

VYDAVATELSTVÍ

**ČVUT**



*Z. Bittnar - J. Šejnoha*

**NUMERICKÉ  
METODY  
MECHANIKY**

**[ 1 ]**

Prof. Ing. ZDENĚK BITTNAR, DrSc

Prof. Ing. JIŘÍ ŠEJNOHA, DrSc

# NUMERICKÉ METODY MECHANIKY 1

Praha 1992

Vydavatelství ČVUT

Cílem dvoudílné monografie je upozornit technickou veřejnost na vývoj, který zaznamenaly numerické metody mechaniky v posledních letech.

První díl je věnován lineárnímu řešení konstrukcí pod statickým i dynamickým zatížením metodou konečných prvků. Druhý díl obsahuje řešení speciálních úloh MKP, informuje o moderních metodách nelineární analýzy, o technice adaptivních sítí a o vyšetřování náhodného chování konstrukcí. Podává též přehlednou informaci o metodě hraničních prvků.

Kniha je určena absolventům a posluchačům stavebních a strojních fakult, doktorandům a odborným pracovníkům ve stavební a strojní praxi.

Lektorovali: Prof. Ing. C. Höschl, DrSc, doc. Ing. B. Teplý, CSc

© Prof. Ing. Zdeněk Bittnar, DrSc, prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc, 1992

ISBN 80-01-00855-X

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>9</b>
<b>Úvod</b>	<b>11</b>
<b>1 Výchozí pojmy, rovnice a principy</b>	<b>15</b>
1.1 Základní rovnice teorie pružnosti . . . . .	15
1.2 Lineárně pružný materiál . . . . .	17
1.2.1 Fyzikální rovnice pro anizotropní materiál . . . . .	17
1.2.2 Transformace fyzikálních rovnic pro ortotropní materiál	21
1.2.3 Tenzorový zápis rovnic pružnosti . . . . .	23
1.3 Pružnoplastický materiál . . . . .	25
1.3.1 Podmínka plasticity a funkce zatěžování . . . . .	25
1.3.2 Konstitutivní rovnice pro pružnoplastický materiál . .	30
1.4 Materiál s poškozením . . . . .	35
1.4.1 Model křehkého porušování . . . . .	36
1.4.2 Lokalizace . . . . .	40
1.4.3 Disipace energie. Rozměrový efekt. . . . .	44
1.4.4 Omezovače lokalizace . . . . .	49
1.5 Vazkopružný materiál . . . . .	52
1.5.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost . . . . .	53
1.5.2 Přírůstkové konstitutivní vztahy - jednoosá napjatost	56
1.5.3 Přírůstkové konstitutivní vztahy - obecná napjatost .	57
1.6 Princip virtuálních prací a variační principy . . . . .	59
1.6.1 Princip virtuálních prací (PVP) . . . . .	59
1.6.2 Variační principy . . . . .	61
1.6.3 Modifikované variační principy . . . . .	66
1.6.4 Ritzova metoda . . . . .	70



1.7	Podmínky konvergence v deformační variantě . . . . .	75
1.8	Nelineární systémy a kritérium stability . . . . .	76
<b>2</b>	<b>Prutové konstrukce</b>	<b>81</b>
2.1	Základní vztahy pro prut . . . . .	81
2.1.1	Transformace základních rovnic pružnosti k průřezu . . . . .	81
2.1.2	Prut na pružném podloží . . . . .	86
2.2	Tažený - tlačенý a ohýbaný prvek . . . . .	93
2.2.1	Silová varianta řešení . . . . .	93
2.2.2	Deformační (posunová) varianta řešení . . . . .	100
2.3	Zakřivený prutový prvek . . . . .	106
2.4	Prvek pro řešení roštových konstrukcí . . . . .	109
2.4.1	Analogie mezi taženým-tlačeným prvkem a krouceným prvkem . . . . .	109
2.4.2	Roštový prvek na pružném Winklerově-Pasternakově podloží . . . . .	110
2.5	Statická kondenzace . . . . .	115
2.6	Transformace souřadnic . . . . .	122
<b>3</b>	<b>Plošné konstrukce</b>	<b>131</b>
3.1	Základní vztahy pro izoparametrické prvky . . . . .	131
3.1.1	Podstata izoparametrických prvků . . . . .	131
3.1.2	Aproximační funkce na čtyřúhelníku . . . . .	133
3.2	Základní vztahy pro trojúhelníkové prvky . . . . .	137
3.2.1	Plošné souřadnice na trojúhelníku . . . . .	137
3.2.2	Aproximační funkce na trojúhelníku . . . . .	139
3.3	Tažený-tlačенý prvek . . . . .	140
3.4	Tenkostěnný prutový prvek . . . . .	141
3.5	Prvky pro rovinnou úlohu . . . . .	145
3.5.1	Trojúhelníkový prvek . . . . .	147
3.5.2	Izoparametrický bilineární čtyřúhelníkový prvek . . . . .	150
3.5.3	Modifikovaný čtyřúhelníkový prvek . . . . .	153
3.5.4	Rovinný prvek s rotačními stupni volnosti . . . . .	158
3.6	Deskové prvky . . . . .	169
3.6.1	Mindlinova teorie tlustých desek . . . . .	171
3.6.2	Trojúhelníkový prvek DKT (Diskrete Kirchhoff Theory) . . . . .	180
3.6.3	Deskový prvek CCT (Constant Curvature Triangle) . . . . .	183
3.6.4	Čtyřúhelníkový deskový prvek s pružným podkladem . . . . .	187
3.6.5	Modifikovaný čtyřúhelníkový deskový prvek . . . . .	191

3.7	Skořepinové prvky . . . . .	196
3.7.1	Zakřivený trojúhelníkový prvek v lokálních souřadnicích	196
3.7.2	Transformace skořepinového prvku do globálních souřadnic . . . . .	200
3.8	Interakce konstrukcí s podložím . . . . .	201
3.8.1	Neovlivňující se základové prvky . . . . .	202
3.8.2	Interakce základových prvků . . . . .	204
3.9	Patch test . . . . .	208
<b>4</b>	<b>Tělesa</b>	<b>213</b>
4.1	Čtyřstěny . . . . .	214
4.2	Cihly . . . . .	215
4.3	Cihla s rotačními stupni volnosti . . . . .	217
4.4	Rotačně souměrné kontinuum . . . . .	221
<b>5</b>	<b>Lineární dynamika a stabilita</b>	<b>225</b>
5.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	226
5.1.1	Matice hmotnosti . . . . .	226
5.1.2	Matice počátečních napětí . . . . .	226
5.1.3	Pohybová rovnice . . . . .	228
5.1.4	Lineární stabilita . . . . .	229
5.1.5	Vlastní kmitání lineárních soustav . . . . .	229
5.1.6	Ortogonalita vlastních tvarů . . . . .	231
5.1.7	Rayleighův kvocient . . . . .	232
5.1.8	Spektrální rozklad matice tuhosti . . . . .	233
5.2	Metody řešení vlastního kmitání . . . . .	233
5.2.1	Přehled metod . . . . .	233
5.2.2	Statická kondenzace . . . . .	234
5.2.3	Rayleighova-Ritzova metoda . . . . .	235
5.2.4	Kombinace statické kondenzace a Rayleighovy-Ritzovy metody . . . . .	237
5.2.5	Inverzní iterace . . . . .	241
5.2.6	Grammova-Schmidtova ortogonalizace . . . . .	243
5.2.7	Inverzní iterace s posunutím . . . . .	244
5.2.8	Jacobiho metoda rotací . . . . .	244
5.2.9	Metoda iterace podprostoru . . . . .	249
5.2.10	Lanczosova metoda . . . . .	251
5.2.11	Aplikace Lanczosovy metody na řešení vlastního tlumeného kmitání . . . . .	260

---

5.3	Vynucené kmitání lineárních soustav . . . . .	261
5.3.1	Řešení odezvy konstrukce na neperiodické zatížení rozvojem do vlastních tvarů kmitání . . . . .	262
5.3.2	Statická a dynamická korekce . . . . .	270
5.3.3	Řešení odezvy konstrukce na neperiodické zatížení přímou integrací . . . . .	271
5.3.4	Výpočet seismických účinků ze spektra odezvy . . . . .	277
5.4	Odezva na harmonické buzení . . . . .	279
5.4.1	Přímé řešení v komplexních číslech . . . . .	281
5.4.2	Metoda rozvoje do vlastních tvarů kmitání . . . . .	282
	<b>Literatura</b>	<b>289</b>
	<b>A Maticová formulace Gaussovy eliminace</b>	<b>297</b>
	<b>B Numerická integrace</b>	<b>301</b>

# Předmluva

Zájem studentů, vědeckých pracovníků i inženýrů v praxi o numerické metody mechaniky neustále roste. O tom jsme se přesvědčili vydáním skripta *Metoda konečných prvků I*, které bylo rozebráno během půl roku. Protože numerické metody se prudce vyvíjejí, předkládáme technické veřejnosti monografii, ve které je obsah skripta zcela přepracován a doplněn o partie, jež měly být původně zařazeny do zamýšleného druhého dílu skripta.

Rovněž obsah monografie je rozdělen do dvou dílů. V *prvním dílu* je čtenář nejprve seznámen s nejdůležitějšími vztahy, pojmy a principy mechaniky, s nimiž se dále pracuje. Čtyři navazující kapitoly jsou pak věnovány lineárnímu řešení konstrukcí pod statickým (kap. 2 až 4) a dynamickým zatížením (kap. 5).

*Druhý díl* je rozčleněn do šesti kapitol. Nejprve je pojednáno o semianalytickém řešení konstrukcí, při němž se využívá v jednom směru rozvoje neznámých posunů do Fourierovy řady (kap. 6). Navazuje řešení speciálních úloh MKP, jako je výpočet kroucení masivních prutů, úlohy teorie pole a úlohy lomové mechaniky (kap. 7). Osmá kapitola uzavírá první tématický okruh věnovaný převážně lineárním problémům. Předchozí poznatky o MKP jsou v ní doplněny informacemi o metodě hraničních prvků se zaměřením na postupy vedoucí k symetrické variantě MHP.

Druhému tématickému okruhu - řešení nelineárních úloh mechaniky - je věnována devátá kapitola. Po výkladu nezbytných pojmů vystupujících v geometricky nelineární mechanice následují metody řešení nelineárních rovnic, které jsou v souladu se současnými přístupy pojímány jako soustavy rozšířené o doplňující podmínky.

Desátá kapitola otevírá třetí tématický okruh problémů souvisejících s aplikací MKP a MHP. Je věnována modernímu aparátu adaptivních sítí se zmínkou o využití metod umělé inteligence při jejich konstruování. Vhodnou modifikací sítě prvků se zajišťuje, že chyba řešení je na všech prvcích přibliž-

ně stejná. V závěrečné jedenácté kapitole je čtenář seznámen se základními pravděpodobnostními metodami používanými v kombinaci s MKP a MHP.

Pokládáme za milou povinnost poděkovat všem, kteří přispěli k vydání díla. Zejména jsme vděčni recenzentům prof. Ing. C. Höschlovi, DrSc a doc. Ing. B. Teplému, CSc za pečlivé přečtení rukopisu a řadu cenných připomínek a námětů k jeho zkvalitnění. Dík patří též našim spolupracovníkům a aspirantům Ing. J. Mácovi, CSc, Ing. P. Fajmanovi, RNDr. J. Novotnému a Ing. P. Kryslvi, kteří nás upozornili nejen na formální, ale i na věcné nedostatky rukopisu. Děkujeme též H. Jarchovské za péči věnovanou překreslení obrázků a P. Bittnarovi, který s velkou trpělivostí vypracoval předlohu pro tisk textovým procesorem  $\text{\LaTeX}$ .

Praha, únor 1992.

Autoři

# Úvod

Mohutný rozvoj výpočetní techniky po druhé světové válce vytvořil předpoklady ke vzniku moderních metod numerického řešení fyzikálních problémů. Jednou z nejučinnějších je metoda konečných prvků (MKP). Na veřejnosti se poprvé objevila ve druhé polovině padesátých let a v krátké době se rozšířila ze Spojených států do naprosté většiny technicky vyspělých zemí celého světa. Základní myšlenka metody spočívající v zavedení "po částech spojitých polí" se přisuzuje R. Courantovi (1943). O další rozvoj této myšlenky a její uplatnění v technické praxi se zasloužili především inženýři, kteří ji aplikovali při řešení statických a dynamických úloh. Mezi přední průkopníky metody konečných prvků patří M. J. Turner, R. W. Clough, E. L. Wilson ad.

Jejich původní pojetí, dnes s oblibou označované za inženýrské, bylo později dále prohloubeno především po matematické stránce. Ukázalo se totiž, že metoda konečných prvků je v podstatě moderní variantou klasické Ritzovy metody. Z tohoto poznatku vyplynula celá řada dalších cenných závěrů, jež umožňují kvalitativně zhodnotit získané výsledky. V tomto směru má o rozvoj metody konečných prvků velké zásluhy Belgičan B. Fraeijns de Veubeke. Do pokladnice inženýrské teorie a praxe přispěla významnou měrou i britská škola, jejímž duchovním vůdcem je O. C. Zienkiewicz a na kterého navázali E. Hinton, D. R. J. Owen ad. Významných úspěchů dosáhly též kolektivy pracovníků v SRN soustředěných kolem J. H. Argyrise, W. B. Krätzig a. Řada nových jmen se objevila v souvislosti s metodami nelineární analýzy konstrukcí MKP (K. J. Bathe, Z. P. Bažant, T. Belytschko, M. A. Crisfield, T. J. R. Hughes, J. T. Oden, E. Riks, J. C. Simo, G. A. Wempner, P. Wriggers ad.). Novinkou jsou v posledních několika letech stochastické konečné prvky a technika adaptivních sítí, jejíž teoretické základy položil I. Babuška.

U nás se metoda konečných prvků úspěšně rozvíjela od 60. let především

zásluhou matematiků. Původní práce vysoké vědecké úrovně publikovali F. Leitner, K. Rektorys, M. Zlámal, A. Ženíšek ad. Dále je třeba podtrhnout vědeckou a popularizační činnost J. Kratochvíla, který k nám metodu konečných prvků vlastně uvedl, a V. Koláče. Aplikacím na hydrotechnické konstrukce se velmi intenzivně věnuje I. Kazda, ve statice a zvláště v dynamice stavebních konstrukcí úspěšně pracují mj. J. Náprstek, P. Řeřicha a A. Tesár. V. Červenka je znám svými pracemi o matematickém modelování vyztuženého betonu, B. Teplý a jeho spolupracovníci se navíc zaměřili na pravděpodobnostní analýzu železobetonových konstrukcí. K rozvoji MKP ve strojnictví významně přispěli C. Höschl, E. Ondráček a pracovníci SVÚSS v Běchovicích, a to řadou prací z analýzy teplotních polí, mechaniky konstrukcí a lomové mechaniky. Za všechny jmenujme alespoň S. Ptáka a J. Jinocha. R. Brepta a M. Okrouhlík zkoumali vlastnosti modelů založených na MKP při rázovém namáhání. Deterministický i stochastický přístup k nelineární lomové mechanice aplikuje kolektiv pracovníků soustředěných kolem I. Nedbala.

O využití numerických metod mechaniky v inženýrské praxi se nejvíce zasloužili odborníci v Dopravoprojektu Brno, v ČKD Praha a v ŠKODA Plzeň.

Pokud bychom hledali historické kořeny metody hraničních prvků (MHP), došli bychom patrně až ke Greenovi, který ukázal, že řešení Laplaceovy rovnice je možné vyjádřit v integrálním tvaru prostřednictvím hraničních hodnot hledané funkce a její derivace ve směru vnější normály k hranici. Somigliana později aplikoval obdobný postup na rovnice lineární pružnosti. Jeho rozšíření do oblasti dynamiky bývá přisuzováno Wheelerovi a Sternbergovi.

Současnou podobu MHP, kterou vytvořil M. A. Jaswon v r. 1963, lze interpretovat jako efektivní spojení klasických integrálních rovnic se slabě singulárním jádrem a MKP, v němž se využívá předností obou. O rozvoj metody se zasloužila celá řada autorů. V zahraničí zejména C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, M. Tanaka, T. A. Cruse, C. Polizzotto ad.

U nás je rozvoj MHP spojován se jmény pracovníků ÚSTARCH Bratislava J. Sládka a V. Sládka, dále se jmény P. Procházky, P. Brože ad.

Autoři předkládají monografii s cílem seznámit čtenáře jednak s podstatou a základními myšlenkami, na kterých MKP a MHP stojí, ale i se směry, jimiž se ubírá jejich současný vývoj. Tak široký záběr bohužel neumožňuje probrat všechny partie se stejnou důkladností. To se týká i ilustrace výkladu příklady. Výběr je omezen jen na takové příklady, které poskytují buď porovnání různých výpočetních modelů z hlediska jejich přesnosti či účinnosti.

nosti (spotřeba strojového času, nároky na paměť počítače ap.) nebo které dokumentují algoritmus výpočtu, popř. jsou nezbytné pro pochopení fyzikální stránky problému. Záměrně jsme vynechali příklady k partiím, které jsou bohatě pojednány v tuzemské literatuře. To se týká především lineární teorie ohybu desek a skořepin, a lineární stability a kmitání konstrukcí.

Obsah prvního dílu je rozdělen do pěti kapitol. Specifický význam má *první kapitola*. Rekapitulace základních vztahů, pojmů a principů má čtenáři nejen usnadnit navazující studium, ale má jej upozornit i na nové oblasti, které se v posledních letech prosazují ve fyzikálně nelineární mechanice. Některé problémy, týkající se poškození, lokalizace, rozměrového efektu ap., považujeme za významné do té míry, že je alespoň stručně komentujeme s odkazem na příslušnou literaturu, i když přesahují rámec publikace a nemohou být se všemi důsledky dále rozvíjeny v aplikační části.

