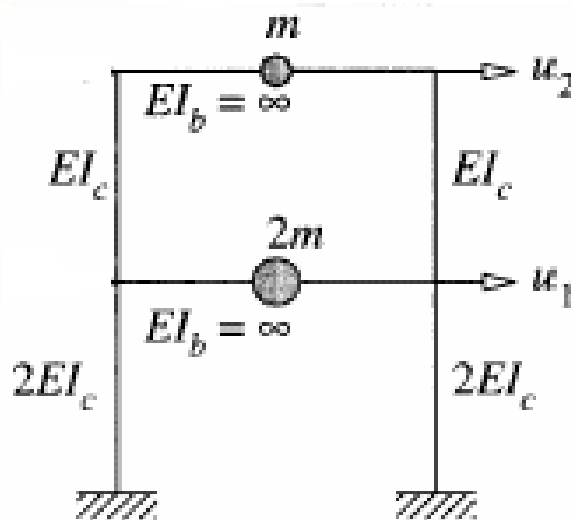
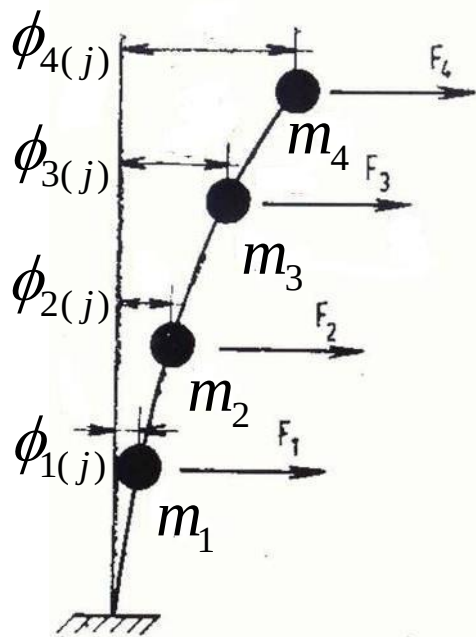
2. celkové maximum odezvy $R_{\max}$ se určí např. metodou SRSS

$$R_{\max} = \sqrt{\sum_j R_{j,\max}^2}$$



3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

Modální analýza pomocí spektra odezvy – konstrukce s diagonální maticí hmotnosti



m_i hmotnost bodu i

$\phi_{i(j)}$ pořadnice j – tého
vlastního tvaru v bodě i

$$q_{j,\max} = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s}{\omega_j^2} S_a = \frac{\sum_i m_i \phi_{i(j)}}{\omega_j^2} S_a$$

pro normované tvary

$$q_{j,\max} = \frac{\sum_i m_i \phi_{i(j)}}{\omega_j^2 \sum_i m_i \phi_{i(j)}^2} S_a$$

pro obecné tvary

3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

Modální analýza pomocí spektra odezvy – konstrukce s diagonální maticí hmotnosti

výpočet maximální hodnoty posunutí v bodě k
(odpovídající j -tému tvaru kmitání)

$$u_{k(j)} = \phi_{k(j)} q_{j,\max} = \frac{\phi_{k(j)} \sum_i m_i \phi_{i(j)}}{\omega_j^2 \sum_i m_i \phi_{i(j)}^2} S_a = \frac{\phi_{k(j)} \sum_i m_i \phi_{i(j)}}{\sum_i m_i \phi_{i(j)}^2} S_d \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{spektrum} \\ \text{odezvy} \\ \text{posunutí} \end{array}$$

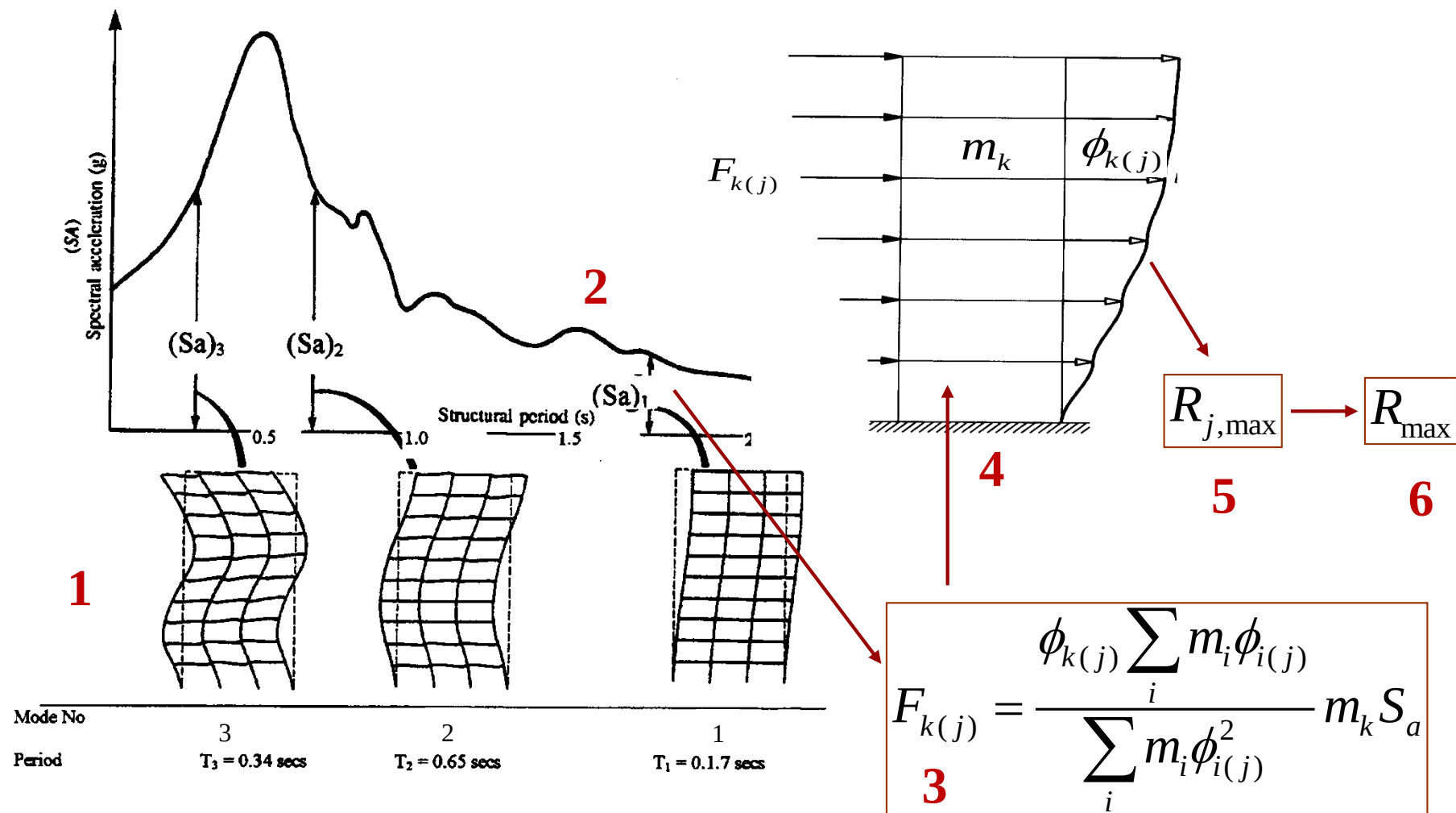
výpočet maximální hodnoty zatížení v bodě k
(odpovídající j -tému tvaru kmitání)

$$F_{k(j)} = \underbrace{m_k \omega_j^2 \phi_{k(j)}}_{\text{setrvačné síly}} q_{j,\max} = \frac{\phi_{k(j)} \sum_i m_i \phi_{i(j)}}{\sum_i m_i \phi_{i(j)}^2} m_k S_a \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{spektrum} \\ \text{odezvy} \\ \text{zrychlení} \end{array}$$