*Druhá kapitola* je věnována prutovým konstrukcím, přičemž se bere v úvahu interakce konstrukce s Winklerovým - Pasternakovým podkladem. V této souvislosti je vyložena pojem konzistentní formulace matice tuhosti pružného podkladu, s nímž se dále pracuje při řešení lineární stability a kmitání (konzistentní matice počátečních napětí a matice hmotnosti). Pozornost je věnována rovněž zakřiveným prvkům konstruovaným na principu rozkladu (dekompozice) tečnových posunů na složku způsobenou normálovou silou a na složku způsobenou ohybem. Závěrem je uvedeno několik poznámek týkajících se statické kondenzace a transformace souřadnic.

*Třetí kapitola* je těžištěm prvního tématického okruhu zaměřeného na řešení lineárních problémů. Po vyložení podstaty izoparametrických prvků je nejprve probrán tenkostěnný prutový prvek založený na Umanského - Mindlinových - Reissnerových předpokladech. Následují prvky pro řešení rovinných úloh (stěny splňující podmínky rovinné napjatosti (RN) a tělesa vyhovující předpokladům rovinné deformace (RD)) s výkladem několika užitečných modifikací, které se hodí pro řešení ohybu vysokých nosníků, pro efektivní spojení stěny s rámovou konstrukcí, jako základ konstrukce efektivních skořepinových prvků ap. Obdobným způsobem jsou pojednány deskové prvky (včetně pružného Winklerova - Pasternakova podkladu), ať už pojaté v rámci Kirchhoffovy nebo Mindlinovy - Reissnerovy teorie. Skořepinový prvek založený na principu dekompozice je jen zobecněním obloukového prvku ze druhé kapitoly. Na závěr kapitoly je podána informace o speciálních prvcích používaných k modelování podloží při sledování interakce s vrchní stavbou.

*Čtvrtá kapitola* je zobecněním pojmů a vztahů zavedených při konstrukci rovinných prvků na prvky prostorové (tělesa).



*Pátá kapitola* je věnována lineární stabilitě a kmitání konstrukcí MKP. Po vysvětlení základních pojmů následuje výklad o metodách řešení vlastního kmitání. Kromě standardních metod (Rayleighova - Ritzova metoda, inverzní iterace, Jacobiho metoda, metoda iterace podprostoru) je pozornost soustředěna na Lanczosovu metodu. Řešení vynuceného kmitání je založeno jednak na metodě rozkladu do vlastních tvarů kmitání ( s podrobným komentářem ke způsobu uvažování útlumu), jednak na metodách přímé integrace, které lze aplikovat i na soustavy nelineárních pohybových rovnic (diferenční metoda, Newmarkova metoda, Wilsonova  $\Theta$ -metoda). Kapitulu uzavírají dvě varianty řešení odezvy na harmonické buzení (v komplexních číslech, rozvojem do vlastních tvarů s komentářem k proporcionálnímu a neproporcionálnímu útlumu).

*Dodatek* poskytuje čtenáři nezbytné informace o maticové formulaci Gaussovy eliminace a metodách numerické integrace.

# Kapitola 1

## Výchozí pojmy, rovnice a principy

### 1.1 Základní rovnice teorie pružnosti

Úlohou teorie pružnosti je určit v tělese vyplňujícím objem  $\Omega$  a ohraničeném povrchem  $\Gamma$  tři pole:

- vektorové pole posunů  $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$
- tenzorové pole deformace  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T$
- tenzorové pole napětí  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T$ .

K určení patnácti neznámých funkcí máme k dispozici systém patnácti rovnic, a to:

- tři *Cauchyho* rovnice rovnováhy

$$\partial \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

- šest *geometrických* rovnic

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \partial^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

- šest *fyzikálních* rovnic

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (1.3)$$

Potenciální funkce jsou svázány tzv. Legendreovou transformací

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) + W^*(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.4)$$

V rovnicích (1.1), (1.2) jsme zavedli operátorovou matici

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

a vektor objemových sil  $\bar{\mathbf{X}} = \{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}^T$ .

Nedílnou součástí formulace problému pomocí diferenciálních rovnic jsou *okrajové podmínky* předepsané na hranici tělesa  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ , a to:

- tři *silové* okrajové podmínky na  $\Gamma_p$

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

- tři *geometrické* okrajové podmínky na  $\Gamma_u$

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Nově zavedené symboly značí předepsané povrchové síly  $\bar{\mathbf{p}}$  na  $\Gamma_p$  a předepsané posuny  $\bar{\mathbf{u}}$  na  $\Gamma_u$ . Matice směrových kosinů  $n_x, n_y, n_z$  vnější normály k povrchu  $\Gamma$  má obdobné uspořádání jako matice  $\boldsymbol{\partial}$ :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Pole napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a posunů  $\mathbf{u}$  jsou svázána užitečným integrálním vztahem, nazývaným *divergenční* nebo *Clapeyronův* teorém

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega, \quad (1.9)$$

ktej je bezprostředním důsledkem Gaussova integrálního teorému a porovnává práci sil vnitřních (levá strana rovnice) s prací sil vnějších - povrchových a objemových (pravá strana rovnice).

## 1.2 Lineárně pružný materiál

### 1.2.1 Fyzikální rovnice pro anizotropní materiál

Lineárně pružný materiál je charakterizován hustotou deformační energie (měrnou energií deformace)

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0), \quad (1.10)$$

kde  $\mathbf{D}$  je symetrická matice tuhosti materiálu typu (6, 6). Při obecné anizotropii má 21 nezávislých prvků (elastických konstant). Vektor počáteční deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \{\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}, 0, 0, 0\}^T$  může být způsoben teplotou, smršťováním ap. V případě teplotní dilatace platí

$$\varepsilon_{0x} = \alpha_x T, \quad \varepsilon_{0y} = \alpha_y T, \quad \varepsilon_{0z} = \alpha_z T, \quad (1.11)$$

kde  $T$  je teplotní změna  $[K]$ ,

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  jsou koeficienty teplotní roztažnosti  $[K^{-1}]$ .

U většiny stavebních materiálů přibližně klademe  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0,000012$ .

Spojením prvního vzorce (1.3) s (1.10) vyplyne maticové vyjádření fyzikálních rovnic pro lineárně pružný materiál ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0). \quad (1.12)$$

Hustota komplementární energie je v případě lineárně pružného materiálu vyjádřena vztahem

$$W^* = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (1.13)$$

kde  $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$  je symetrická matice poddajnosti materiálu typu (6, 6). Spojením druhého vzorce (1.3) s (1.13) obdržíme inverzní vztah k (1.12)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (1.14)$$

Obecný stav anizotropie se vyskytuje jen u látek krystalizujících v *trojklonné* krystalické soustavě. Pro stavební praxi je důležitá *romboidní* anizotropie se třemi navzájem kolmými rovinami elastické symetrie, nazývaná technickou praxí *ortotropií*. Matice materiálové poddajnosti je při použití technických konstant  $E, \nu, G$  vyjádřena takto:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Matice je obsazena 9 nezávislými konstantami, neboť konstanty první hlavní submatice jsou svázány třemi podmínkami symetrie matice  $\mathbf{C}$

$$\nu_{xy}E_x = \nu_{yx}E_y, \quad \nu_{yz}E_y = \nu_{zy}E_z, \quad \nu_{zx}E_z = \nu_{xz}E_x. \quad (1.16)$$

Inverzí matice poddajnosti obdržíme matici tuhosti materiálu

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

S označením

$$\xi = 1 - (\nu_{xy}\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xz}) - (\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}) \quad (1.18)$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \xi d_{xx} &= E_x(1 - \nu_{zy}\nu_{yz}) \\ \xi d_{xy} &= E_x(\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}) \\ &= E_y(\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{zy}) = \xi d_{yx}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Další prvky získáme cyklickou záměnou indexů.

Ve dvourozměrných úlohách se vyskytnou dva speciální typy stavu napětí a přetvoření - rovinná deformace ( $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) a rovinná napjatost ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ).

V rovinné deformaci vyjdeme z redukované matice (1.17) a fyzikální rovnice napíšeme ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1.20)$$

Elastické konstanty první hlavní submatice jsou určeny vztahy (1.18) a (1.19). Inverzní vyjádření obdržíme ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.21)$$

kde

$$\begin{aligned} c_{xx} &= \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}, \\ c_{xy} &= c_{yx} = -\frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y}, \\ c_{yy} &= \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

V rovinné napjatosti naopak vyjdeme z redukované matice (1.15) a fyzikální rovnice napíšeme ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1.23)$$

Inverzní vztah má tvar

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.24)$$

kde

$$\begin{aligned} d_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, \\ d_{xy} &= d_{yx} = \frac{\nu_{xy}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}, \\ d_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Materiálová ortotropie je charakteristická např. pro ortogonálně vyztužený beton. Vzhledem k nedostatku ověřujících experimentů bývá hlavním problémem stanovení smykové tuhosti. Modul  $G_{xy}$  se proto zpravidla určuje z doplňující podmínky, že to je veličina invariantní vůči pootočení souřadnicových os [24].

Zavedeme-li ekvivalentní Poissonovo číslo

$$\nu = \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad (1.26)$$

obdržíme z (1.24) a (1.25) tříparametrický fyzikální vztah ve tvaru

		rovinná	
		napjatost	deformace
<b>C</b>	$\frac{1}{G}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2(1+\nu)} & -\frac{\nu}{2(1+\nu)} & 0 \\ -\frac{\nu}{2(1+\nu)} & \frac{1}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{G} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<b>D</b>	$G$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{1-\nu} & \frac{2\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-\nu} & \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$G \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabulka 1.1: Matice poddajnosti a tuhosti materiálu pro rovinnou napjatost a deformaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_x & \nu\sqrt{E_y E_x} & 0 \\ \nu\sqrt{E_x E_y} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.27)$$

kde

$$d_{33} = \frac{1}{4}(E_x + E_y - 2\nu\sqrt{E_x E_y}).$$

V *izotropním* prostředí jsou všechny materiálové konstanty nezávislé na orientaci souřadnicových os. Vynecháním indexů  $x, y$  a úpravou předchozích vzorců dojdeme ke známým výsledkům uvedeným přehledně v tab. 1.1. Tabulka je sestavena takovým způsobem, že umožňuje získat vzorce pro rovinnou napjatost (levý sloupec) jednoduše tak, že ve vzorcích pro rovinnou deformaci (pravý sloupec) nahradíme Poissonovo číslo  $\nu$  konstantou  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ . Při sestavení tab. 1.1 jsme využili známého vztahu

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.28)$$

### 1.2.2 Transformace fyzikálních rovnic pro ortotropní materiál

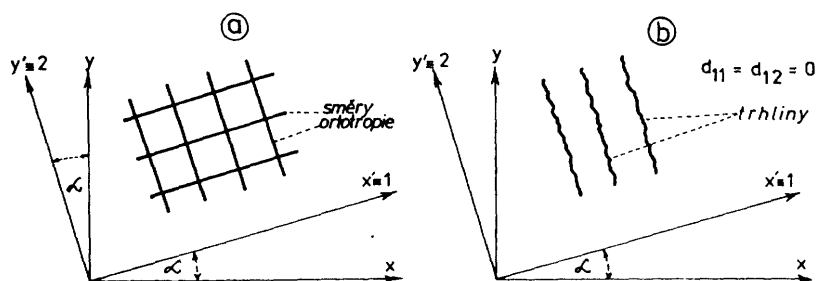
Roviny elastické symetrie zpravidla nesplyvají s rovinami globální soustavy souřadnic, k níž se váže výpočet konstrukce jako celku. Je proto třeba transformovat matici materiálové tuhosti (poddajnosti) z lokální soustavy, v níž byly elastické konstanty (experimentálně) zjištěny, do soustavy globální. K transformaci použijeme výraz pro hustotu energie  $W$  (komplementární energie  $W^*$ ), která je - jakožto skalár - na volbě souřadnic nezávislá:

$$\begin{aligned} 2W(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}'^T \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\varepsilon}'^T \mathbf{D}' \boldsymbol{\varepsilon}'. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Předpokládejme, že známe matici  $\mathbf{D}'$  definovanou vzhledem k lokální soustavě souřadnic a hledáme matici  $\mathbf{D}$  vztahenou ke globální soustavě souřadnic. Omezíme se na rovinný případ ortotropního materiálu vyznačeného schematicky na obr. 1.1a

Sloužky tenzoru deformace se transformují podle známého vzorce [68]





Obr. 1.1: Ortotropní materiál

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

kde  $c = \cos \alpha$  a  $s = \sin \alpha$ , neboli

$$\varepsilon' = T \varepsilon. \quad (1.30)$$

Po dosazení (1.30) do (1.29) zjistíme, že

$$\varepsilon'^T D \varepsilon = \varepsilon'^T T^T D' T \varepsilon,$$

odkud

$$D = T^T D' T. \quad (1.31)$$

Po rozvedení naznačeného součinu vyjde

$$D = D_1 + D_2 = [D_{11}, D_{12}, D_{13}] + [D_{21}, D_{22}, D_{23}], \quad (1.32)$$

kde

$$D_{11} = \begin{Bmatrix} d_{22}s^4 + 4G_{12}s^2c^2 \\ d_{22}s^2c^2 - 4G_{12}s^2c^2 \\ -d_{22}s^3c - 2G_{12}s c(c^2 - s^2) \end{Bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{Bmatrix} d_{22}s^2c^2 - 4G_{12}s^2c^2 \\ d_{22}c^4 + 4G_{12}s^2c^2 \\ -d_{22}s c^3 + 2G_{12}s c(c^2 - s^2) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{Bmatrix} -d_{22}s^3c - 2G_{12}s c(c^2 - s^2) \\ -d_{22}s c^3 + 2G_{12}s c(c^2 - s^2) \\ d_{22}s^2c^2 + G_{12}(c^2 - s^2)^2 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{Bmatrix} d_{11}c^4 + 2d_{12}s^2c^2 \\ d_{11}s^2c^2 + d_{12}(s^4 + c^4) \\ d_{11}s c^3 - d_{12}s c(c^2 - s^2) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{22} = \begin{Bmatrix} d_{11}s^2c^2 + d_{12}(s^4 + c^4) \\ d_{11}s^4 + 2d_{12}s^2c^2 \\ d_{11}s^3c + d_{12}s c(c^2 - s^2) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{Bmatrix} d_{11}s c^3 - d_{12}s c(c^2 - s^2) \\ d_{11}s^3c + d_{12}s c(c^2 - s^2) \\ (d_{11} - 2d_{12})c^2s^2 \end{Bmatrix}.$$

Materiálová matice je součtem dvou matic. V případě, že  $d_{11} = d_{12} = 0$ , druhá matice bude nulová a první matici lze použít k vyjádření tuhosti materiálu, který je porušen trhlinami orientovanými do směru  $y \equiv 2$  ( $d_{22} \neq 0$ ) a přenašejícími smyk (obr. 1.1b). Smykovou tuhost  $G_{12} \neq 0$  je v takovém případě třeba snížit oproti smykové tuhosti základního materiálu. Závislost redukčního součinitele na šířce rozevření trhlin je uvedena v odst. 1.4.1.

### 1.2.3 Tenzorový zápis rovnic pružnosti

Tenzorový zápis je s výhodou používán tam, kde by maticové vyjádření bylo buď příliš složité nebo málo přehledné. Tak je tomu např. v MHP. Tenzorový zápis je užitečný i pro MKP, kde umožňuje vyjádřit matice tuhosti některých významných prvků jednoduchým vzorcem. Naznačený postup bude ukázán na příkladě trojúhelníkového prvku pro rovinnou úlohu.

Za *obecné napjatosti* je maticové rovnici (1.12) ekvivalentní tenzorový zápis

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{0kl}), \quad (1.33)$$

kde  $D_{ijkl}$  je tenzor tuhosti materiálu. V případě izotropního materiálu

$$D_{ijkl} = 2G \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} \right). \quad (1.34)$$

Tenzor  $\delta_{ij}$  nabývá hodnot 1 ( $i = j$ ) a 0 ( $i \neq j$ ) a bývá označován jako izotropní tenzor (Kroneckerovo delta). Symbol sčítání nebude dále vypisován. S využitím sumačního pravidla budeme požadovat sčítání podle opakujících se indexů.

V inverzním vztahu k rovnici (1.33)

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{0ij} \quad (1.35)$$

je

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2G} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \quad (1.36)$$

tenzorem poddajnosti izotropního materiálu.

Maticovému vyjádření geometrických rovnic (1.2) odpovídá tenzorový zápis

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.37)$$

Musíme si dát pozor na rozdíl mezi tenzorovou smykovou deformací  $\varepsilon_{12}$  a "inženýrským" zkosením  $\gamma_{xy} = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$  atd. Užitečné je spojení fyzikálních rovnic ve tvaru (1.33) a geometrických rovnic (1.37). Za předpokladu, že  $\varepsilon_{0kl} = 0$ , vyjde

$$\sigma_{ij} = 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (1.38)$$

Poslední rovnice platí i v případě *rovinné deformace*, kdy sčítání probíhá od 1 do 2.

Tenzorovou rovnici pro *rovinnou napjatost* obdržíme z předchozího vztahu záměnou  $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$  za  $\nu$ . Po malé úpravě vysvitne, že

$$\sigma_{ij} = 2G \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (1.39)$$

Zpět k rovnici (1.38) bychom se naopak dostali záměnou  $\hat{\nu} = \nu/(1-\nu)$  za  $\nu$ .

Pro úplnost uvedeme tenzorový přepis Cauchyho rovnic (1.1)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i = 0 \quad (1.40)$$

a okrajových podmínek (1.6) a (1.7)

$$\sigma_{ij} n_j - \bar{p}_i = 0, \quad u_i - \bar{u}_i = 0, \quad (1.41)$$

kde  $n_j$  jsou složky jednotkové normály (směrové kosiny) k hraničnímu povrchu.

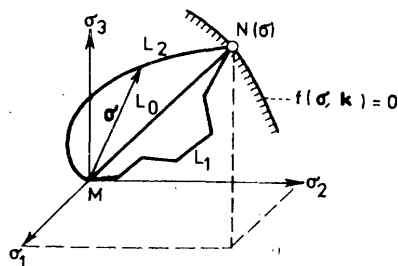
## 1.3 Pružnoplastický materiál

### 1.3.1 Podmínka plasticity a funkce zatěžování

Napjatost v jistém bodě tělesa lze znázornit v prostoru (hlavních) napětí vektorem  $\sigma$  (obr. 1.2). S nárůstem zatížení se pohybuje koncový bod tohoto vektoru po jisté křivce  $L_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , zvané dráha zatěžování. Hranice mezi pružným a plastickým stavem je v prostoru napětí vymezena plochou plasticity, popsanou skalární funkcí - podmínkou plasticity

$$f(\sigma, k) = 0. \quad (1.42)$$

Složkami vektoru  $k = \{k_1, k_2, \dots\}^T$  jsou jisté materiálové konstanty.



Obr. 1.2: Dráhy zatěžování

Jednou z nejužitečnějších je *Druckerova-Pragerova* podmínka s materiálovou konstantou  $k_1 = k$

$$f(\sigma, k) = \sqrt{\mathcal{J}_2} + \Psi(\sigma_v) - k = 0, \quad (1.43)$$

v níž při použití sumáčního pravidla

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (1.44)$$

je střední napětí, které je úměrné prvnímu invariantu tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$ , a

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} [s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)] \quad (1.45)$$

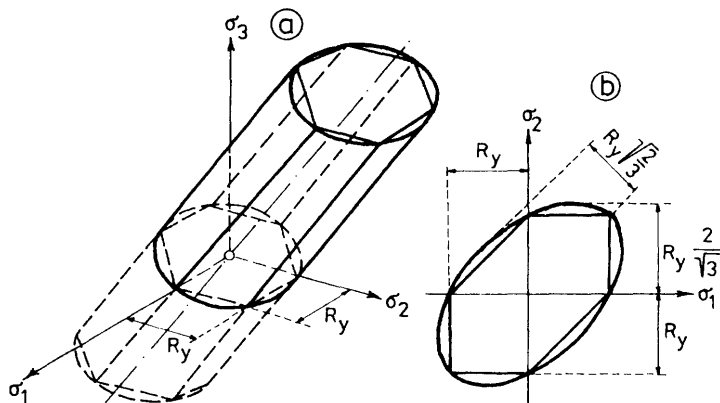
je druhý invariant deviatoru tenzoru napětí  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_v \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  je izotropní tenzor (Kroneckerovo delta). Konečně  $\Psi$  je empirická, monotónně

rostoucí funkce (často se klade  $\Psi = \alpha I_1$ ) a  $k, \alpha$  jsou kladné materiálové konstanty. Rovnicí (1.43) je v prostoru hlavních napětí popsána rotační plocha, jejíž osou je hydrostatická osa  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Závislost na  $\sigma_v$  je podstatná u materiálů, které mají rozdílnou mez plasticity v tahu a tlaku. Proto se Druckerova-Pragerova podmínka uplatnila zejména v mechanice zemin, při vyšetřování přetvárných vlastností betonu, ale i jiných poréznych materiálů.

U řady materiálů, jako je ocel, je závislost na  $\sigma_v$  z praktického hlediska zanedbatelná a rovnice (1.43) přechází ve vyjádření *Misesovy-Huberovy-Henckyho* podmínky (M-H-H)

$$f(\sigma, k) = \sqrt{\mathcal{J}_2} - k = 0. \quad (1.46)$$

V prostoru napětí ji znázorňuje rotační válec (obr. 1.3). Zavedme ekviva-



Obr. 1.3: Podmínky plasticity (Tresca, M-H-H)

lentní napětí

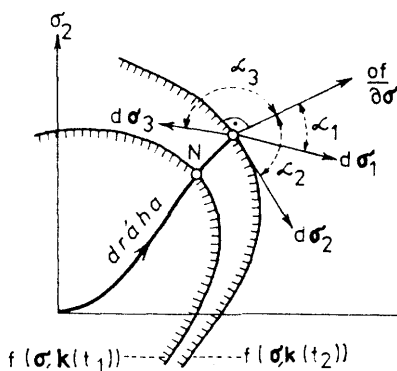
$$\sigma_{eq} = \sqrt{3\mathcal{J}_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (1.47)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)]^{1/2},$$

kteří se při jednoosé napjatosti (např. ve směru osy  $x$ ) rovná působícímu napětí. Porovnáním vzorců (1.46) a (1.47) okamžitě vysvitne, že  $\sqrt{3}k = R_y$  (mez plasticity).

Válci příslušejícímu podmínce M-H-H je vepsán šestiboký hranol, znázorňující *Trescovu* podmínku maximálního tečného napětí. Obr. 1.3b ukazuje průnik plochy plasticity s rovinou  $\sigma_3 = 0$ . Křivky plasticity (elipsa, šestiúhelník) určují hranice mezi pružnou a plastickou oblastí při rovinné napjatosti ( $\sigma_3 = 0$ ).

Pokud materiál vykazuje zpevnění, plocha popsaná rovnicí (1.42) se zvětšuje v závislosti na historii zatížení, což vystihují parametry zpevnění <sup>1</sup>  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$ . Z tohoto důvodu je  $f$  nazývána *funkcí zatěžování*. V obr. 1.4



Obr. 1.4: Křivky zatěžování (plasticity)

jsou vyznačeny dvě křivky zatěžování (plasticity) příslušné dvěma časovým okamžikům  $t_1, t_2$ . Nerovnost  $f(\sigma, \mathbf{k}) < 0$  popisuje buď počáteční pružné zatěžování nebo pružné odtěžování po předchozí plastifikaci.

Jestliže materiál zůstává v plastickém stavu, zůstává v platnosti i rovnice (1.42) (stavy  $f(\sigma, \mathbf{k}) > 0$  nemohou podle definice funkce  $f$  nastat) a její diferenciací dojdeme k *podmínce konsistence*

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k_k} dk_k \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \right)^T d\mathbf{k} = 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

<sup>1</sup>O různých druzích zpevnění je pojednáno např. v [69].

<sup>2</sup>Časovými okamžiky  $t_1, t_2$  identifikujeme dva napjatostní stavy. Pružnoplastické vlastnosti materiálu jsou na čase nezávislé.

kde

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right\}^T, \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial k_1}, \frac{\partial f}{\partial k_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial k_k} \right\}^T.\end{aligned}\quad (1.49)$$

Z tvaru rovnice (1.43) je vidět, že materiálové konstanty lze zvolit znaménkově tak, aby při zatěžování  $(\partial f / \partial \mathbf{k})^T d\mathbf{k} < 0$ . Na základě podmínky konsistence lze pak definovat *kritérium zatěžování*

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \begin{cases} > 0 & \text{plastické zatěžování} \\ = 0 & \text{neutrální zatěžování} \\ < 0 & \text{pružné odtěžování.} \end{cases} \quad (1.50)$$

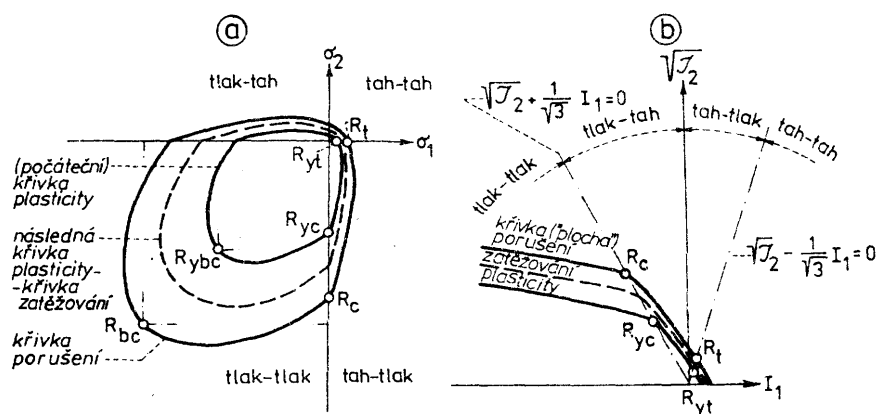
Kritérium je vyjádřeno skalárním součinem vektorů  $d\boldsymbol{\sigma}$  a  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ , které v obr. 1.4 postupně svírají úhly  $\alpha_1 < \pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_3 > \pi/2$ . Podrobnější komentář lze nalézt v [69].

Užitečnou ilustrací uvedených vzorců je *Chenova* podmínka používaná k popisu plasticity betonu (viz [38]). Je složena ze dvou funkcí:  $f_c$  platí jen v oblasti tlaku,  $f_t$  určuje vznik plastického přetváření betonu namáhaného tahem nebo tlakem (při obecné napjatosti). Rozdělení dvouosé napjatosti na uvedené oblasti, neboli zóny, je zřejmé z obr. 1.5a. Zónování obecné napjatosti je nejlépe patrné ze znázornění v rovině souřadnic  $(I_1, \sqrt{J_2})$  - obr. 1.5b. Jednotlivé oblasti jsou pak vymezeny podmínkami:

$$\begin{aligned}\text{a) tlak - tlak} & \quad I_1 < 0, \quad \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0; \\ \text{b) tlak - tah} & \quad I_1 < 0, \quad \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} > 0; \\ \text{c) tah - tah} & \quad I_1 > 0, \quad \sqrt{J_2} - \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0; \\ \text{d) tah - tlak} & \quad I_1 > 0, \quad \sqrt{J_2} - \frac{I_1}{\sqrt{3}} > 0.\end{aligned}\quad (1.51)$$

V tlakové zóně vymezené podmínkami (1.51a) je *počáteční plocha plasticity* popsána rovnicí

$$f_c(\boldsymbol{\sigma}) = J_2 + \frac{A}{3} I_1 - k^2 = 0. \quad (1.52)$$



Obr. 1.5: Chenova podmínka plasticity pro beton

V zónách napjatosti zahrnujících tah, tah a tlak, které jsou vymezeny podmínkami (1.51b,c,d)

$$f_i(\sigma) = \mathcal{J}_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A}{3} I_1 - k^2 = 0. \quad (1.53)$$

Materiálové konstanty  $A, k$  v rovnicích (1.52) a (1.53) se určí na základě experimentálně zjištěných mezí plasticity  $R_y, R_{yc}$  při jednoosém namáhání betonu v tahu a tlaku a  $R_{ybc}$  při dvouosém tlaku, a to ze vzorců stanovených pro jednotlivé zóny:

$$\begin{aligned} \text{tlak - tlak} \quad A &= \frac{R_{ybc}^2 - R_{yc}^2}{2R_{ybc} - R_{yc}}, \quad k^2 = \frac{R_{yc}R_{ybc}(2R_{yc} - R_{ybc})}{3(2R_{ybc} - R_{yc})}, \\ \text{tah, tah - tlak} \quad A &= \frac{R_{yc} - R_{yt}}{2}, \quad k^2 = \frac{R_{yc}R_{yt}}{6}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

*Následné plochy plasticity*, které vznikají "rozpínáním" plochy plasticity (obr. 1.5) definované rovnicemi (1.52) a (1.53) jsou popisovány funkcemi: V oblasti tlakového namáhání vymezené podmínkami (1.51a)

$$f_c(\sigma, \kappa) = \mathcal{J}_2 + \frac{\beta}{3} I_1 - \kappa^2(1 - \frac{\alpha}{3} I_1) = 0. \quad (1.55)$$

V zónách tahu, tahu a tlaku (1.51b,c,d)

$$f_t(\sigma, \kappa) = \mathcal{J}_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{\beta}{3} I_1 - \kappa^2(1 - \frac{\alpha}{3} I_1) = 0. \quad (1.56)$$



Konstanty  $\alpha, \beta$  jsou určeny výrazy:

$$\alpha = \frac{A_u - A}{k_u^2 - k^2}, \quad \beta = \frac{Ak_u^2 - A_uk^2}{k_u^2 - k^2}. \quad (1.57)$$

Konstanty  $A, k$  byly předepsány vzorcí (1.54). Podle téhož předpisu vypočteme i konstanty  $A_u, k_u$ , jestliže ve vzorcích (1.54) nahradíme meze plasticity pevnostmi betonu  $R_t, R_c$  při jednoosém tahu a tlaku a  $R_{bc}$  při dvouosém tlaku.

Parametr zpevnění  $\kappa$  je určen ekvivalentní plastickou deformací, o níž se podrobněji zmíníme v následujícím odstavci (vzorec (1.73)). Konstanty  $\alpha, \beta$  jsou zvoleny tak, že při  $\kappa = k$  se funkce zatěžování (1.55) resp. (1.56) zredukuje na počáteční funkce plasticity (1.52) resp. (1.53).

Pro  $\kappa = k_u$  se funkce (1.55) resp. (1.56) stávají *podmínkami porušení*. Pro tlakovou zónu

$$f_{cu}(\sigma) = \mathcal{J}_2 + \frac{A_u}{3} I_1 - k_u^2 = 0. \quad (1.58)$$

Pro zónu tahu, tahu a tlaku

$$f_{tu}(\sigma) = \mathcal{J}_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_u}{3} I_1 - k_u^2 = 0. \quad (1.59)$$

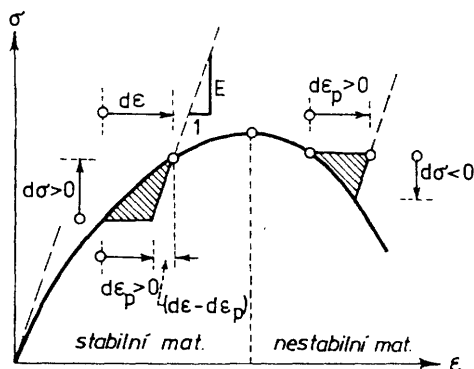
Funkce porušení jsou zobrazeny křivkou porušení v obr. 1.5. Při splnění podmínek porušení, tj. dosáhne-li koncový bod vektoru napětí  $\sigma$  plochy porušení v tlakové oblasti, dochází k rozdrčení betonu; v zóně tahu, nebo tahu a tlaku, nastane roztržení betonu. Výstižněji lze podmínky porušení formulovat na základě energetického kritéria (čl. 1.4).

### 1.3.2 Konstitutivní rovnice pro pružnoplastický materiál

Pro materiál, který lze definovat ve smyslu Druckerova postulátu pro  $d\sigma^T d\epsilon_p > 0$  (obr. 1.6) jako stabilní, lze napsat v souladu s první nerovností (1.50) úměru  $d\sigma^T d\epsilon_p = d\lambda d\sigma^T \partial f / \partial \sigma$ ,  $d\lambda > 0$ . Jejím zřejmým důsledkem je zákon plastického přetváření přidružený k podmínce plasticity (asociovaný)

$$d\epsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (1.60)$$

Rovnice (1.60) je nazývána *podmínkou normality*, neboť ukazuje, že vektor přírůstku plastické deformace je kolmý k ploše  $f = 0$ . Podmínka plasticity má tak význam *plastického potenciálu*.



Obr. 1.6: K Druckerovu postulátu stability

Parametr  $d\lambda$  vyloučíme pomocí podmínky konzistence (1.48), kterou k tomuto účelu zapíšeme v *Melanově* tvaru

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma - H d\lambda = 0, \quad (1.61)$$

kde

$$H = -\left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)^T \frac{dk}{d\lambda} \quad (\text{pro } \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma \geq 0) \quad (1.62)$$

je *modul plastického zpevnění*.

Z obr. 1.6 je vidět, že

$$d\sigma = D_e(d\epsilon - d\epsilon_p) = D_e\left(d\epsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right), \quad (1.63)$$

kde  $D_e$  je matice tuhosti pružného materiálu.

Po dosazení výrazu pro  $d\sigma$  z (1.63) do (1.61) obdržíme rovnici pro  $d\lambda$  a opětovným dosazením do (1.63) najdeme konečné vyjádření konstitutivního vztahu

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon, \quad (1.64)$$

kde

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T D_e}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T D_e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) + H} \quad (1.65)$$

je matice tuhosti pružnoplastického materiálu (asociovaný zákon plastického přetváření).

U materiálů s vnitřním třením funkce plastického potenciálu  $g = g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})$  není totožná s funkcí zatěžování  $f = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})$ . Odvození analogické předchozímu postupu vede k nesymetrické matici tuhosti pružnoplastického materiálu (neasociovaný zákon plastického přetváření)

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}_e}{\left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}_e \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + H}. \quad (1.66)$$

V tomto případě již materiál není vázán na Druckerův postulát stability. Vztah (1.66) platí i v oblasti, kde dochází k deformačnímu změkčení (strain softening) a kde je  $H < 0$ . Problematikou deformačního změkčení se budeme podrobněji zabývat v následujícím článku.