3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

Modální analýza pomocí spektra odezvy



3. Modální analýza pomocí spektra odezvy

Efektivní modální hmota

Počet uvažovaných vlastních tvarů při výpočtu odezvy závisí na tzv. **efektivní modální hmotě** $M_{(j)}^{eff}$

$$M_{(j)}^{eff} = \frac{(\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s)^2}{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j}$$

uvažují-li všechny tvary, je $\sum M_{(j)}^{eff}$ rovno celkové hmotnosti doporučuje se uvažovat takový počet vlastních tvarů, aby $\sum M_{(j)}^{eff}$ bylo min. 90% celkové hmotnosti soustavy (EC 8)

pro konstrukce
s diagonální maticí hmotnosti

$$M_{(j)}^{eff} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i(j)} \right)^2}{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{i(j)}^2}$$



4. Metoda výpočtu pomocí příčných sil

Statická metoda pro budovy se 2 rovinami souměrnosti

Předpoklady:

- seismické zatížení se modeluje jako horizontální statické zatížení působící vždy ve směru jedné osy souměrnosti
- rozdělení zatížení po výšce je úměrné hmotnosti patra a výchylce základního vlastního tvaru (případně výšce patra)
- pro stanovení návrhového zrychlení se používá návrhové spektrum z normy (případně modifikované součinitelem duktility)

je nutné znát pouze první vlastní frekvenci (periodu) a odpovídající tvar kmitání
ve zjednodušené variantě stačí pouze provést odhad vlastní periody kmitání



4. Metoda výpočtu pomocí příčných sil

Statická metoda pro budovy se 2 rovinami souměrnosti

Postup:

1. Výpočet první vlastní periody a tvaru kmitání – lze provést odhad základní (první) periody kmitání pomocí přibližných vztahů nebo přibližné metody (např. Rayleighova metoda)

$$T_1 \approx C_t H^{3/4}$$

$C_t = 0,085$ pro ocelové rámy odolávající momentům
= 0,075 pro betonové rámy odolávající momentům
ocelové rámy s excentrickým zavětrováním
= 0,050 všechny ostatní konstrukce

H – výška budovy (v metrech), platí do 40 m výšky

$$T_1 \approx 2\sqrt{d}$$

d – vodorovné posunutí horního patra budovy (v m)
od zatížení vlastní tíhou působící ve směru
základního tvaru kmitání (tj. ve vodor. směru)



4. Metoda výpočtu pomocí příčných sil

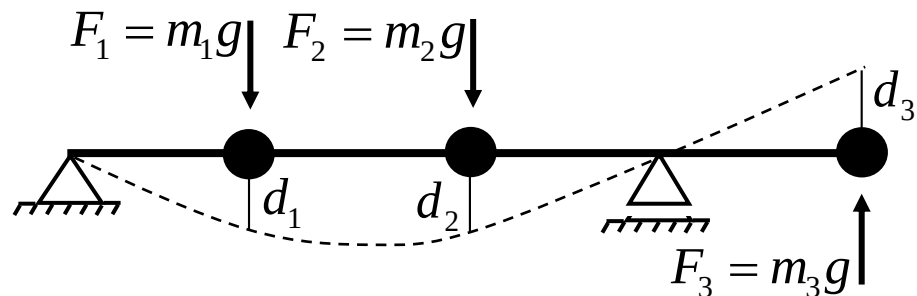
Statická metoda pro budovy se 2 rovinami souměrnosti

$$T_1 \approx 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i m_i d_i^2}{\sum_i F_i d_i}}$$

Rayleighova
metoda

d_i – vodorovné posunutí od zatížení silami $F_i = m_i g$
tj. od vlastní tíhy působící ve směru základního
tvaru kmitání

m_i – hmotnost i – tého patra



2. Pro danou vlastní periodu určit z návrhového spektra
příslušnou hodnotu zrychlení S_a

3. Určit smykovou sílu v základech

$$F_b = S_a \sum_i m_i$$

4. Metoda výpočtu pomocí příčných sil

Statická metoda pro budovy se 2 rovinami souměrnosti

4. Rozdělit vodorovné zatížení po výšce budovy

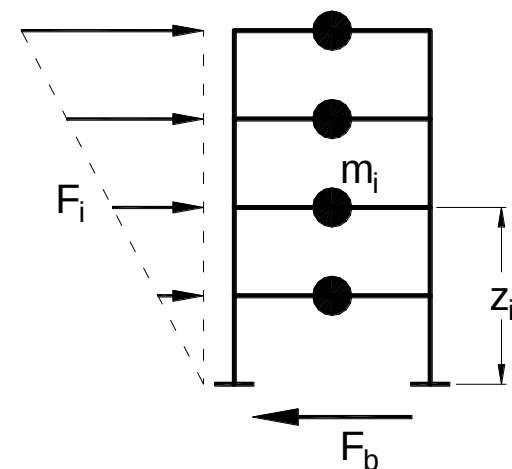
- v závislosti na hmotnosti patra m_j a výchylce základního tvaru kmitání ϕ_j v bodě j

$$F_j = F_b \frac{\phi_j m_j}{\sum_i \phi_i m_i}$$

nebo

$$F_j = F_b \frac{z_j m_j}{\sum_i z_i m_i}$$

(tvar kmitání
jako přímka)

5. Výpočet odezvy (síly, posunutí d_e) pomocí **statické analýzy**

pokud zatížení bylo určeno s použitím **součinitele duktility** q ,
je nutné určit skutečná posunutí

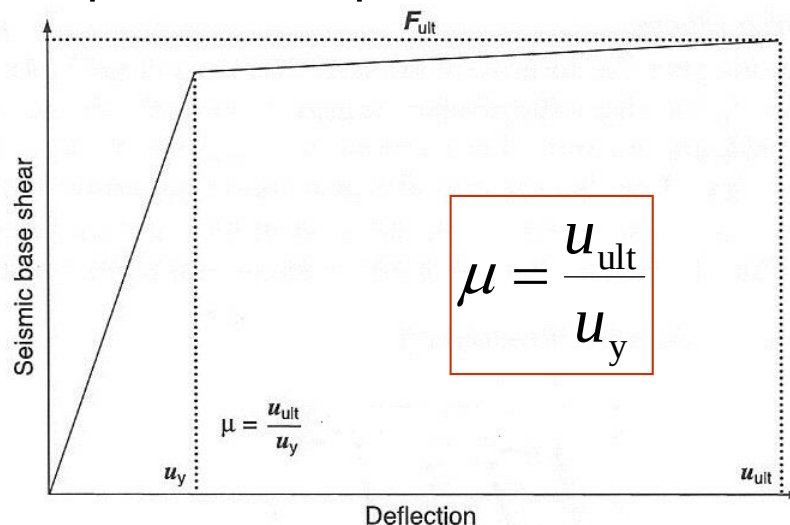
$$d_s = q d_e$$

5. Duktilita konstrukcí

Pro stanovení návrhového spektra je nutné určit **součinitel duktility q** (behaviour factor) – ten závisí zejména na duktilitě