Uvedme konečný výsledek výpočtu podle tohoto vzorce pro *Druckerovu-Pragerovu* podmínku (1.43) a funkci zatěžování [10]

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}) = \sqrt{\mathcal{J}_2} + \Phi(\sigma_v) - k = 0, \quad (1.67)$$

která se liší od  $f$  jen ve členu vyjadřujícím vliv  $\sigma_v$ . Při označení<sup>3</sup>

$$H = \frac{dk}{d\lambda}, \quad \beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_v}, \quad \beta' = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_v} \quad (1.68)$$

( $\beta, \beta'$  jsou parametry materiálové dilatace a vnitřního tření) vychází

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\left( \frac{G}{\bar{\tau}} \mathbf{s} + K\beta \mathbf{m} \right) \left( \frac{G}{\bar{\tau}} \mathbf{s} + K\beta' \mathbf{m} \right)^T}{G + K\beta\beta' + H}. \quad (1.69)$$

Ve vzorci značí  $\bar{\tau} = \sqrt{\mathcal{J}_2}$  intenzitu napětí,  $G$  je modul pružnosti ve smyku podle (1.28) a

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1.70)$$

<sup>3</sup>Záměnou funkce  $g$  za  $f$  dostáváme z (1.62)  $H = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}}{d\lambda} = \frac{d\mathbf{k}}{d\lambda}$ .

je modul objemové pružnosti. Zavedené vektory mají následující význam

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \{s_x, s_y, s_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T, \\ \mathbf{m} &= \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T. \end{aligned} \quad (1.71)$$

V případě podmínky *M-H-H* položíme  $\beta = \beta' = 0$ , takže

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{G^2 \mathbf{ss}^T}{\bar{r}^2(G+H)}. \quad (1.72)$$

Zpevnění materiálu je zpravidla vyjádřeno funkcí jediného parametru  $k = k(\kappa)$ , kde  $d\kappa = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eqp}$ . Ekvivalentní plastická deformace

$$\varepsilon_{eqp} = \sum d\varepsilon_{eqp} \quad (1.73)$$

$$= \sum \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ d\varepsilon_{xp}^2 + d\varepsilon_{yp}^2 + d\varepsilon_{zp}^2 + \frac{1}{2}(d\gamma_{yzp}^2 + d\gamma_{zxp}^2 + d\gamma_{xyp}^2) \right]^{1/2}$$

se při jednoosém namáhání rovná plastické deformaci v uvažovaném směru. Položíme-li např.  $\varepsilon_{yp} = \varepsilon_{zp} = -(1/2)\varepsilon_{xp}$ , vyjde  $\varepsilon_{eqp} = \varepsilon_{xp}$  (uvažujeme součinitel příčné kontrakce při plném zplastizování). Modul plastického zpevnění nabude podle (1.62) tvaru

$$H = \frac{dk}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\sigma_{eq}}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\sigma_{eq}}{d\kappa} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right)^T \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{d\lambda}.$$

S uvážením vztahu (1.60) a výše uvedené definice parametru zpevnění  $\kappa$  dostaneme dále

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}\sigma_{eq}} \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eqp}} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že pro podmínku *M-H-H*

$$\boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{J_2} = \sigma_{eq}/\sqrt{3},$$

takže

$$H = \frac{1}{3} H', \quad \text{kde } H' = \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eqp}}. \quad (1.74)$$

Odvozený vzorec je návodem, jak získat jednoduše modul plastického zpevnění z jednoosé zkoušky.

S použitím (1.74) nabude výraz (1.72) známého tvaru z [69], str.25:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{9G^2 \mathbf{ss}^T}{\sigma_{eq}^2(3G + H')}. \quad (1.75)$$

Zbývá poznamenat, že

$$\mathbf{ss}^T = \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z & s_x \tau_{yz} & s_x \tau_{zx} & s_x \tau_{xy} \\ & s_y^2 & s_y s_x & s_y \tau_{yz} & s_y \tau_{zx} & s_y \tau_{xy} \\ & & s_z^2 & s_z \tau_{yz} & s_z \tau_{zx} & s_z \tau_{xy} \\ & & & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz} \tau_{zx} & \tau_{yz} \tau_{xy} \\ & \text{sym.} & & & \tau_{zx}^2 & \tau_{zx} \tau_{xy} \\ & & & & & \tau_{xy}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.76)$$

Vyškrtnutím příslušných řádků a sloupců v matici materiálové tuhosti okamžitě vyplyne redukce pro případ *rovinné deformace*.

Z praktického hlediska jsou nejčastěji užívány konstitutivní vztahy pro *rovinnou napjatost*. Uvedeme je bez odvození s odvoláním na [53]

$$d\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{ep} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.77)$$

kde

$$R = s_x^2 + 2\nu s_x s_y + s_y^2, \quad P = A + \tau_{xy}^2 / (1 + \nu),$$

$$Q = R + 2(1 - \nu^2)P,$$

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} s_y^2 + 2P, & -s_x s_y + 2\nu P, & -(s_x + \nu s_y) \frac{\tau_{xy}}{1 + \nu} \\ & s_x^2 + 2P, & -(s_y + \nu s_x) \frac{\tau_{xy}}{1 + \nu} \\ \text{sym.} & & \frac{R}{2(1 + \nu)} + A(1 - \nu) \end{bmatrix}.$$

Parametr  $A$  uvažuje kromě izotropního zpevnění i možnost kinematického zpevnění podle *Pragerovy* resp. *Zieglerovy* hypotézy (ideální Bauschingerův efekt, srov. [69])

$$A = \frac{2}{9E} \sigma_0^2 H', \quad (1.78)$$

popř. komplexní nelineární zpevnění podle *Marquise*

$$A = \frac{2}{3} \beta_0 [2\sigma_0^2 - (\Phi_0 + \Psi e^{-\omega \varepsilon_{eq p}}) \sigma_0 T], \quad (1.79)$$

$$T = 2(s_x x_{11} + \tau_{xy} x_{12} + s_y x_{22}) + s_y x_{11} + s_x x_{22}.$$

Pět parametrů  $\sigma_0, \beta_0, \Phi_0, \Psi, \omega$  je třeba získat metodou pokusu a omylu z experimentálních dat při jednoosém namáhání. Složky tenzoru  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ) se počítají ze zákona

$$dx_{ij} = \frac{2}{3} \beta_0 \left[ d\varepsilon_{ij p} - \frac{2}{3} (\Phi_0 + \Psi e^{-\omega \varepsilon_{eq p}}) d\varepsilon_{eq p} x_{ij} \right], \quad (1.80)$$

při čemž  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = (1/2) \gamma_{xy}$ .

## 1.4 Materiál s poškozením

Až dosud jsme předpokládali, že materiál je spojitým prostředím vyhovujícím jistým apriorním předpokladům, jako je Druckerův postulát stability ap. Jedná se o zjevnou idealizaci reálného materiálu, jehož mikrostruktura je charakterizována specifickým uspořádáním mikrotrhlin, mikroductin a dalších defektů. Uvedené materiálové diskontinuity se v procesu zatěžování mění co do počtu i rozměru (srůstání a štěpení trhlin). Tento jev se makroskopicky projevuje poklesem tuhosti a pevnosti materiálu a je obecně nazýván *poškozením* (damage).

Jedním z důsledků rozvinutého poškození je deformační změkčení materiálu, charakterizované ztrátou pozitivní definitnosti materiálové matice tuhosti (sestupná větev v obr. 1.6). Typickým projevem změkčení je intenzivní růst deformací v úzkých zónách (v rovině v pásech), tzv. *lokalizace*. Ve statických úlohách je lokalizace spojena se ztrátou elipticity přírůstkových rovnic rovnováhy, s existencí bifurkace z homogenního do nehomogenního stavu deformace a s výskytem vícenásobných rovnovážných drah (srov. [61], [10], [14]). Duktilní materiály jeví tendenci k selhání smykem, jež následuje po předchozím výrazném plastickém přetvoření lokalizovaném rovněž v úzkých zónách.

Pro popis deformačního změkčení byla vytvořena celá řada konstitutivních modelů, ať fenomenologických či mikro(mezo)mechanických, jejichž podrobný výčet lze nalézt v [10]. Z fenomenologických modelů jsme se již

zmínili o variantě založené na neasociovaném zákonu plastického přetváření (1.66). Uvedenou koncepci, umožňující sledovat celý vývoj poškození (růst mikrotrhlin i nukleace nových defektů) ve stabilním i nestabilním stadiu, poskytuje *mechanika poškození* (damage mechanics), která se ve spojení s *lomovou mechanikou*<sup>4</sup> stává mocným nástrojem materiálového inženýrství. Ucelenou informací o vývoji, současném stavu a cílech mechaniky poškození je práce [47].

Poškození je v konstitutivních vztazích kontinuálního modelu vystiženo jednou nebo několika vnitřními proměnnými  $\omega_n$ , které se v klasické mechanice poškození vztahují k materiálovému bodu tělesa (veličina  $\omega_n$  vyjadřuje hustotu mikrotrhlin na ploše s normálou  $\mathbf{n}$ ,  $\omega_n \in \langle 0, 1 \rangle$ ).

Potřeba vystihnout interakci poškození mezi dvěma materiálovými body vedla k vytvoření *nelokální kontinuální koncepce* (viz [10]). Deformace vstupující do konstitutivních rovnic se průměrují s jistou vahou nad oblastí, jejíž charakteristický rozměr (1D-délka úsečky, 2D-průměr kruhu, 3D-průměr koule) je *materiálovou konstantou*. Průměrování zajišťuje, že zóna lokalizace neklesne pod určitou minimální mez, která je pro kontinuální model dána strukturou materiálu.

Uvedené zjištění je důležité z hlediska MKP. Velikost prvku, jakožto nejmenší makročástice, předznamenává v lokálním modelu velikost zóny lokalizace. Bez použití vhodného nástroje limitujícího rozsah zóny lokalizace by se její šířka zmenšovala s rozměrem prvku k nule a k téže hodnotě by klesala i energie v zóně disipovaná, což je fyzikálně nepřijatelné (při poškození musí dojít k nenulové disipaci). Nepříznivým důsledkem je pak značná citlivost výpočtů vycházejících z lokálních modelů na rozměr sítě v MKP. Tvar sítě navíc diktuje jisté směry (dané orientací hran nebo diagonál prvku), které model preferuje při vytváření pásů lokalizace.

### 1.4.1 Model křehkého porušování

Konstitutivní vztahy mechaniky poškození se vyjadřují pomocí vhodných stavových funkcí. V souvislosti s termodynamickým kritériem stability je o těchto funkcích a vztazích mezi nimi stručně pojednáno v čl. 1.8. Zde vystačíme s pojmem hustoty volné energie, která se v mechanice poškození značí  $\rho\psi$  a při jednoosé napjatosti je vyjádřena vztahem

$$\rho\psi = \frac{1}{2} (1 - \omega) E \varepsilon^2. \quad (1.81)$$

<sup>4</sup>Lomové mechanice je věnován samostatný článek 7.4.

Jednotlivé symboly mají následující význam:

- $\rho$  je hustota
- $E$  - modul pružnosti
- $\varepsilon$  - pružná deformace
- $\omega$  - funkce poškození.

Souvislost s hustotou deformační energie lineárně pružného materiálu  $W = (1/2) E\varepsilon^2$  je zřejmá.

Vztah pro napětí obdržíme derivací (1.81) podle  $\varepsilon$  (srov. s rovnicí (1.3))

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1 - \omega) E\varepsilon. \quad (1.82)$$

Zobecněná termodynamická síla sdružená s vnitřní proměnnou  $\omega$  (rychlost uvolněné energie poškození) je dána vzorcem [47]

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = \frac{E\varepsilon^2}{2} > 0. \quad (1.83)$$

Rychlost disipace energie vztahená na jednotku objemu

$$\Phi = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} = Y\dot{\omega} \geq 0. \quad (1.84)$$

Zbývá uvést *evoluční rovnici* vyjadřující vztah mezi  $\dot{\omega}, \omega, \varepsilon$ . Při obecné napjatosti se odvozuje z předpokladu, že vektor rychlosti rozvoje poškození je kolmý k experimentálně zjištěné ploše poškození. V jednoosé napjatosti má evoluční rovnice obecný tvar  $\dot{\omega} = f(\varepsilon, \omega)$ . Pro beton se osvědčilo jednoduché vyjádření doporučené v [10]

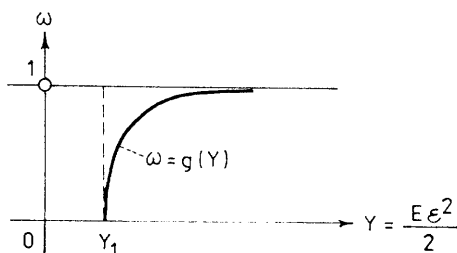
$$\omega = g(Y) = 1 - [1 + b(Y - Y_1)]^{-n}, \quad (1.85)$$

v němž práh lokálního poškození  $Y_1$  má rozdílnou hodnotu pro tah a tlak,  $b$  a  $n$  jsou kladné materiálové konstanty. Průběh funkce  $g$  je schematicky znázorněn na obr. 1.7.

Poškození roste jedině při zatěžování. Při odtěžování a opětovném zatěžování po předchozím odtížení  $\dot{\omega} = 0$ , takže zatěžovací kritérium lze zapsat pomocí funkce zatěžování  $F = F(\omega)$  takto:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} > 0 & \quad , \quad \text{jestliže } F(\omega) = 0 \text{ a } \dot{F}(\omega) = 0, \\ \dot{\omega} = 0 & \quad , \quad \text{jestliže } F(\omega) < 0 \text{ nebo jestliže } F(\omega) = 0 \text{ a } \dot{F}(\omega) < 0. \end{aligned} \quad (1.86)$$



Obr. 1.7: Funkce  $g = g(Y)$ 

Všimněme si, že obě podmínky jsou v souladu s disipační nerovností (1.84). Funkce zatěžování se vyjadřuje ve tvaru

$$F(\omega) = \omega - k(\omega). \quad (1.87)$$

Počáteční hodnota parametru změkčení  $k$  je rovna nule a postupně nabývá největší hodnoty  $\omega$ , dosažené v procesu poškození od počátku až do daného stavu.

Diferenciací rovnice (1.82) plyne vyjádření

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} d\omega \\ &= (1 - \omega) E d\varepsilon - E\varepsilon d\omega = D_1(\omega) d\varepsilon - D_2(\varepsilon) d\omega. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Spojením tohoto vztahu se vzorcem (1.85) a úpravou vyjde

$$d\sigma = D_\omega d\varepsilon, \quad (1.89)$$

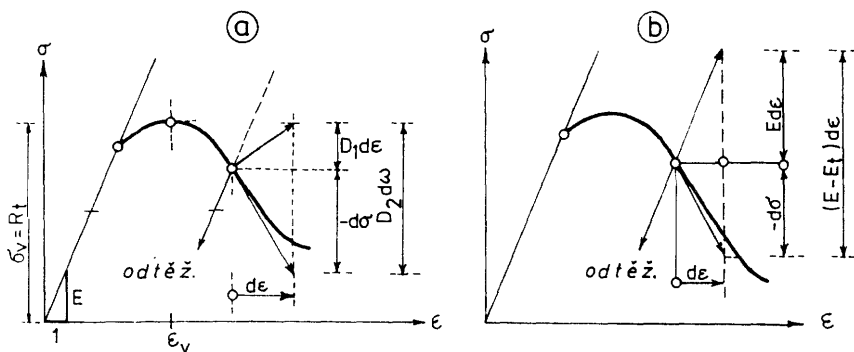
kde

$$D_\omega = [1 - g(Y)] E - (E\varepsilon)^2 \frac{dg}{dY} = D_1 - D_2 A. \quad (1.90)$$

První člen v (1.90) zahrnuje podle (1.88) poškození akumulované během předchozí deformační historie, druhý člen se objevuje jen při zatěžování (obr. 1.8a). Evoluční funkce  $A$  je závislá na tvaru evoluční rovnice (1.85).

Konstitutivnímu vztahu pro deformační změkčení lze dát poněkud přehlednější tvar rozkreslením složek tvořících přírůstek napětí podle obr. 1.8b. Při označení  $E_t = D_\omega < 0$  můžeme pro případ zatěžování ( $d\varepsilon > 0$ ) psát

$$d\sigma = E d\varepsilon - (E - E_t) d\varepsilon. \quad (1.91)$$



Obr. 1.8: Deformační změkčení

Při odtěžování ( $d\epsilon < 0$ ) platí

$$d\sigma = E d\epsilon. \quad (1.92)$$

Porovnáním vztahů (1.88) a (1.91) vysvitne, že

$$E \left( \omega + \epsilon \frac{d\omega}{d\epsilon} \right) = E - E_t,$$

odkud

$$\epsilon \frac{d\omega}{d\epsilon} = [1 - \omega - E_t/E]. \quad (1.93)$$

Při *obecné napjatosti* lze vzorec (1.88) zobecnit do tvaru

$$d\sigma = \mathbf{D}_1(\omega) d\epsilon - \mathbf{D}_2(\epsilon, \omega) d\omega, \quad (1.94)$$

kde  $\mathbf{D}_1$  a  $\mathbf{D}_2$  jsou matice materiálové tuhosti, jejichž význam je patrný ze schematického obrázku 1.8a. Při obecné napjatosti je dále třeba vzít v úvahu kromě evoluční rovnice též kinematiku růstu mikrotrhlin, tj. změnu tvaru a orientace mikrotrhlin způsobenou deformací materiálu. Konečně vyjádření konstitutivní rovnice pro model křehkého poškození má tvar

$$d\sigma = (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}) d\epsilon, \quad (1.95)$$

kde  $\mathbf{A}$  je evoluční matice a  $\mathbf{B}$  je matice transformační (srov. [47]).

V inženýrské praxi se z hlediska kinematiky růstu mikrotrhlin uplatnily dvě zjednodušené varianty řešení používané zejména v analýze betonových konstrukcí (srov. též [23])

a) V novější variantě "rozetřené" trhlinky rotují tak, že jejich směr sleduje normálu ke směru hlavního tahu  $\sigma_I$ . Na plochách mikrotrhlin tudíž nevzniká žádný smyk. Za tohoto předpokladu odvodili Bažant a Lin v [11] konstitutivní rovnici, která má ve složkovém zápisu tvar

$$\varepsilon_{ij} = \left[ C_{ijkl} + \frac{\omega}{(1-\omega)E'} n_i n_j n_k n_l \right] \sigma_{kl}. \quad (1.96)$$

Rovnice (1.96) je zřejmým zobecněním vztahu

$$\varepsilon = \left[ \frac{1}{E} + \frac{\omega}{(1-\omega)E'} \right] \sigma = (\varepsilon_e + \varepsilon_{fr}) \frac{\sigma}{E}, \quad (1.97)$$

který je inverzní k (1.82). Za předpokladu, že k zvětšení pružné deformace poškozením dochází ve směru hlavního napětí  $\sigma_I$ , můžeme psát  $\varepsilon_{I,fr} = (\sigma_I/E')\omega/(1-\omega)$ . K složkovému zápisu (1.96) dojdeme transformací  $\varepsilon_{ij,fr} = n_i n_j \varepsilon_{I,fr}$ ,  $\sigma_I = n_k n_l \sigma_{kl}$ , kde  $n_i$  jsou složky jednotkového vektoru orientovaného do směru  $\sigma_I$ . Pružná deformace je v (1.96) vyjádřena tenzorem poddajnosti lineární pružného materiálu  $C_{ijkl}$  definovaného vzorcem (1.36). Za  $E'$  se dosazuje  $E$  v případě rovinné napjatosti (RN) a  $E/(1-\nu^2)$  v případě rovinné deformace (RD) a při obecné napjatosti. Maticový přepis rovnice (1.96) je triviální.

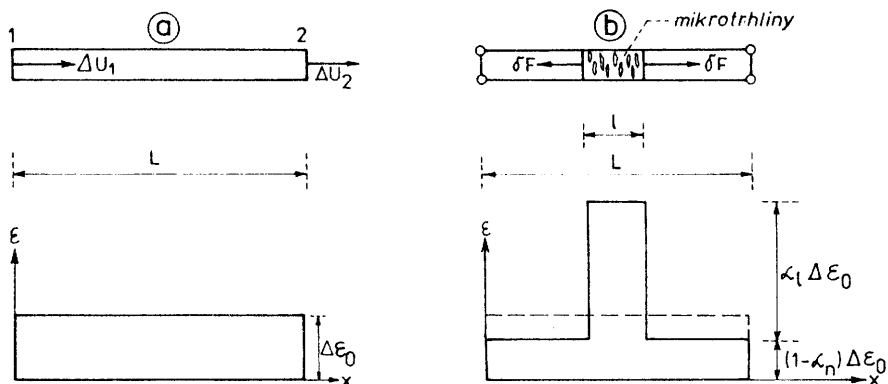
b) V klasické variantě se mikrotrhliny začnou tvořit ve směru kolmém ke směru hlavního tahu  $\sigma_I$ , když je poprvé dosaženo meze pevnosti  $R_t$ . Předpokládá se, že se orientace trhlin v procesu deformace dále nemění. Na plochách trhlin působí smyk, pro který se uvažuje tuhost  $r_s G$ , kde podle *Kolmarova* (srov. [23])

$$r_s = \frac{\ln(\varepsilon_n/c_1)}{c_2}. \quad (1.98)$$

Ve vzorci je  $\varepsilon_n$  deformace kolmá ke směru trhlin (rozevření trhlin) a  $c_1, c_2$  jsou konstanty závislé na stupni vyztužení. V této variantě se obvykle používá jednoduchý konstitutivní vztah pro ortotropní materiál (ortotropie je diktována směrem trhlin, viz odst. 1.2.1). Další podrobnosti lze nalézt v [23].

## 1.4.2 Lokalizace

Podstatu lokalizace vysvětlíme na příkladě prutu délky  $L$  s předpokládanou zabudovanou zónou lokalizace délky  $l$  (obr.1.9).



Obr. 1.9: Lokalizace (homogenní a nehomogenní deformace)

Za předpokladu, že přetvoření prutu bude předepsáno posuny koncových průřezů  $u_1, u_2$  (přetvoření vyvolává dokonalý stroj), libovolné přírůstky  $\Delta u_2 > \Delta u_1$  způsobí konstantní přírůstek homogenní deformace

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\Delta u_2 - \Delta u_1) = \mathbf{B} \Delta \mathbf{r}, \quad (1.99)$$

kde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \{-1, 1\}, \quad \Delta \mathbf{r} = \{\Delta u_1, \Delta u_2\}^T, \quad (1.100)$$

a to bez ohledu na to, zda se pohybujeme před nebo za vrcholem diagramu na obr. 1.8a, a k lokalizaci nedojde. *Lokalizace je bifurkací z homogenního do nehomogenního stavu deformace.* Přeskok z jednoho do druhého stavu odstartujeme vhodnou imperfkcí v poli napětí (vyvolanou např. dodatečně vloženou rovnováhovou soustavu sil  $\pm \delta F$  (obr. 1.9b), zmenšením průřezové plochy ve střední části o  $\delta A$  ap.) a to těsně před tím, než napětí dosáhne vrcholové hodnoty  $\sigma_v = R_t$ . Ve střední části prutu se dostaneme na nestabilní větev diagramu s příslušným nárůstem deformace a poklesem napětí (zatěžování). Imperfekce naopak iniciuje v krajních částech zmenšení deformace. Protože rovnováha musí být po odstranění imperfekce zachována, musí dojít i v krajních částech prutu k poklesu napětí (odtěžování). Nehomogenní pole deformace je znázorněno na obr. 1.9b a jeho průběh je vyjádřen rovnicí

$$\Delta \varepsilon = \overline{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{r}, \quad (1.101)$$

kde

$$\bar{\mathbf{B}} = (1 - \alpha_n + \langle \alpha_l \rangle) \mathbf{B} \quad \text{a} \quad \langle \alpha_l \rangle = \begin{cases} \alpha_l & \text{uvnitř zóny lokalizace} \\ 0 & \text{vně zóny lokalizace} \end{cases} \quad (1.102)$$

Z podmínky spojitosti prutu

$$\int_0^L d\varepsilon = [(1 - \alpha_n + \alpha_l)l + (1 - \alpha_n)(L - l)] \mathbf{B} \Delta \mathbf{r} = \Delta u_2 - \Delta u_1 \\ = L \mathbf{B} \Delta \mathbf{r}$$

vychází

$$\alpha_l = \alpha_n \frac{L}{l},$$

takže vzorec (1.102) přejde do tvaru

$$\bar{\mathbf{B}} = \left[ 1 + \alpha_n \left( \left\langle \frac{L}{l} \right\rangle - 1 \right) \right] \mathbf{B}. \quad (1.103)$$

Lomené závorky mají analogický význam jako ve vztahu (1.102).

Konečně z podmínky spojitosti napětí na rozhraní obou zón,  $\Delta \sigma_l = \Delta \sigma_n$ , vypočteme hodnotu součinitele  $\alpha_n$  v závislosti na tečnových tuhostech  $D_l = E_l$  (v zóně lokalizace) a  $D_n = E$  (vně této zóny). Z rovnosti

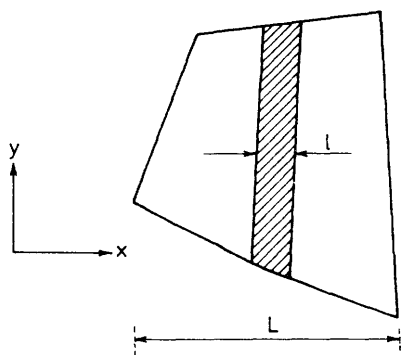
$$D_l \left[ 1 + \alpha_n \left( \frac{L}{l} - 1 \right) \right] \mathbf{B} \Delta \mathbf{r} = D_n [1 - \alpha_n] \mathbf{B} \Delta \mathbf{r}$$

vyjde

$$\alpha_n = \frac{D_n - D_l}{D_n - D_l + \frac{L}{l} D_l} = \frac{E - E_l}{E - E_l + \frac{L}{l} E_l}. \quad (1.104)$$

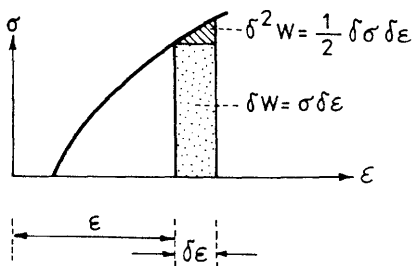
Popsali jsme postup, jakým lze zkonstruovat nehomogenní pole deformace na prutovém prvku s vloženou zónou lokalizace. Obdobným, i když poněkud komplikovanějším způsobem, lze sestavit nespojitě pole deformace (resp. matici  $\bar{\mathbf{B}}$ ) na čtyřúhelníku z obr. 1.10, popř. i u jiných typů prvků. Podrobnosti lze nalézt v [14].

Na závěr tohoto odstavce se zmíníme o lokalizaci z pohledu *stability*. Kriérium stability za zcela obecných podmínek je uvedeno v čl. 1.8. Na tomto místě se spokojíme se známým poznatkem, že rovnovážný stav je stabilní, je-li druhá variace potenciální energie systému kladná. Předpokládejme, že



Obr. 1.10: Zóna lokalizace zabudovaná do čtyřúhelníkového prvku

levý konec prutu na obr. 1.9b je vetknut a pravému konci je strojem vnučen posun  $u_2$  (zatěžování řízené posunem). Uvažujeme virtuální změnu pole posunů, při níž se protáhne prvek délky  $l$  o  $\delta u$  a zbývající část délky  $L - l$  se o tutéž změnu zkrátí. Protože oba konce prutu jsou fixovány, bude druhá variace potenciální energie systému (obr. 1.11) vyjádřena vztahem



Obr. 1.11: Variace potenciální energie

$$A \int_0^L \delta^2 W dx = \frac{A}{2} \frac{D_l}{l} \delta u^2 + \frac{A}{2} \frac{D_n}{L-l} \delta u^2 = \frac{1}{2} (K_l + K_n) \delta u^2, \quad (1.105)$$

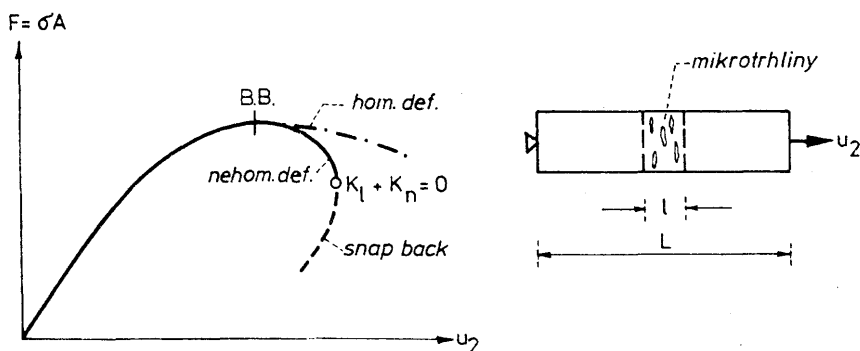
kde  $K_l = AD_l/l = AE_l/l$ , resp.  $K_n = AD_n/(L-l) = AE/(L-l)$  jsou tečnové tuhosti lokalizované, resp. nelokalizované části prutu,  $A$  je jeho průřezová plocha. Stabilní stav, který vyžaduje následné zvětšení posunu  $u_2$

o  $\Delta u_2 > 0$ , je podle (1.105) vymezen podmínkou

$$K_l + K_n > 0, \quad (1.106)$$

tj.  $-E_t/E < l/(L-l)$ .

Kritický stav nastává v případě, že  $K_l + K_n = 0$ . Po něm následuje jev, který nazveme *zvratem* (v anglosaské literatuře *snap back*). Závislost mezi silou  $F = \sigma A$  a vynuceným posunem  $u_2$  je znázorněn na obr. 1.12. Čerchovaně je vykreslena dráha odpovídající za bifurkačním bodem (B.B.) homogenní deformaci z obr. 1.8 (další podrobnosti lze nalézt v deváté kapitole).



Obr. 1.12: Bifurkace při lokalizaci (homogenní a nehomogenní deformace)

### 1.4.3 Disipace energie. Rozměrový efekt.

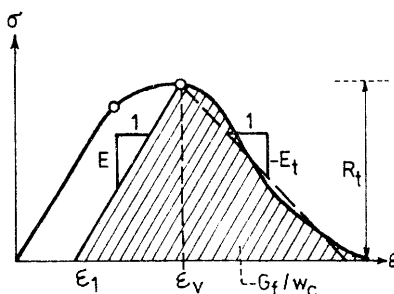
Výpočty založené na kontinuálním modelu jsou v dobrém souladu s experimenty, jestliže šířka zóny lokalizace  $l$  je vymezena jistou minimální šířkou  $w_c$ , která je dána strukturou materiálu. Bažant uvádí [10], že  $w_c \doteq 3d_a$  ( $d_a$  je maximální rozměr složky betonu), resp.  $w_c = 5d_g$  ( $d_g$  je maximální rozměr zrna v hornině).

Bez obavy ze ztráty obecnosti uvažujme průřez taženého prutu o ploše  $A = 1$ . Energie disipovaná v hustě rozdělených mikrotrhlinách (při jejich vzniku resp. šíření počátečních dutin) je dána obsahem sestupné větve deformačně změkčeného materiálu vynásobené šířkou zóny lokalizace  $l = w_c$ . Tato hodnota zvětšená o energii uvolněnou z materiálu mezi trhlinami dává

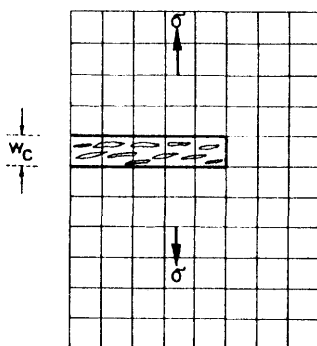
energií potřebnou k lomu

$$\mathcal{G}_f = w_c \left[ \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_v} \sigma d\varepsilon + \int_{\varepsilon_v}^{\infty} \sigma d\varepsilon \right] \approx \frac{R_t^2 w_c}{2} \left[ \frac{1}{E} - \frac{1}{E_t} \right]. \quad (1.107)$$

Energie  $\mathcal{G}_f$  je tedy vztahena na jednotku lomové plochy a je materiálovou konstantou. Vzorec (1.107) je použitelný i pro obecnější případ namáhání (obr. 1.14), máme-li na paměti, že se jedná o lomovou plochu (kolmou k  $\sigma$ ) o velikosti 1 ( $\text{m}^2, \text{mm}^2$ ).



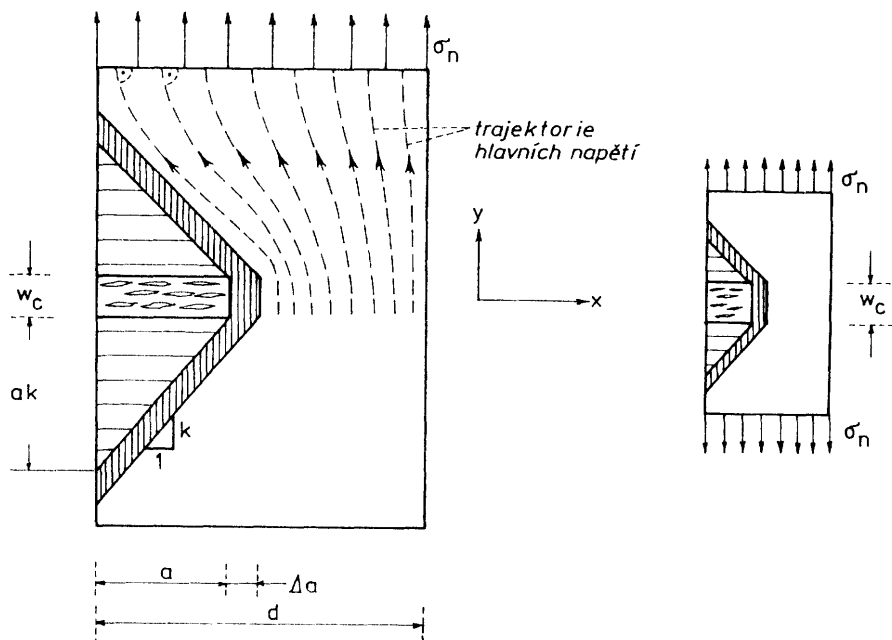
Obr. 1.13: Energie potřebná k lomu



Obr. 1.14: Těleso se zónou lokalizace (dělení na prvky)

Známe-li energii  $\mathcal{G}_f$  potřebnou k lomu, můžeme formulovat *Irwinovo-Orowanovo*  $\mathcal{G}$ -kritérium "hnačí síly", při jehož splnění se pás délky  $a$  deformačně změkčený mikrotrhlinami rozšíří o  $\Delta a$  (na obr. 1.15 je vyznačena





Obr. 1.15: Reliéf napětí, rozměrový efekt

jedna polovina tělesa s centrální zónou změkčení). Hnacím agens je energie uvolněná z tělesa v důsledku zvětšení délky zóny  $a$  o  $\Delta a$  a vztažená na jednotku lomové plochy. Můžeme ji vyjádřit jako úbytek potenciální energie systému  $-\Delta\Pi/b\Delta a = -[\Pi(a + \Delta a) - \Pi(a)] / b\Delta a > 0$ , kde  $b$  je šířka tělesa. Podrobnější informace o potenciální energii uvádíme v čl. 1.6. Zde jen připomeneme známý fakt, že  $\Pi = E_i + E_e$  je součtem potenciální energie vnitřních sil  $E_i$  a potenciální energie vnějších sil  $E_e$ . Přejdeme-li v přírůstkovém vztahu k limitě pro  $\Delta a \rightarrow 0$ , vyjde

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \Pi}{\partial a}. \quad (1.108)$$

Ke zvětšení délky pásu dojde, bude-li

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_f. \quad (1.109)$$

Obvykle se předpokládá, že okraje jsou při šíření trhlin fixovány (změna

potenciální energie vnějších sil je nulová), takže (srov. [10])

$$-\Delta\Pi = -\Delta E_i = (\sigma_n^2/2E')b\Delta A_{int}, \quad (1.110)$$

kde

$$E' = \begin{cases} E & \text{pro rovinnou napjatost (RN),} \\ E/(1-\nu^2) & \text{pro rovinnou deformaci (RD).} \end{cases}$$

Ve vzorci (1.110) vyjadřuje  $\Delta A_{int} = \Delta a w_c + 2ka \Delta a$  přírůstek plochy, kterou vymezuje relief napětí charakterizovaný empirickým parametrem  $k$ .