Duktilita – schopnost konstrukce (nebo konstrukčního prvku) odolávat bez výrazné ztráty pevnosti opakovaným cyklům velkých deformací v oblasti nad mezí kluzu - závisí na materiálu, průřezech, prvcích, konstrukci

Duktilita – poměr maximálního posunutí (např. vrcholu budovy) při vzniku kinematického mechanismu u_{ult} k hodnotě posunutí při vzniku prvního plastického kloubu u_y (na mezi kluzu)



Při návrhu je nutné prokázat, že konstrukce má **schopnost** dosahovat takové duktility (vlastnost konstrukce), která je vyšší než **požadavek** na duktilitu konstrukce při zemětřesení (závisí na konstrukci a zemětřesení)

5. Duktilita konstrukcí

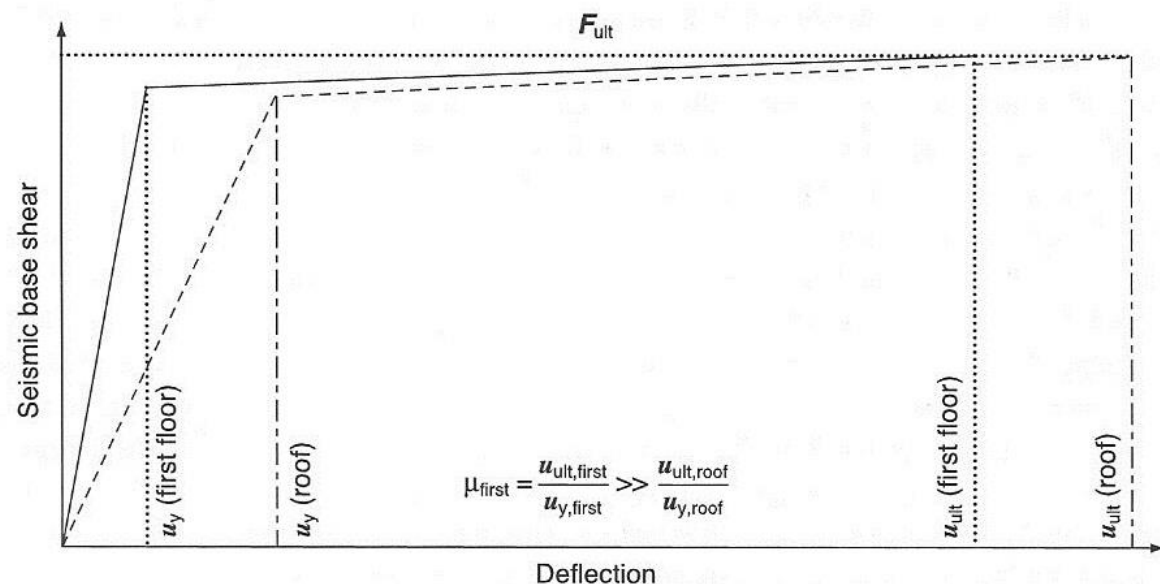
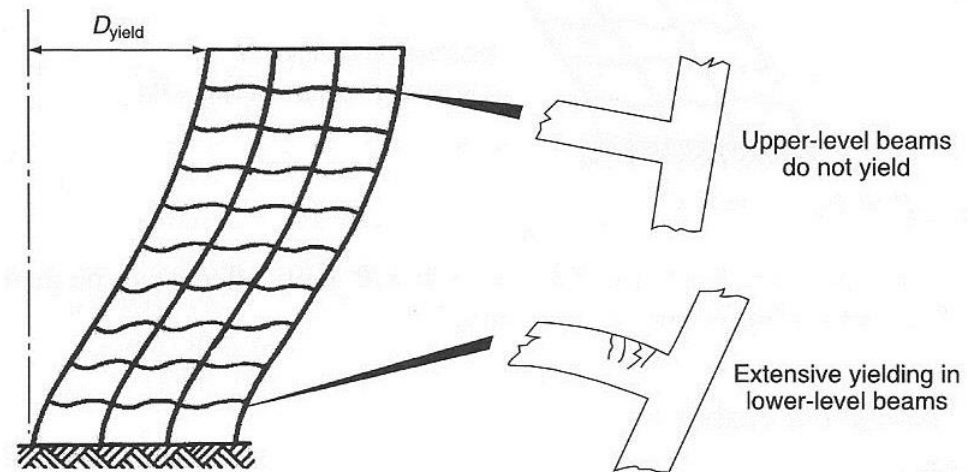
Duktilita globální – poměr posunutí vrcholu budovy

Duktilita lokální – poměr maximální **křivosti** v průřezu prutu ke křivosti při začátku tečení výztuže

- je několikrát větší (tečení výztuže předchází vzniku plast. kloubu)

Duktilita nabývá rozdílných hodnot v rámci jedné konstrukce

$$\mu_{\text{first floor}} \quad \square \quad \mu_{\text{roof}}$$



5. Duktilita konstrukcí

Součinitel duktility

$$q = q_0 \frac{\alpha_u}{\alpha_1}$$

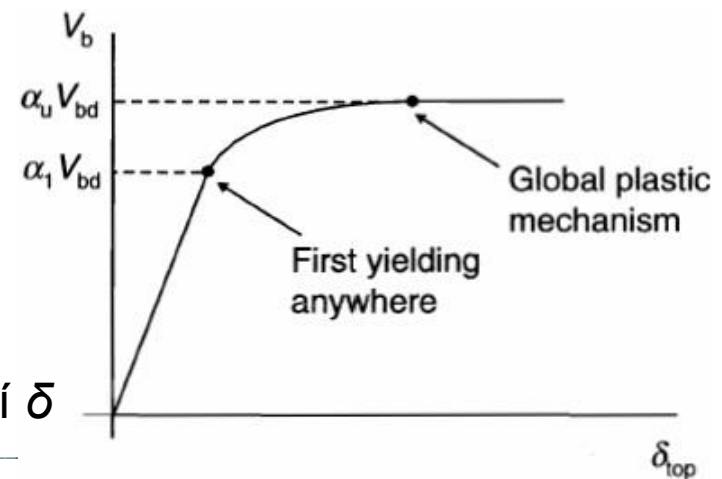
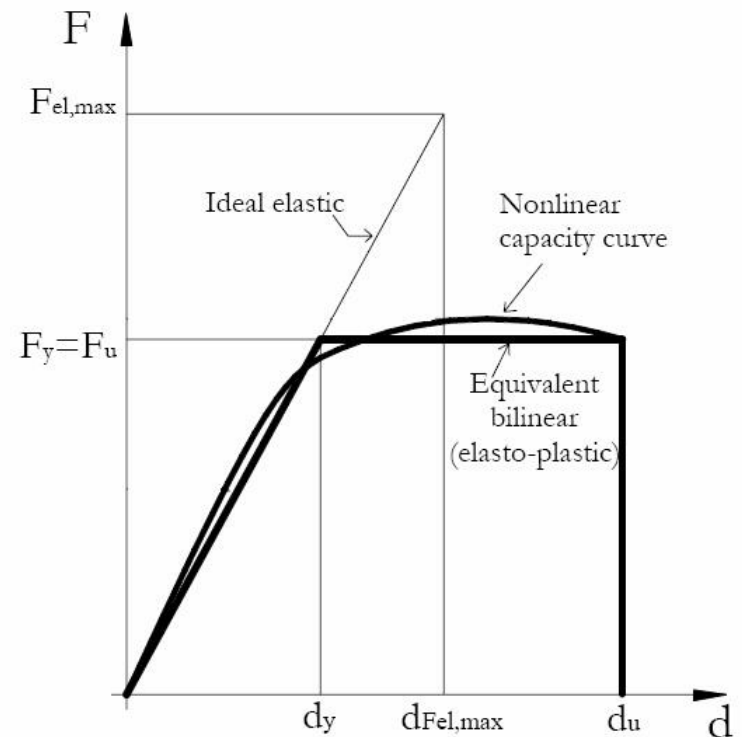
Základní hodnota
součinitele duktility