Přírůstek plochy je šrafován v obr. 1.15 svísele. Vodorovně šrafovaná plocha včetně plochy pásu  $aw_c$  se vztahuje k energii uvolněné při tvorbě zóny délky  $a$ .

Spojením vzorců (1.108) až (1.110) najdeme

$$G_f = \frac{\sigma_n^2}{2E'}(w_c + 2ka). \quad (1.111)$$

Odtud vyplyne vzorec pro nominální napětí  $\sigma_n = \sigma (y \rightarrow \infty)$

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{2E'G_f/w_c}}{\sqrt{1+2ka/w_c}} = \frac{BR_t}{\sqrt{1+\frac{a}{a_0}}} = \frac{BR_t}{\sqrt{1+\frac{d}{d_0}}}. \quad (1.112)$$

Veličiny  $a_0 = w_c/2k$ ,  $d_0 = a_0(d/a)$  a  $BR_t$  jsou materiálové konstanty.

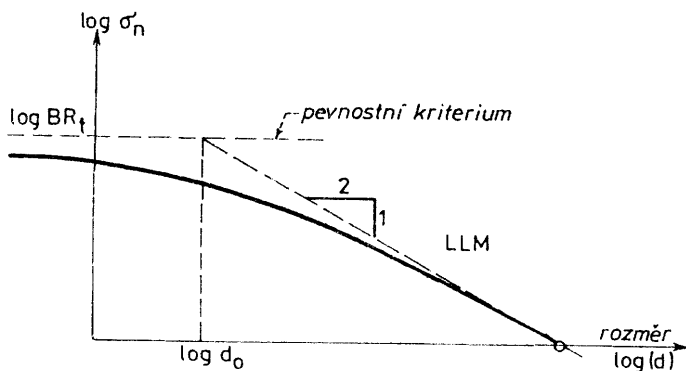
Z uvedeného vzorce je vidět, že ke dvěma dokonale podobným vzorkům (obr. 1.15) vyrobeným ze stejného materiálu přísluší rozdílné hodnoty nominálního napětí  $\sigma_n$ , při nichž dojde k šíření zóny deformačního změkčení. Jedná se o tzv. *rozměrový efekt*, který znázorňuje graf závislosti  $\sigma_n = \sigma_n(d)$  na obr. 1.16. Kdybychom ve vzorci (1.112) položili  $a = 0$ , vyjde  $\sigma_n = BR_t$ . V tomto případě se jedná o *pevnostní kritérium*, které rozměrový efekt nevykazuje.

Druhý krajní případ  $w_c = 0$ ,  $k = \pi$  odpovídá výpočtu podle *lineární lomové mechaniky* (LLM):

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{G_f E'}}{\sqrt{\pi a}} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a}}, \quad (1.113)$$

kde

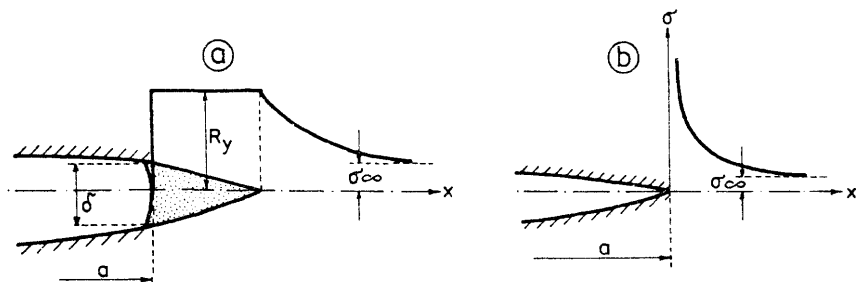
$$K_{IC} = \sqrt{G_f E'} \quad (1.114)$$



Obr. 1.16: Rozměrový efekt

je kritická hodnota *faktoru intenzity napětí* při normálovém lomu (I. typ). Technická praxe nazývá tuto hodnotu zjišťovanou za podmínek RD *lomovou houževnatostí materiálu*.

Zbývá poznamenat, že obdobný rozměrový efekt, jaký byl znázorněn v obr. 1.16, se vyskytuje i při otupení kořene trhliny malou plastickou zónou (obr. 1.17).



Obr. 1.17: Vliv malé plastické zóny na otupení čela trhliny

Pro kovy se osvědčil *Dugdaleův-Barenblattův* model (srov. [72]), který vychází z předpokladu, že plastická oblast má tvar malého klínu (obr. 1.17a) s homogenní napjatostí  $R_y$  (mez plasticity). Pro případ centrální trhliny délky  $2a$  (obr. 1.15) při  $w_c = 0$  a za předpokladu, že  $\sigma_n = \sigma_\infty \ll R_y$  platí

přibližně

$$\delta \approx \frac{\pi \sigma_n^2 a}{ER_y} = \frac{K_I^2}{ER_y}. \quad (1.115)$$

Rozevření  $\delta$  je v praxi chápáno jako parametr lomu. Předpokládá se, že trhlina ztratí stabilitu, je-li dosaženo kritické hodnoty rozevření trhliny  $\delta_C$ . Tak docházíme k *lomovému kritériu COD* (Crack Opening Displacement), které lze chápat formálně ve tvaru

$$\delta \leq \delta_C. \quad (1.116)$$

Kritická hodnota  $\delta_C$  se však měří velice obtížně.

#### 1.4.4 Omezovače lokalizace

Jedním ze způsobů, jak v případě deformačního změkčení omezit šířku zóny lokalizace, je použití omezovačů lokalizace (localisation limiters). Existují tři možnosti

a) Nelokální (integrální) omezovače, jež spočívají v průměrování deformací vstupujících do konstitutivních rovnic nad malým okolím daného materiálového bodu.

b) Diferenciální omezovače spočívají v tom, že deformace (popř. napětí) vstupující do konstitutivních rovnic zahrnují derivace vyšších řádů.

c) Omezovače rychlosti zahrnují i faktor času.

V tomto odstavci se zmíníme o prvních dvou variantách a výklad omezíme na příklad jednoosého namáhání. Další podrobnosti s bohatou řadou odkazů lze najít v [10] a [15].

##### a) Nelokální kontinuum

Konstitutivní vztah pro deformační změkčení zapíšeme ve tvaru (srov. [10])

$$\sigma = \sigma[\bar{\varepsilon}(x)], \quad (1.117)$$

kde

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\lambda_r(x)} \int_0^L \alpha(x-s) \varepsilon(s) ds. \quad (1.118)$$

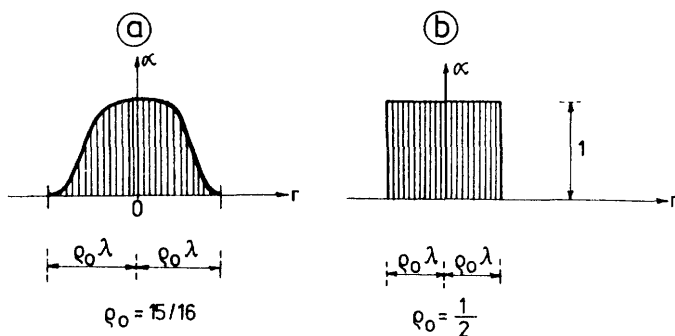
Efektivní délka průměrování pro bod  $x$  je určena vztahem

$$\lambda_r(x) = \int_0^L \alpha(x-s) ds, \quad (1.119)$$

kde  $L$  je délka prutu.

Na obr. 1.18 jsou uvedeny příklady dvou váhových funkcí, které dávají stejnou efektivní délku  $\lambda_r(x) = \lambda$ , pokud vzdálenost bodu  $x$  od kraje prutu není menší než  $\rho_0 \lambda$ . V krajních oblastech se délka  $\lambda_r$  mění. Položíme-li  $r = |x - s|$ , můžeme psát ( $\lambda$  je materiálová konstanta):

$$\text{a) } \alpha(r) = \left[ 1 - \left( \frac{r}{\rho_0 \lambda} \right)^2 \right]^2 \quad \text{b) } \alpha(r) = 1 \quad (1.120)$$



Obr. 1.18: Váhové funkce pro integrální omezovače

Zatímco zvonová funkce (a podobně funkce Gaussova normálního rozdělení) splňují jisté doplňující podmínky vylučující možnost vzniku nežádoucích nestabilit při průměrování, druhý typ váhové funkce podmínky stability nespĺňuje.

Z praktického hlediska je cenné doporučení, které Bažant uvádí v [10], průměrovat v konstitutivních vztazích, které poskytuje mechanika poškozování, jen složku  $\omega$  zachycující poškození a pružnou deformaci uvažovat jako lokální. Ve vztazích (1.82) až (1.87) pak stačí pouze nahradit  $\omega$  funkcí

$$\bar{\omega}(x) = \frac{1}{\lambda_r(x)} \int_0^L \alpha(x-s) \omega(s) ds. \quad (1.121)$$

Přírůstkový konstitutivní vztah pro průřez  $x$  v nelokálním kontinuu získáme úpravou (1.88)<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Přírůstek napětí, deformace a poškození jsme označili symbolem  $\Delta$ , aby nedošlo k záměně s diferenciálem souřadnice  $x$ .

$$\Delta\sigma = (1 - \bar{\omega})E\Delta\varepsilon - E\varepsilon\Delta\bar{\omega}. \quad (1.122)$$

b) *Diferenciální omezovač lokalizace*

Rozvedeme-li deformaci v okolí bodu  $x$  v Taylorovu řadu

$$\varepsilon(x + r) = \varepsilon(x) + \frac{d\varepsilon(x)}{dx}r + \frac{1}{2} \frac{d^2\varepsilon(x)}{dx^2}r^2 = \varepsilon(s),$$

kde  $r = s - x$ , vyjde z (1.118) za předpokladu, že  $\lambda_r(x) = \lambda$ , a s uvážením symetrie funkce  $\alpha$  vzhledem k proměnné  $r$ ,

$$\bar{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x) + \kappa \frac{d^2\varepsilon}{dx^2}, \quad (1.123)$$

kde

$$\kappa = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\rho_0\lambda}^{\rho_0\lambda} r^2 \alpha(r) dr. \quad (1.124)$$

Pro váhovou funkci s rovnoměrným rozdělením vychází

$$\kappa = \frac{\lambda^2}{24}.$$

Náhradu (1.123) uplatníme za výše uvedených zjednodušujících předpokladů v přírůstkovém vztahu (viz (1.91))

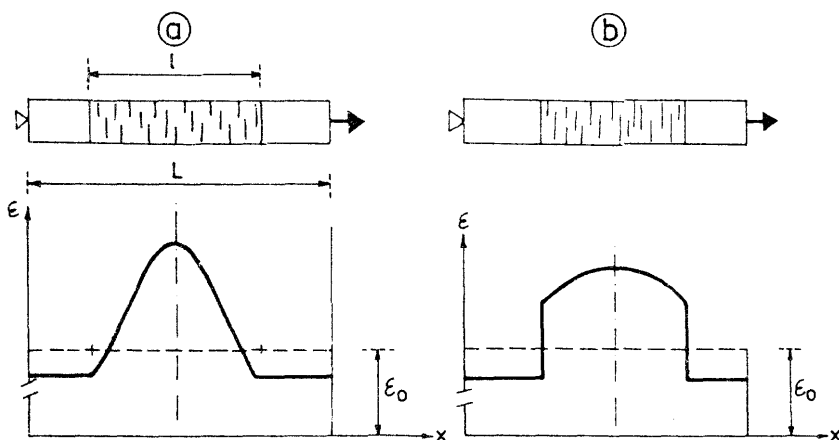
$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon - (E - E_t) < \Delta\bar{\varepsilon} >, \quad (1.125)$$

kde

$$< \Delta\bar{\varepsilon} > = \begin{cases} \Delta\varepsilon + \kappa \frac{d^2(\Delta\varepsilon)}{dx^2} & \text{pro zatěžování } (\Delta\bar{\varepsilon} > 0), \\ 0 & \text{pro odtěžování } (\Delta\bar{\varepsilon} < 0). \end{cases} \quad (1.126)$$

Oba modely umožňují poměrně přehledný výpočet profilu deformace v zóně lokalizace. Zatímco model a) vede na spojitý průběh (obr. 1.19a), model b) vyžaduje nespojitost deformací na rozhraní obou zón (obr. 1.19b). Předpokládá se, že je na začátku výpočtu známá hodnota počáteční homogenní deformace  $\varepsilon_0$ , k níž lze nalézt z (1.85) hodnotu počátečního poškození  $\omega_0$ .

Numerickými výpočty bylo prokázáno, že délka zóny  $l$  je přímo úměrná délce průměrování  $\lambda$ . Z toho plyne, že v lokálním kontinuu ( $\lambda \rightarrow 0$ ) se lokalizace soustřeďuje na nekonečně malou oblast.



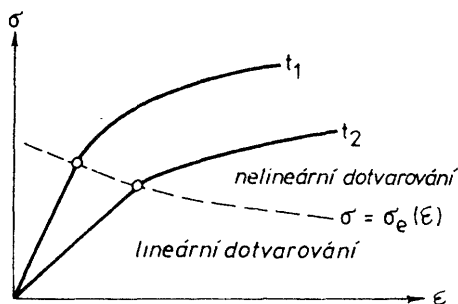
Obr. 1.19: Profil deformace v zóně lokalizace

## 1.5 Vazkopružný materiál

Dotvarování (creep) probíhá u materiálů, jejichž deformace spjitě rostou při konstantním napětí. Charakter dotvarování (lineární-nelineární) je patrný z izochronních křivek, které znázorňují vztah  $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_i)$  v závislosti na okamžiku zatížení  $t_i$  (obr. 1.20). Čárkovaná křivka  $\sigma = \sigma_e(\varepsilon)$  odděluje oblast lineárního dotvarování (lineární vazkopružnost) od nelineárního dotvarování (nelineární vazkopružnost). Izochronní křivky některých materiálů, jako jsou kovy při vysokých teplotách nebo jily (srov. [10]), jsou značně zakřiveny již od napětí  $\sigma = 0$  (vazkoplasticita).

Závislost izochronních křivek na stáří materiálu v okamžiku zatížení  $t_i$  charakterizuje tzv. stárnutí, což je jev typický např. pro beton. Podrobnou informaci o chování betonu je práce [9]. Bažant v ní podává ucelenou zprávu o materiálových modelech pro dotvarování konstrukcí všeobecně a o betonu zvlášť.

Konstitutivní vztahy mohou být formulovány buď ve tvaru integrálních rovnic nebo ve tvaru rovnic diferenciálních. Pro numerické řešení jsou integrální vztahy méně vhodné, neboť jejich aplikace vyžaduje uchovávat řadu informací z předcházejících časových kroků. Přírůstkovou formu konstitutivních rovnic, které uvedenou závadu nemají, lze získat za určitých zjednodušujících předpokladů integrací diferenciálních konstitutivních rovnic v rámci sledovaného časového intervalu.



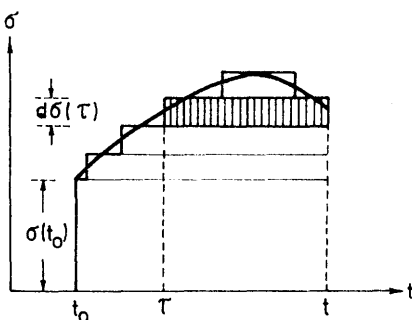
Obr. 1.20: Izochronní křivky

### 1.5.1 Konstitutivní vztahy pro jednoosou napjatost

U řady materiálů, jako je beton v provozním stadiu namáhání, lze uplatnit Boltzmannův princip superpozice a při jednoosé napjatosti vyjádřit deformaci v materiálovém bodě rovnicí (obr. 1.21)

$$\epsilon(t) = \mathcal{J}(t, t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{J}(t, \tau)d\sigma(\tau) + \epsilon^0(t). \quad (1.127)$$

Funkce poddajnosti lineárně dotvarujícího materiálu vyjadřuje deformaci



Obr. 1.21: Princip superpozice

v čase  $t$  způsobenou jednotkovým napětím  $\sigma = 1$ , které naskočí v čase  $\tau$  a zůstává neměnné. Často je zapisována ve tvaru

$$\mathcal{J}(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) = \frac{1 + \Phi(t, \tau)}{E(\tau)}, \quad (1.128)$$



kde  $\Phi$  je tzv. součinitel dotvarování.

První člen rozkladu  $1/E(\tau)$  vyjadřuje pružnou (okamžitou) poddajnost, druhý  $C(t, \tau)$  poddajnost v dotvarování (míra dotvarování). Člen  $\varepsilon^0$  v (1.127) představuje deformaci způsobenou nesilovými účinky (smršňování, bobtnání, teplotní dilatace).