$$q_0 = \frac{F_{el,max}}{F_y}$$

Součinitel navýšení
pevnosti
(*overstrength factor*)

$$\frac{\alpha_u}{\alpha_1}$$

smyková síla V_b vs. posunutí δ

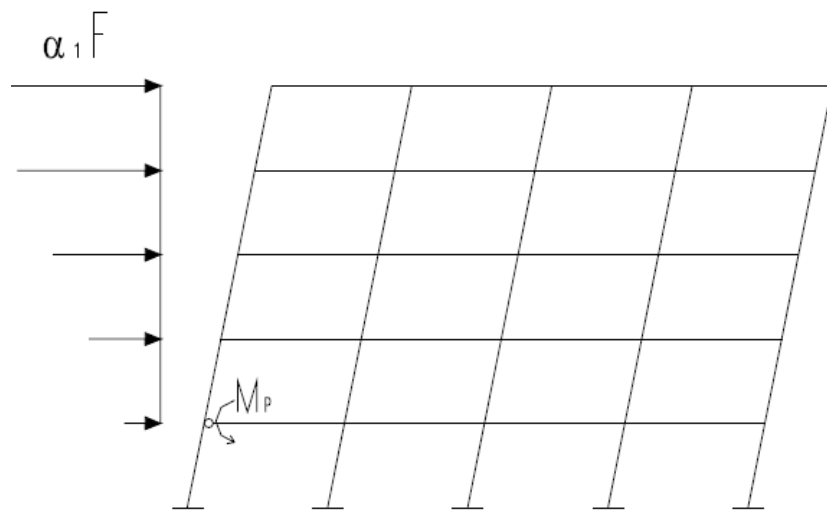


5. Duktilita konstrukcí

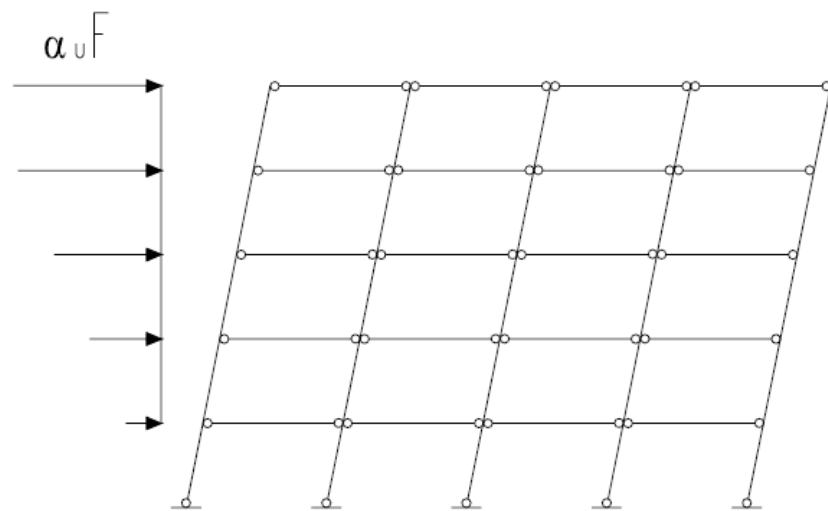
Součinitel navýšení pevnosti

- vyjadřuje skutečnost, že ke kolapsu nedochází bezprostředně při vzniku prvního plastického kloubu (prvních trhlin)
- lze určit nelineární statickou analýzou

$$\frac{\alpha_u}{\alpha_1}$$



vznik 1. plastického kloubu

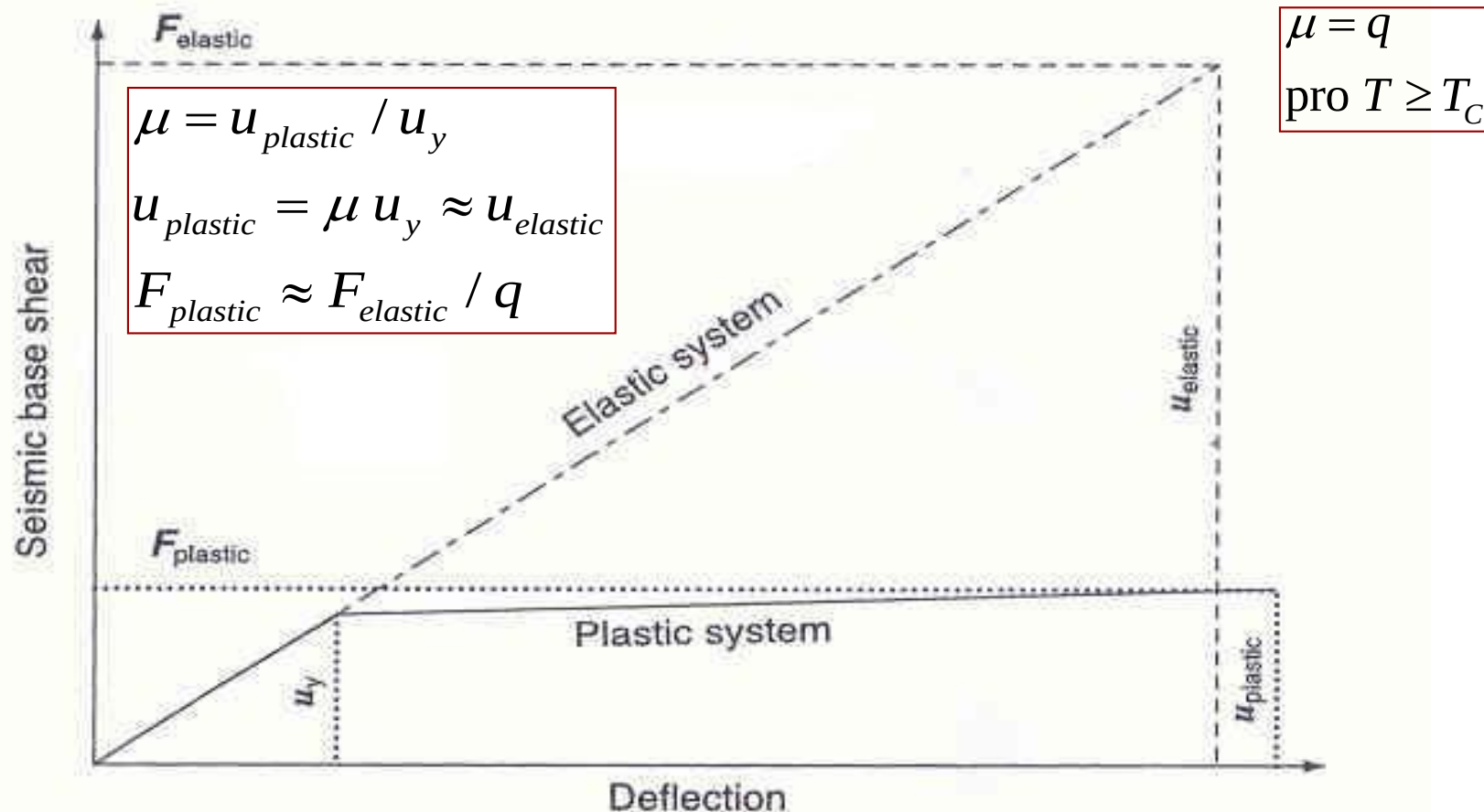


vznik kinematického mechanismu

5. Duktilita konstrukcí

Síly a posunutí v plastických a elastických systémech

– **poddajné konstrukce** se střední a dlouhou vlastní periodou
(konstrukce je tak měkká, že stojí na místě a pohybuje se podloží)



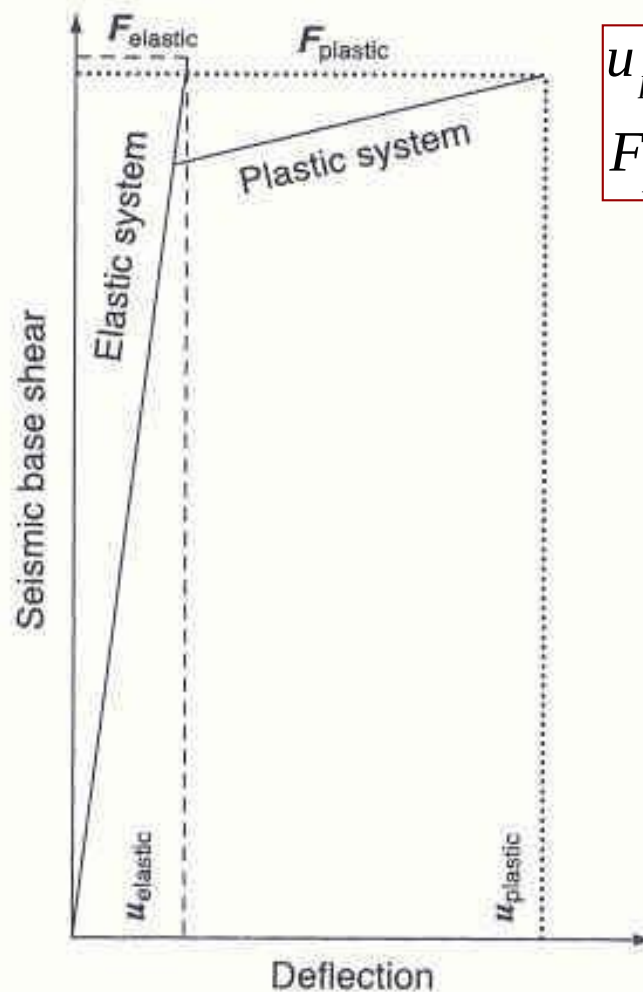
5. Duktilita konstrukcí

Síly a posunutí
v plastických a
elastických
systémech

– **tuhé konstrukce**

s krátkou vlastní periodou
(konstrukce se pohybuje
společně s podložím,
odezva je určována
setrvačnými silami)

Pro konstrukce s vlastní
periodou do cca 0,05-0,30 s
se q lineárně zvyšuje
od hodnoty 1 (pro $T = 0$)
na hodnotu q (pro $T = T_B$)