Deformační změkčení materiálu lze zahrnout do (1.128) v rámci modelu poškození (viz čl. 1.4):

$$\mathcal{J}(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} \left[ 1 + \frac{\omega}{1 - \omega} + \Phi(t, \tau) \right], \quad (1.129)$$

kde  $\omega$  je funkce poškození ( $\omega \in \langle 0, 1 \rangle$ ).

Při zanedbání vlivu stárnutí můžeme položit

$$\mathcal{J}(t, \tau) = \mathcal{J}(t - \tau),$$

čímž rovnice (1.127) přejde ve Volterrovu rovnici

$$\varepsilon(t) = \mathcal{J}(t - t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{J}(t - \tau)d\sigma(\tau) + \varepsilon^0(t). \quad (1.130)$$

Inverzní vztah k (1.127) lze zapsat rovněž s využitím principu superpozice takto:

$$\sigma(t) = R(t, t_0) [\varepsilon(t_0) - \varepsilon^0(t_0)] + \int_{t_0}^t R(t, \tau) [d\varepsilon(\tau) - d\varepsilon^0(\tau)]. \quad (1.131)$$

Funkce relaxace  $R$  vyjadřuje napětí v čase  $t$  způsobené jednotkovou deformací  $\varepsilon - \varepsilon^0 = 1$ , jež naskočí v čase  $\tau$  a zůstává neměnná.

Jestliže napětí  $\sigma$  je spojitou funkcí času, můžeme položit  $d\sigma(\tau) = [d\sigma(\tau)/d\tau]d\tau$ , čímž převedeme Stieltjesův integrál v (1.127) na integrál Riemannův. Rovnici (1.127) pak můžeme derivovat a od integrálních konstitutivních vztahů přejít ke vztahům diferenciálním. K tomu je třeba mít k dispozici vhodná vyjádření jader  $\mathcal{J}(t, \tau)$  a  $R(t, \tau)$ . Z hlediska numerických výpočtů se nejvíce osvědčila degenerovaná jádra (srov. např. [9])

$$\mathcal{J}(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{D_{\mu}(\tau)} \{1 - \exp [y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)]\}, \quad (1.132)$$

$$R(t, \tau) = \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(\tau) \exp [y_{\mu}(\tau) - y_{\mu}(t)], \quad (1.133)$$

kde  $y_\mu(t) = (t/\Theta_\mu)^{q_\mu}$ . Koeficient  $q_\mu \leq 1$  se zavádí za účelem snížení počtu sčítanců a pro beton se volí zhruba  $q_\mu \approx 2/3$ . Funkce  $D_\mu$  a  $E_\mu$  mohou být získány metodou nejmenších čtverců. Pro konkrétní tvary funkcí  $\mathcal{J}$  obvykle používané pro beton (dvojnásobný mocninový nebo logaritmický zákon) jsou k dispozici explicitní výrazy pro  $D_\mu$  (viz [12]).

Retardační časy  $\Theta_\mu$  v případě funkce  $\mathcal{J}$  (resp. relaxační časy v případě  $R$ ) musí splňovat jistá pravidla, jejichž dodržení je nezbytné pro úspěšnost výpočtu:  $\Theta_1$  se volí velmi malé (řádově  $10^{-9}$  dnů), aby první člen *Dirichletovy* řady (1.132) byl dostatečně blízký hodnotě  $1/D_1(\tau)$ , kde  $D_1(\tau) = E(\tau)$ , a vyjadřoval tak s uspokojivou přesností okamžitou poddajnost. Další členy mají být rovnoměrně rozloženy na logaritmické stupnici času, tj.  $\Theta_\mu = 10^{1/q_\mu} \Theta_{\mu-1}$ , pro  $\mu = 2, 3, \dots, M$ . Konečně  $\Theta_M \geq t_{max}/2$ , kde  $t_{max}$  je horní hranice časového intervalu, ve kterém nás zajímá odezva konstrukce. Je-li  $t_{min}$  dolní hranicí tohoto intervalu, je třeba kontrolovat podmínku  $\Theta_2 \leq 3t_{min}$ .

Jsou-li degenerovaná jádra  $\mathcal{J}$  a  $R$  specifikována, můžeme je uplatnit v rovnicích (1.127) a (1.131). Jestliže následně zderivujeme rovnici (1.131) podle  $t$ , obdržíme v souladu s [9] po jednoduché úpravě vzorec

$$\sigma = \sum_{\mu=1}^M \sigma_\mu, \quad (1.134)$$

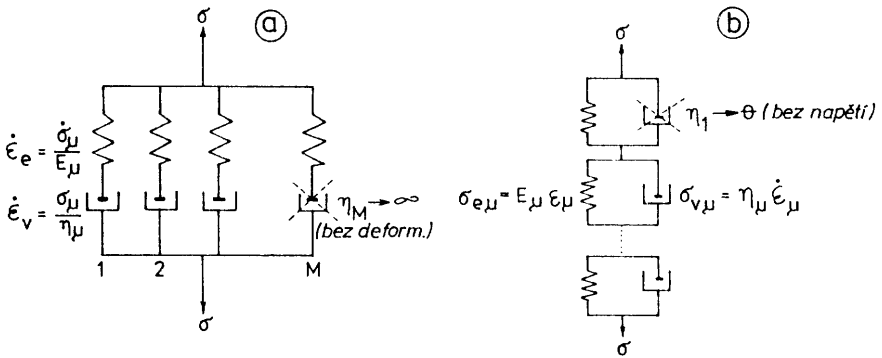
v němž složky  $\sigma_\mu$  vyhovují diferenciální konstitutivní rovnici

$$\dot{\sigma}_\mu + \dot{y}_\mu \sigma_\mu = E_\mu(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0). \quad (1.135)$$

Položíme-li  $\dot{y}_\mu(t) = E_\mu(t)/\eta_\mu(t)$ , předchozí dva vztahy budou rovnicemi *Maxwellova* řetězce na obr. 1.22a. Má-li být řetězec modelem tělesa (na rozdíl od tekutiny), musí mít funkce  $\mathcal{J}$  konečnou limitu pro  $t \rightarrow \tau \rightarrow \infty$ . Požadavek je zřejmě splněn pro  $\Theta_M \rightarrow \infty$ , tj.  $\dot{y} \rightarrow 0$  a  $\eta_M \rightarrow \infty$ . V obr. 1.22a se limitní případ projeví vynecháním tlumiče v posledním článku, neboť v něm nedochází k deformaci.

Obdobným způsobem lze zpracovat rovnici (1.127). Po dosazení z (1.132), dvojnásobným derivováním podle  $t$  a zavedení modelových proměnných  $\eta_\mu(t) = D_\mu(t)/\dot{y}_\mu(t)$ ,  $E_\mu(t) = D_\mu(t) - \dot{D}_\mu(t)/\dot{y}_\mu(t)$  dojdeme k rovnicím (viz [9])

$$\varepsilon(t) = \sum_{\mu=1}^M \varepsilon_\mu(t) + \varepsilon^0(t), \quad (1.136)$$



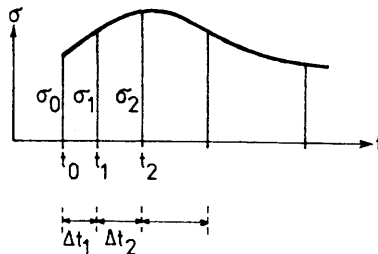
Obr. 1.22: Maxwellův a Kelvinův - Voigtův řetězec

$$\ddot{\epsilon}_\mu + \frac{E_\mu(t) + \dot{\eta}_\mu(t)}{\eta_\mu(t)} \dot{\epsilon}_\mu = \frac{\dot{\sigma}}{\eta_\mu(t)}, \quad (1.137)$$

kteří popisují chování *Kelvinova-Voigtova* řetězce z obr. 1.22b. V limitním případě ( $\Theta_1 \rightarrow 0$ ,  $\dot{\eta}_1 \rightarrow \infty$ ,  $\eta_1 \rightarrow 0$ ) v tlumiči prvního článku nevzniká napětí a je třeba jej vynechat.

### 1.5.2 Přírůstkové konstitutivní vztahy - jednoosá napjatost

Při numerickém řešení dělíme časovou osu na intervaly délky  $\Delta t_i$  (obr. 1.23). Předpokládáme, že na začátku  $i$ -tého intervalu  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$  známe hodnoty



Obr. 1.23: Přírůstkové řešení

napětí  $\sigma_\mu(t_{i-1})$  pro každý článek řetězce. Rovnici (1.135), která je jedno-

dušší než (1.137), můžeme integrovat za zjednodušujícího předpokladu, že v rámci intervalu  $\dot{y}_\mu = \text{konst.}$ ,  $\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0 = \text{konst.}$  a  $E_\mu = \overline{E}_\mu = E_\mu(t_i - \Delta t_i/2)$ . Vychází

$$\sigma_\mu(t_i) = \sigma_\mu(t_{i-1})e^{-\Delta y_\mu} + \frac{\overline{E}_\mu}{\Delta y_\mu}(1 - e^{-\Delta y_\mu})(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^0).$$

S označením

$$\Delta \sigma_{\mu i} = \sigma_\mu(t_i) - \sigma_\mu(t_{i-1}), \quad \Delta \varepsilon_i = \varepsilon(t_i) - \varepsilon(t_{i-1})$$

můžeme předchozí rovnici přepsat takto:

$$\Delta \sigma_{\mu i} = -\sigma_\mu(t_{i-1})(1 - e^{-\Delta y_\mu}) + \frac{\overline{E}_\mu}{\Delta y_\mu}(1 - e^{-\Delta y_\mu})(\Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i^0).$$

Uplatníme-li poslední výsledek v (1.134), obdržíme finální vyjádření přírůstkového konstitutivního vztahu (srov. [9])

$$\Delta \sigma_i = \widehat{E}_i(\Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i^0 - \Delta \widehat{\varepsilon}_i), \quad (1.138)$$

kde

$$\widehat{E}_i = \sum_{\mu=1}^M \frac{\overline{E}_\mu}{\Delta y_\mu}(1 - e^{-\Delta y_\mu}), \quad \Delta \widehat{\varepsilon}_i = \frac{1}{\widehat{E}_i} \sum_{\mu=1}^M (1 - e^{-\Delta y_\mu})\sigma_\mu(t_{i-1}). \quad (1.139)$$

Explicitně nevyznačujeme, že součinitelé za sumačním znaménkem se počítají pro interval  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ . Řada těchto součinitelů může být vypočtena předem.

### 1.5.3 Přírůstkové konstitutivní vztahy - obecná napjatost

Předchozí výsledky lze snadno zobecnit. Vodítkem nám bude rozklad funkce poddajnosti (1.128). Při obecné napjatosti zaměníme v rovnici (1.127) napětí  $\sigma$  maticí napětí  $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T$ , deformace  $\varepsilon$  a  $\varepsilon^0$  maticemi  $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T$  a  $\varepsilon^0$  a konečně funkci poddajnosti  $\mathcal{J}$  definovanou vzorcem (1.132) maticovým jádrem

$$\mathbf{J}(t, \tau) = \mathcal{J}(t, \tau)E(\tau)\mathbf{C}_e = \mathcal{J}(t, \tau)\widehat{\mathbf{C}}, \quad (1.140)$$

kde  $\mathbf{C}_e$  je matice poddajnosti lineárně pružného izotropního materiálu a

$$\widehat{\mathbf{C}} = E(\tau)\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & & \\ & & & & 2(1+\nu) & \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Pokud bychom chtěli vzít v úvahu i složku deformace  $\epsilon_{f\tau}$  způsobenou poškozením, nahradili bychom ve vzorci (1.140) matici  $\widehat{\mathbf{C}}$  maticí  $\widehat{\mathbf{C}} + \mathbf{N}(1 - \nu^2)\omega/(1 - \omega)$ , kde  $\mathbf{N}$  je maticový přepis tenzoru  $N_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l$ , který byl zaveden rovnicí (1.96). Při přechodu k rovinné napjatosti je třeba jednak zredukovat rozměry matic, jednak zaměnit koeficient  $(1 - \nu^2)$  jedničkou (viz např. vzorec (1.110)).

Obdobným způsobem lze zobecnit rovnici (1.131). Relaxační funkci  $R$  vyjádřenou vztahem (1.133) zaměníme maticovým jádrem (pro  $\omega = 0$ )

$$\mathbf{R}(t, \tau) = R(t, \tau) \frac{1}{E(\tau)} \mathbf{D}_e = R(t, \tau) \widehat{\mathbf{D}}, \quad (1.141)$$

kde  $\mathbf{D}_e$  je matice tuhosti lineárně pružného izotropního materiálu a

$$\widehat{\mathbf{D}} = \frac{1}{E(\tau)} \mathbf{D}_e \quad (1.142)$$

$$= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Konečně přírůstkový konstitutivní vztah založený na Dirichletových řadách (1.138) bude zapsán takto

$$\Delta \sigma_i = \widehat{E}_i \widehat{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon_i - \Delta \epsilon_i^0 - \Delta \widehat{\epsilon}_i), \quad (1.143)$$

kde tuhost  $\widehat{E}_i$  je pro  $i$ -tý interval  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$  určena vzorcem (1.139) a

$$\Delta \widehat{\epsilon}_i = \frac{1}{\widehat{E}_i} \sum_{\mu=1}^M (1 - e^{-\Delta y_\mu}) \sigma_\mu(t_{i-1}). \quad (1.144)$$

Při velmi malých časových krocích (s délkou  $\Delta t_i$  blízkou nule) vychází

$$\hat{E}_i \approx \sum_{\mu=1}^M E_{\mu}(t_i - \Delta t_i/2) \quad \text{a} \quad \Delta \hat{\varepsilon}_i \approx \frac{1}{\hat{E}_i} \sum_{\mu=1}^M \Delta y_{\mu} \sigma_{\mu}(t_{i-1}).$$

## 1.6 Princip virtuálních prací a variační principy

Princip virtuálních prací a variační principy mechaniky jsou základem většiny přibližných metod mechaniky (viz [68]). S typem variačního principu souvisí i jednotlivé modely MKP. S vhodným variačním principem jsou rovněž svázány novější (symetrické) formulace MHP.

### 1.6.1 Princip virtuálních prací (PVP)

PVP má dvě základní verze:

- princip virtuálních posunů (PVP)
- princip virtuálních sil (PVs).

*Princip virtuálních posunů* budeme zapisovat nejčastěji takto:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma. \quad (1.145)$$

Levá strana rovnice představuje virtuální práci vnitřních sil, pravá strana je vyjádřením virtuální práce vnějších sil.

Virtuální pole  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta \mathbf{u}$  nesmějí narušovat vazby v tělese. To znamená, že

- virtuální posuny  $\delta \mathbf{u}$  musí splňovat geometrické okrajové podmínky

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{na části } \Gamma_u) \quad (1.146)$$

- virtuální deformace  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  musí být svázány s virtuálními posuny rovnicí (viz (1.2))

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \delta \mathbf{u}. \quad (1.147)$$

Pomocí vztahu (1.9), v němž položíme  $\delta \mathbf{u}$  místo  $\mathbf{u}$ , uvedeme rovnici (1.145) na tvar

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\partial \boldsymbol{\sigma} + \overline{\mathbf{X}}) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \delta \mathbf{u}^T (-\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} + \overline{\mathbf{p}}) d\Gamma = 0. \quad (1.148)$$

Tato rovnice může být splněna při libovolných virtuálních posunech  $\delta \mathbf{u}$  jedině tehdy, budou-li současně splněny podmínky rovnováhy, tj.

- Cauchyho rovnice (1.1) uvnitř  $\Omega$
- silové okrajové podmínky (1.6) na  $\Gamma_p$ .

Rovnice (1.1) a (1.6) jsou tedy důsledkem PVp, a proto je tento princip nazýván obecným principem rovnováhy.

PVp lze snadno rozšířit na dynamické úlohy. Na základě d'Alembertova principu lze považovat měrné setrvačné síly -  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  za vnější zatížení objemovými silami ( $\ddot{\mathbf{u}}$  značí druhou partiální derivaci podle času,  $\rho$  je hustota). Rovnice (1.148) se potom změní na tvar

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\partial \boldsymbol{\sigma} + \overline{\mathbf{X}} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega + \dots = 0.$$

*Princip virtuálních sil* (PVs) budeme nejčastěji zapisovat takto:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega &= \int_{\Gamma_n} \delta \mathbf{p}^T \overline{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{X}^T \mathbf{u} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma_n} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \overline{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{X}^T \mathbf{u} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Levá strana rovnice představuje komplementární virtuální práci vnitřních sil, pravá strana je vyjádřením komplementární virtuální práce vnějších sil.

Virtuální pole  $\delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\delta \mathbf{X}$ ,  $\delta \mathbf{p}$  nesmějí narušovat rovnováhu uvnitř tělesa. Položíme-li  $\delta \mathbf{X} = \mathbf{0}$  uvnitř  $\Omega$  a  $\delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$  na  $\Gamma_p$ , potom virtuální napětí musí splňovat :

- homogenní Cauchyho rovnice

$$\partial \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (\text{uvnitř } \Omega) \quad (1.150)$$

- homogenní silové okrajové podmínky

$$\mathbf{n} \delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (\text{na části } \Gamma_p). \quad (1.151)$$

Pomocí vztahu (1.9) lze převést rovnici (1.149) na tvar

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0. \quad (1.152)$$

Tato rovnice může být splněna při libovolných virtuálních napětích  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  ( $\delta \mathbf{p} = \mathbf{n} \delta \boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$  na  $\Gamma_u$ ) jedině tehdy, budou-li současně splněny geometrické vztahy<sup>6</sup>, tj.

- geometrické rovnice (1.2) uvnitř  $\Omega$
- geometrické okrajové podmínky (1.7) na  $\Gamma_u$ .