$$u_{plastic} = \mu u_y \approx \mu u_{elastic}$$

$$F_{plastic} \approx F_{elastic}$$

$$\mu = 1 + (q - 1) \frac{T_C}{T}$$

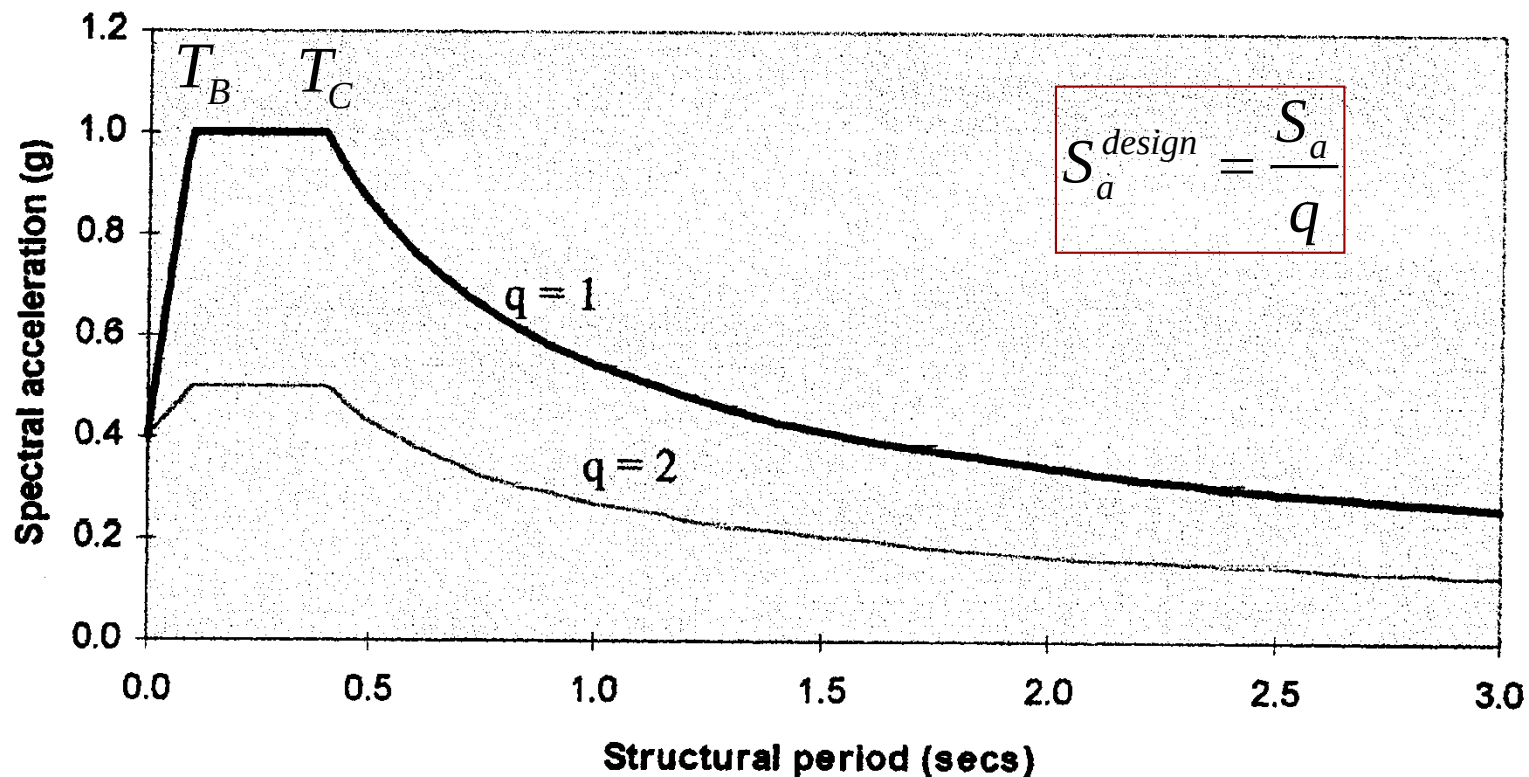
pro $T < T_C$

5. Duktilita konstrukcí

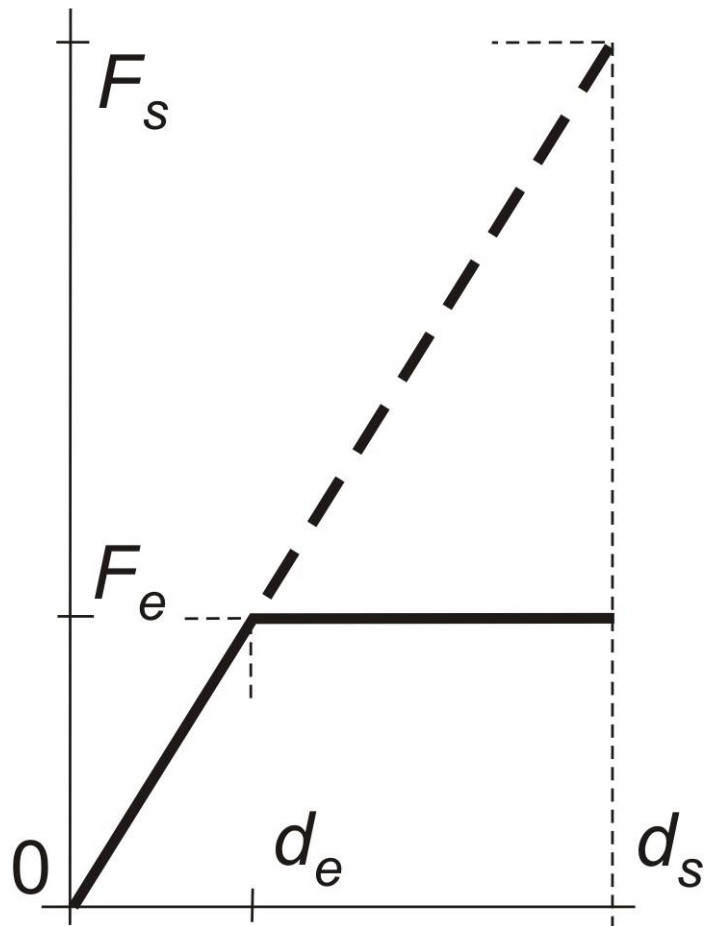
Redukce návrhového spektra pro duktilní konstrukce

EC8 spectra for elastic and ductile structures

$p_{ga} = 0.4g$



5. Duktilita konstrukcí



konstrukce se střední
a dlouhou periodou

F_s – seizmická síla působící na
pružnou konstrukci

F_e – seizmická síla s uvažáním
součinitele duktility

d_e – posunutí vypočtené

d_s – posunutí odpovídající
skutečnému zemětřesení

d_s / d_e duktilita

součinitel duktility q

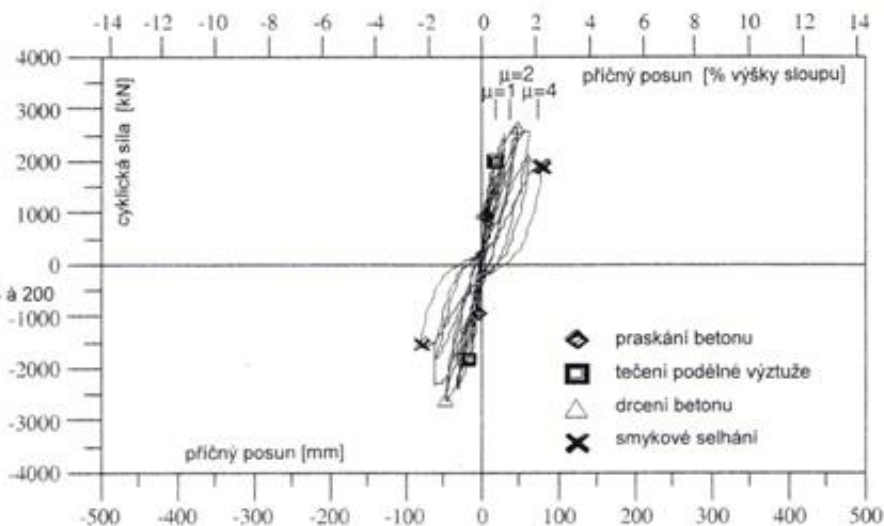
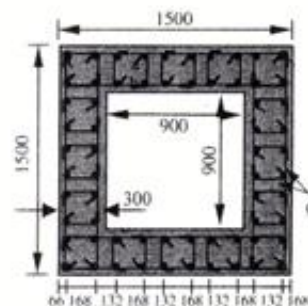
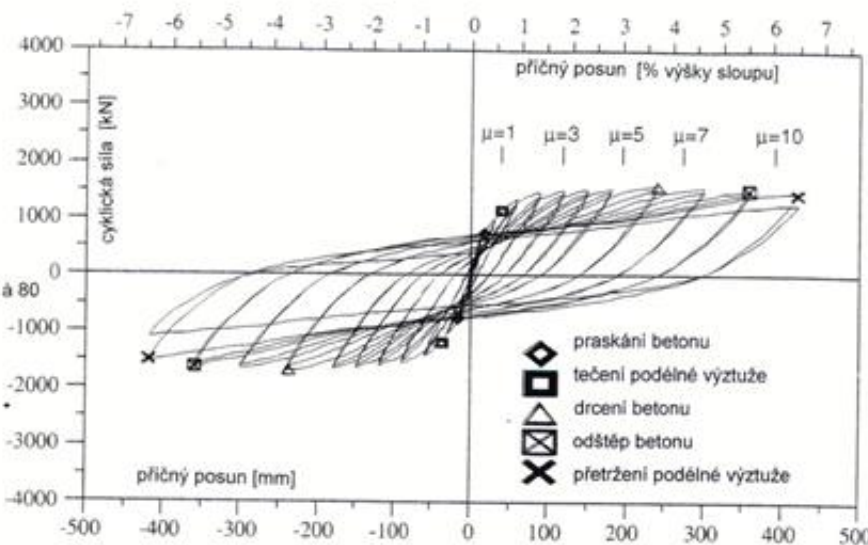
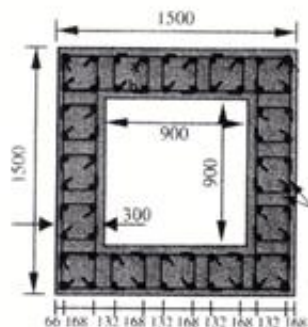
Výpočet:

$F_e = F_s / q$ působící zatížení

lze redukovat,
má-li konstrukce
dostatečnou duktilitu
výsledné posunutí

$d_s = d_e * q$

5. Duktilita konstrukcí

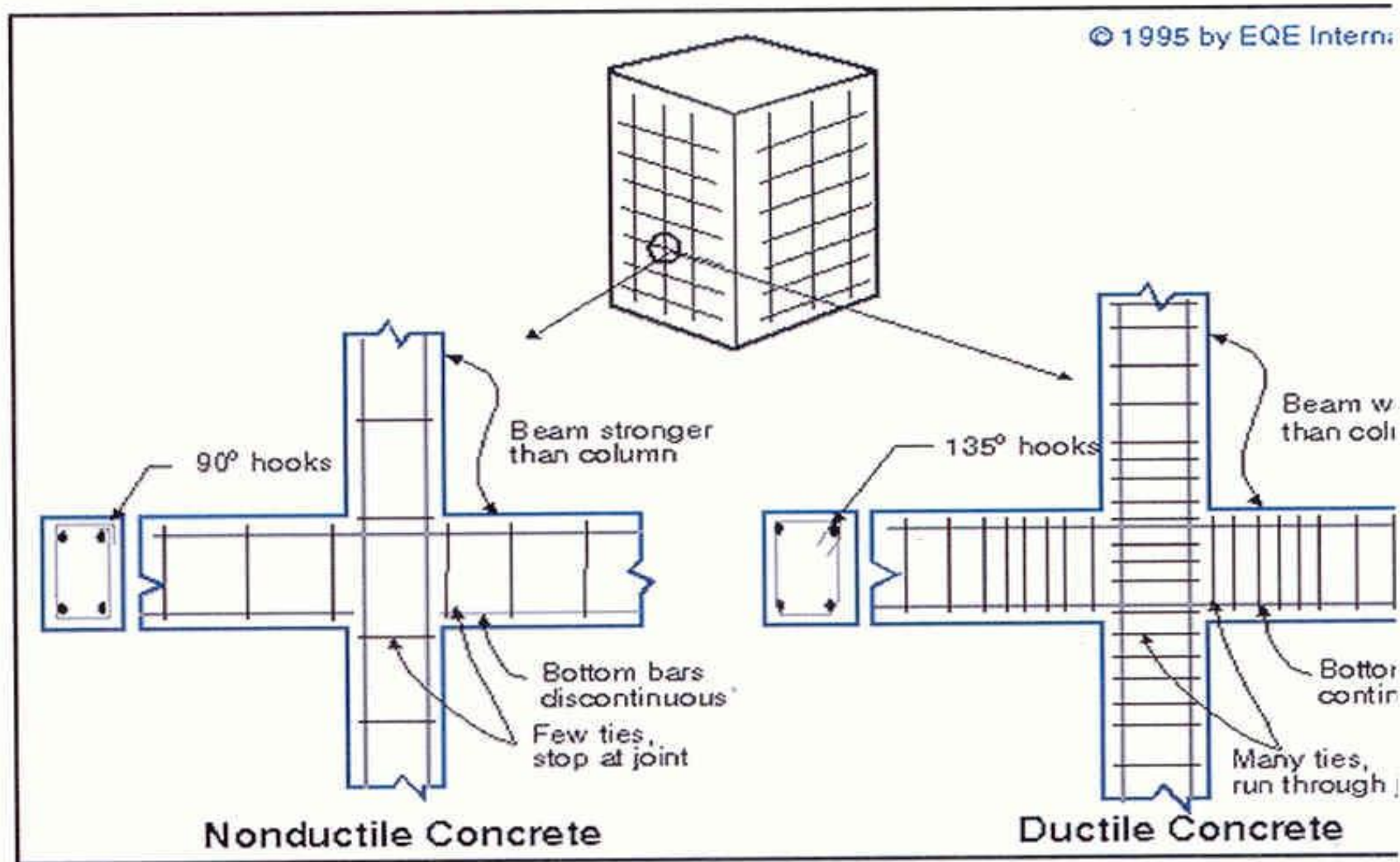


ŽB sloup

vysoká duktilita
- příčná výztuž
á 80 mm

nízká duktilita
- příčná výztuž
á 200 mm

5. Duktilita konstrukcí

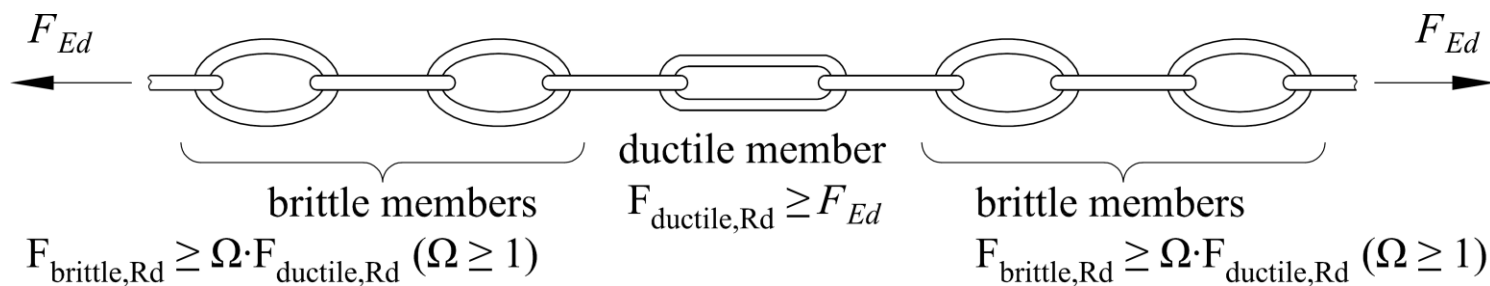


5. Duktilita konstrukcí

Konstrukce se skládá z duktilních a křehkých prvků

Je nutné zajistit hierarchii únosnosti – nejprve musí dojít k porušení v duktilním tvaru (např. ohyb ocelových nebo betonových nosníků) a následně ve tvaru křehkého porušení (např. smykové porušení nosníků, vybočení výztuže, kolaps ve svařovaném styku)

Je nutné prokázat, že duktilní tvary porušení jsou slabší než křehké tvary porušení – křehké prvky musí být navrženy tak, aby vydržely plnou kapacitu duktilních (plasticky se přetvářejících a energii disipujících) prvků – **návrh na kapacitu** (*capacity design*)

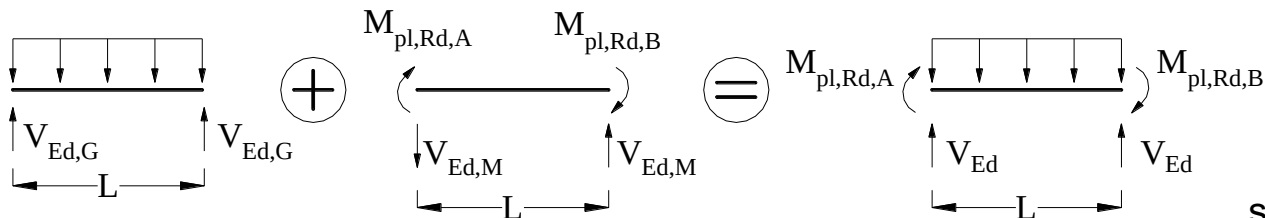


- | | |
|----------------|--|
| Duktilní prvky | – využívá se koncepce navýšení pevnosti |
| | – mohou být snadno opraveny po seizmické události |
| Křehké prvky | – praktické pokyny týkající se dimenzování (normy) |

5. Duktilita konstrukcí

Příklady návrhu na kapacitu

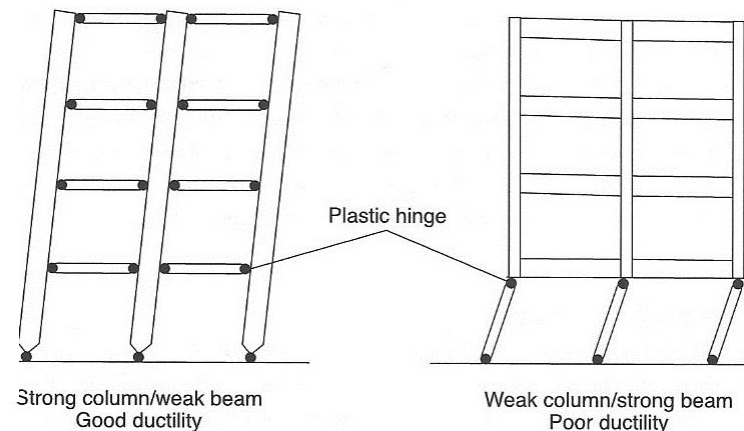
- Kontrola smykové pevnosti nosníků
 - provádí se za předpokladu vzniku plastických kloubů



$$\Omega V_{Ed} \leq V_{pl,Rd}$$

smyková síla $\leq$ pevnost ve smyku
EC8: $\Omega = 2$

- Zajištění vzniku globálního plastického mechanismu (silný sloup, slabý nosník)
 - maximální možný počet disipačních oblastí
 - rovnoměrná disipace energie po konstrukci



5. Duktilita konstrukcí

Příklady návrhu na kapacitu

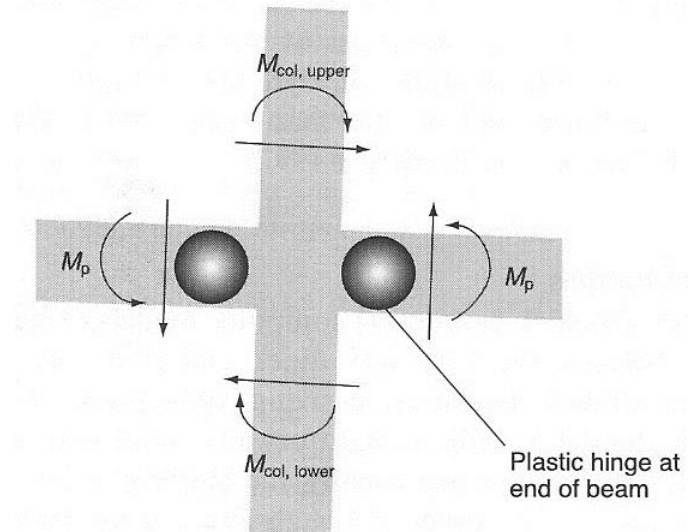
- Ve styčném zajistit, aby součet momentů odolnosti sloupů byl větší než součet plastických momentů na konci nosníků

$$\sum_{column} M_{Rd} > \sum_{beam} M_{pl,Rd}$$

$$\sum_{column} M_{Rd} > \Omega \sum_{beam} M_{Rd}$$

momenty odolnosti sloupů > momenty odolnosti nosníků

EC8: $\Omega = 1,3$



6. Přímá integrace pohybových rovnic

základní idea: pohybové rovnice se postupně řeší jednotlivých okamžicích t_i, t_{i+1} , časová osa se rozdělí pomocí délky integračního kroku

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

derivace se nahradí diferencemi, soustava diferenciálních rovnic se převede na rovnice algebraické

metody řešení:

explicitní – pohybová rovnice se používá v čase t_i

implicitní – pohybová rovnice se používá v čase t_{i+1}

podmíněně stabilní – délka integračního kroku je omezena (např. nejkratší periodou T_M)

nepodmíněně stabilní – délka integračního kroku není podmínkou stability řešení, z důvodu přesnosti je však omezena nejkratší periodou zatížení nebo vlastního tvaru



6. Přímá integrace pohybových rovnic

označení: $\mathbf{f}_i \equiv \mathbf{f}(t_i)$ $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}(t_i)$ $\ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i \Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{f}_{i+1}$$

neznámé: $\mathbf{u}_{i+1}$ $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$

Metoda centrálních diferencí – explicitní, podmíněně stabilní metoda

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_i &= \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_i &= \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2}\right) + \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t}\right) + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i$$

aproximace rychlosti a zrychlení

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{i+1} = \left[\mathbf{f}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{u}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{i-1}\right]$$

soustava N algebraických rovnic $\rightarrow \mathbf{u}_{i+1}$



6. Přímá integrace pohybových rovnic

Integration Method	Type of Method	Critical Step Size (Δt_{cr})
Central Different	Explicit	$\frac{2}{\omega} \left(\Delta t \leq \frac{T_M}{\pi} \right)$
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$ (Linear Acceleration)	Implicit	$\frac{3.464}{\omega}$ ($\Delta t \leq 0.551T_M$)
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ (Constant-Average-Acceleration)	Implicit	Unconditionally Stable
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = 0$ (Central Difference)	Explicit	$\frac{2}{\omega} \left(\Delta t \leq \frac{T_M}{\pi} \right)$
Wilson- θ (numerický útlum)	Implicit	Unconditionally Stable when $\theta \geq 1.37$

více
přesná
než

délka integračního kroku

je vždy omezena nejkratší periodou T_M zatížení
(je nutné výstižně aproximovat zatížení)

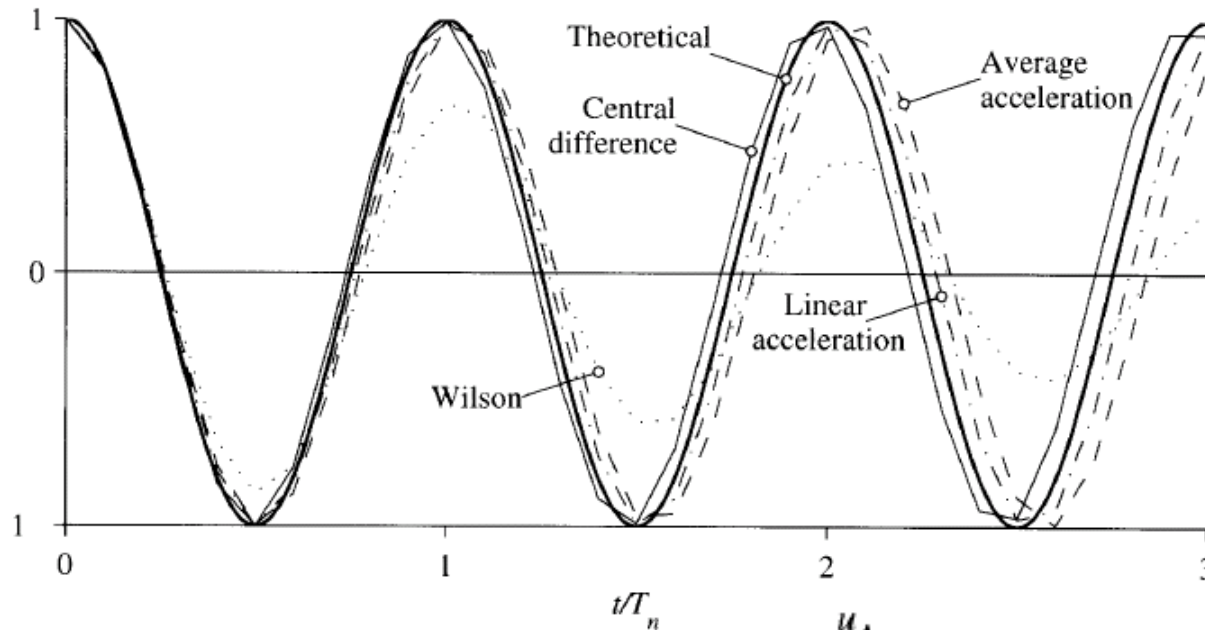
$$\Delta t \leq \frac{T_M}{20}$$

6. Přímá integrace pohybových rovnic

Stabilita a chyby numerické integrace

volné kmitání:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad u(0) = 1 \quad \text{and} \quad \dot{u}(0) = 0 \Rightarrow u(t) = \cos \omega_n t$$



$$(\Delta t = 0.1T_n)$$

Chyby: snižování amplitudy (AD)
prodlužování periody (PE)