Rovnice (1.2) a (1.7) jsou tedy důsledkem PVs, a proto se tento princip nazývá obecným principem spojitosti tělesa.

## 1.6.2 Variační principy

Variační principy jsou přímým důsledkem PVP.

- Z principu virtuálních posunů (PVP) se odvozuje Lagrangeův variační princip
- Z principu virtuálních sil (PVs) se odvozuje Castiglianův variační princip.

Lagrangeův princip lze slovně vyjádřit větou o minimu potenciální energie systému (celkové potenciální energie):

*Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává takový stav, který dává potenciální energii systému minimální hodnotu, tj. platí*

$$\Pi = E_i + E_e = \min., \quad (1.153)$$

<sup>6</sup>Důsledně vzato jsou virtuální napětí vázána třemi statickými rovnicemi (1.150). Z principu (1.152) tudíž plynou jen tři nezávislé rovnice (kompatibility deformací).



kde

$$E_i = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (1.154)$$

je potenciální energie deformace,

$$E_e = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma \quad (1.155)$$

$$= - \int_{\Omega} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) d\Omega - \int_{\Gamma_p} (u\bar{p}_x + v\bar{p}_y + w\bar{p}_z) d\Gamma$$

je potenciální energie vnějších sil.

Kinematicky přípustný stav (přetvoření tělesa) lze definovat takto:

- Přípustné posuny musí být spojité, musí mít po částech spojité derivace v celé řešené oblasti a musí splňovat geometrické okrajové podmínky předepsané na části hranice  $\Gamma_u$ .
- Přípustné deformace jsou s přípustnými posuny svázány geometrickými rovnicemi.

Položíme-li variaci funkcionálu  $\Pi$  rovnou nule, tj.

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta(E_i + E_e) \\ &= \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.156)$$

obdržíme vzhledem k prvnímu fyzikálnímu vztahu (1.3) rovnici (1.145). Z uvedeného plyne tento důležitý praktický závěr:

*Aplikací PVp i principu minima potenciální energie systému obdržíme tytéž rovnice. V obou případech to jsou Cauchyho rovnice a silové okrajové podmínky.*

Doplňme-li (1.156) o virtuální práci setrvačných sil, nabude d' Alembertův princip tvaru

$$\delta\Pi + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0. \quad (1.157)$$

Je-li tato rovnice splněna v libovolném časovém okamžiku, musí též platit

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\Pi + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega) dt = 0 \quad (1.158)$$

pro libovolné  $t_2 > t_1$ . Druhý integrál se dá upravit integrací per partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt = \left[ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega dt. \quad (1.159)$$

Omezíme-li variace posunů  $\delta \mathbf{u}$  podmínkou, že v krajních časech  $t_1$  a  $t_2$  jsou nulové, pak integrál v hranaté závorce bude roven nule. Druhý integrál na pravé straně (1.159) je variací kinetické energie tělesa  $K$

$$\delta K = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \right] = \int_{\Omega} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega. \quad (1.160)$$

Spojením (1.158) až (1.160) vyplyne Hamiltonův princip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - K) \, dt = 0, \quad (1.161)$$

který lze slovně formulovat takto:

*Ze všech možných historií posunů mezi dvěma okamžiky  $t_1$  a  $t_2$  (historie jsou vázány tím, že posuny v časech  $t_1$  a  $t_2$  jsou pevně dány) nastane ta z nich, pro kterou je integrál rozdílu potenciální a kinetické energie od času  $t_1$  do času  $t_2$  stacionární.*

Castiglianův princip lze slovně vyjádřit větou o minimu komplementární energie systému:

*Ze všech staticky přípustných stavů (napjatosti tělesa) nastává takový stav, který dává komplementární energii systému nejmenší hodnotu, tj. platí*

$$\Pi^* = E_i^* + E_e^* = \min., \quad (1.162)$$

kde

$$E_i^* = \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega \quad (1.163)$$

je komplementární energie vnitřních sil (napjatosti),

$$E_e^* = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (1.164)$$

je komplementární potenciální energie vnějších sil.

Jsou-li na části  $\Gamma_u$  předepsány jen homogenní geometrické okrajové podmínky, tj.  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , potom  $E_e^* = 0$  a

$$\Pi^* = E_i^* = \min. \quad (1.165)$$

Statically přípustné pole napětí splňuje podmínky rovnováhy jak uvnitř (nehomogenní Cauchyho rovnice) tak na hranici tělesa (silové okrajové podmínky na  $\Gamma_p$ ).

Položíme-li variaci funkcionálu  $\Pi^*$  rovnou nule

$$\delta\Pi^* = \int_{\Omega} \delta\sigma^T \frac{\partial W^*}{\partial \sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = 0, \quad (1.166)$$

obdržíme s uvážením druhého fyzikálního vztahu (1.3) rovnici (1.149). Z uvedeného plyne tento praktický závěr:

*Aplikací PVs i principu minima komplementární energie systému obdržíme tytéž rovnice. V obou případech to jsou geometrické rovnice (případně - po eliminaci posunů - rovnice kompatibility) a geometrické okrajové podmínky.*

Funkcionály  $\Pi$  a  $\Pi^*$  lze upravit pomocí Clapeyronova teorému (1.9). Za předpokladu, že na  $\Gamma_u$  jsou předepsány jen homogenní okrajové podmínky ve tvaru  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , vychází

$$\Pi = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = - \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega. \quad (1.167)$$

Za předpokladu, že na  $\Gamma_p$  jsou předepsány jen *homogenní silové okrajové* podmínky ve tvaru  $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , a dále, že  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  uvnitř  $\Omega$ , platí

$$\Pi^* = \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = - \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega. \quad (1.168)$$

PVp a Lagrangeův variační princip jsou základem tzv. deformačních metod v analýze konstrukcí. Podobně PVs a Castiglianův variační princip jsou základem tzv. silových metod.

Smíšené metody, ve kterých vystupují jak posuny  $\mathbf{u}$ , tak napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ , lze formulovat na základě Hellingerova-Reissnerova principu, který zapíšeme matematicky ve tvaru (srov. [21])

$$\delta\Pi_R = 0, \quad (1.169)$$

kde

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} \, d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.170)$$

Duální vyjádření H.-R. principu, ke kterému dojdeme pomocí vztahu (1.9), má tvar

$$\delta \Pi_R^* = 0, \quad (1.171)$$

kde

$$\begin{aligned} \Pi_R^* = & - \int_{\Omega} W^*(\boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{X}}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{p}}) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Pole  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\sigma}$  jsou nezávislá. Z rovnic (1.169) a (1.171) plynou tyto podmínky stacionarity (splnění fyzikálních vztahů se v H.-R. principu předpokládá a priori):

- Cauchyho rovnice a vztah mezi polem napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a posuny  $\mathbf{u}$
- silové okrajové podmínky na  $\Gamma_p$  a geometrické okrajové podmínky na  $\Gamma_u$ .

Obecný variační princip Hu-Washizu neobsahuje žádné apriorní předpoklady o polích  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , která jsou vesměs nezávislá, a lze jej zapsat ve tvaru

$$\delta \Pi_W = 0, \quad (1.173)$$

kde

$$\begin{aligned} \Pi_W = & \int_{\Omega} \left[ W(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{X}} \right] \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\rho}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Rovnici (1.173) rozvedeme na základě (1.174) pomocí Clapeyronova teorému (1.9). Po formálních úpravách dojdeme k vyjádření

$$\begin{aligned} \delta\Pi_W = \int_{\Omega} \left[ \delta\varepsilon^T \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} - \sigma \right) + \delta\sigma^T (\partial^T \mathbf{u} - \varepsilon) - \delta\mathbf{u}^T (\partial\sigma + \bar{\mathbf{X}}) \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma_u} [\delta\mathbf{p}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{p} - \mathbf{n}\sigma)] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \delta\mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{n}\sigma) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (1.175)$$

Podmínkami stacionarity jsou rovnice (1.1) až (1.3) (viz první řádek v rovnici (1.175)) a okrajové podmínky (1.6) a (1.7) (viz druhý řádek).

Rozšíříme-li rovnici (1.175) o virtuální práci setrvačných sil, odvodíme obdobným způsobem jako v případě Hamiltonova principu rovnici

$$\delta\Psi = 0, \quad (1.176)$$

kde

$$\Psi = \int_{t_1}^{t_2} (\Pi_W - K) dt. \quad (1.177)$$

Podmínkami stacionarity jsou tytéž rovnice jako při statickém řešení, pouze rovnice rovnováhy (1.1) budou rozšířeny o vliv setrvačných sil

$$\delta\sigma + \bar{\mathbf{X}} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (1.178)$$

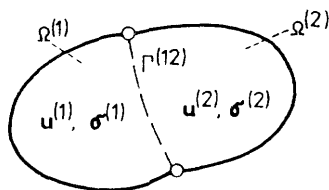
Obecný variační princip se využívá v MKP ke konstrukci některých speciálních typů prvků (např. s vloženou zónou lokalizace poškození), v pravděpodobnostní MKP a při formulaci symetrické varianty MHP.

### 1.6.3 Modifikované variační principy

Předpokládejme, že konstrukce  $\Omega$  je složena z několika částí jednoduchého geometrického tvaru, kterým budeme říkat prvky konstrukce. Prvky označíme  $\Omega^{(i)}$  a odpovídající posuny  $\mathbf{u}^{(i)}$  a napětí  $\sigma^{(i)}$ . Těleso  $\Omega$  na obr. (1.24) je rozděleno na dva prvky  $\Omega^{(1)}$  a  $\Omega^{(2)}$ . Podle povahy variačního principu je třeba požadovat, aby na vnitřní (mezelementové) hranici  $\Gamma^{(12)}$  byla zajištěna buď spojitost posunů (tzv. kompatibilní model)

$$\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad (1.179)$$

nebo spojitý přenos pole napětí (tzv. rovnovážný model)



Obr. 1.24: Rozdělení tělesa na prvky

$$\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad (1.180)$$

neboli

$$\mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{0}.$$

Chceme-li oslabit požadavky kladené na pole  $\mathbf{u}^{(i)}$  a  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ , musíme zahrnout vedlejší podmínky (1.179), respektive (1.180) do variačního principu. Tak vzniknou tzv. modifikované variační principy.

Modifikovaný Hellingerův-Reissnerův princip uvedeme ve dvou verzích:

1. V prvním případě zapíšeme podmínku (1.179) ve tvaru

$$\mathbf{u}^{(1)} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{(2)} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \quad \text{na } \Gamma^{(12)}, \quad (1.181)$$

který se formálně shoduje se zápisem (1.7). Nová proměnná - mezielementový posun  $\boldsymbol{\mu}$  má charakter "předepsaného" posunu na  $\Gamma^{(12)}$ . Rozšíříme-li poslední integrál v (1.170) i na mezielementovou hranici  $\Gamma^{(12)}$ , obdržíme modifikovaný funkcionál

$$\begin{aligned} \Pi_{Rm} &= \Pi_R - \int_{\Gamma^{(12)}} (\mathbf{u}^{(1)} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(12)}} (\mathbf{u}^{(2)} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} d\Gamma \\ &= \Pi_R - \int_{\Gamma^{(12)}} (\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)T} \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.182)$$

Funkcionál  $\Pi_R$  lze upravit pomocí vztahu (1.9), v němž položíme  $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ ,  $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(12)}$ . Výsledkem této operace bude funkcionál

$$\Pi_{Rm}^* = \Pi_R^* + \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) d\Gamma. \quad (1.183)$$

2. Ve druhém případě (duálním) uplatníme požadavek spojitého přenosu pole napětí a rovnici (1.180) zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (1.184)$$

Nová proměnná představuje mezielementové síly vztahené k hraničnímu povrchu prvku  $\Omega^{(1)}$ . Výsledkem analogických úprav je modifikovaný funkcionál

$$\begin{aligned} \Pi_{Rm}^* &= \Pi_R^* + \int_{\Gamma^{(12)}} \mathbf{u}^{(1)T} (\mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma^{(12)}} \mathbf{u}^{(2)T} (\mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma \\ &= \Pi_R^* + \int_{\Gamma^{(12)}} (\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{n}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)T} \mathbf{n}^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.185)$$

který lze převést pomocí vztahu (1.9) na tvar

$$\Pi_{Rm} = \Pi_R - \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) d\Gamma. \quad (1.186)$$

Pomocí vztahů (1.179 až (1.181) a (1.184) se můžeme přesvědčit, že funkcionály (1.182) a (1.186), respektive (1.183) a (1.185) jsou shodné. Variaci podléhají kromě posunů  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  a napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  též multiplikátory  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$ .

Modifikovaný Hellingerův-Reissnerův princip je základem tzv. smíšených modelů v analýze konstrukcí.

Modifikovaný Lagrangeův princip odvodíme z (1.186). Budeme-li požadovat pouze apriorní splnění geometrických rovnic (1.2), ne však splnění geometrických okrajových podmínek (1.7), dojdeme k vyjádření

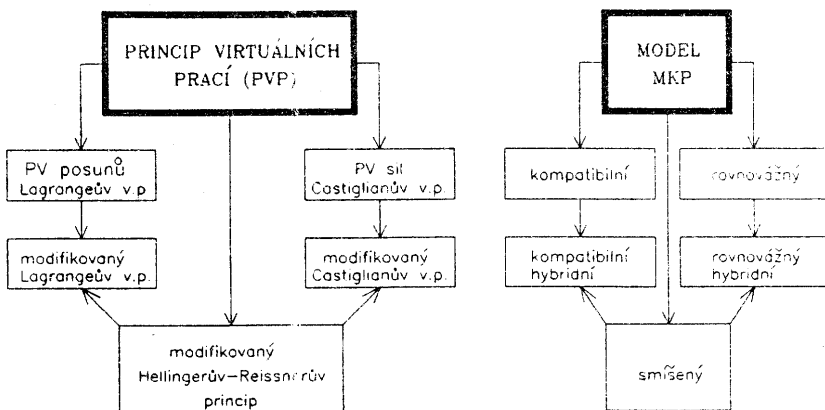
$$\Pi_m = \Pi - \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) d\Gamma - \int_{\Gamma_v} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma. \quad (1.187)$$

Variaci podléhají kromě posunů  $\mathbf{u}^{(1)}$  a  $\mathbf{u}^{(2)}$  též multiplikátory  $\lambda = \mathbf{n}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  na  $\Gamma^{(12)}$  a  $\boldsymbol{\sigma}$  na  $\Gamma_u$ . Modifikovaný Lagrangeův princip je základem tzv. kompatibilních hybridních modelů v analýze konstrukcí.

Modifikovaný Castiglianův princip odvodíme z (1.183). Budeme-li požadovat pouze apriorní splnění Cauchyho rovnic (1.1), ne však splnění silových okrajových podmínek (1.6), dojdeme k vyjádření (pozor na změnu znaménka)

$$\begin{aligned} \Pi_m^* &= \Pi^* - \int_{\Gamma^{(12)}} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{n}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \mathbf{n}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{p}}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.188)$$

Variaci podléhají kromě napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  a  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  též multiplikátory  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$  na  $\Gamma^{(12)}$  a  $\mathbf{u}$  na  $\Gamma_p$ . Modifikovaný Castiglianův princip je základem tzv. rovnovážných hybridních modelů v analýze konstrukcí. Souvislost variačních principů a odpovídajících výpočetních modelů je zřejmá z tab. 1.2. Kompatibilní model je založen na aproximaci pole posunů a je proto při-



Tabulka 1.2: Souvislost variačních principů a modelů MKP

rozeně svázán s deformační (posunovou) metodou řešení. Jejím produktem je matice tuhosti (prvku, konstrukce). Rovnovážný model je založen na aproximaci pole napětí a je proto přirozeně svázán se silovou metodou. Jejím produktem je matice podáajnosti (prvku, konstrukce). Protože algoritmus



silové metody je dosti komplikovaný, přechází se zpravidla inverzí matice poddajnosti a jejím rozšířením k matici tuhosti a tím k deformační variantě řešení. Tento postup je znám z mechaniky prutových konstrukcí a může být uplatněn i při řešení složitějších útvarů, jako jsou stěny, desky ap. V současnosti se odhaduje, že více jak 90 % programů je zpracováno v deformační variantě řešení. Algoritmus MKP úzce souvisí s klasickou Ritzovou metodou. Proto nejprve probereme její dvě základní varianty.

## 1.6.4 Ritzova metoda

### Deformační varianta Ritzovy metody

V řešené oblasti  $\Omega$  zvolíme báze funkce, které jsou pro danou úlohu kinematically přípustné. V případě funkcionálu  $\Pi$  - rovnice (1.153) to jsou funkce, které jsou na  $\Omega$  spojité a jejich vhodná lineární kombinace je schopna splnit geometrické okrajové podmínky. Přibližné řešení hledáme ve tvaru lineární kombinace báze funkcí

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y, z) + \sum_i u_i \varphi_i(x, y, z), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y, z) + \sum_i v_i \psi_i(x, y, z), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, z) + \sum_i w_i \chi_i(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.189)$$

Funkce  $u_0, v_0, w_0$  jsou vybrány tak, aby splňovaly předepsané geometrické okrajové podmínky (1.7), tj.

$$u_0 = \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad w_0 = \bar{w}, \quad \text{na } \Gamma_u.$$

Funkce  $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$  jsou lineárně nezávislé a splňují homogenní geometrické podmínky (1.7), tj.

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = 0, \quad \chi_k = 0, \quad \text{na } \Gamma_u.$$

Neznámými v takto formulovaném přibližném řešení jsou koeficienty lineární kombinace. V dalším vždy zvolíme báze funkce tak, aby platilo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r}, \quad (1.190)$$

kde  $\mathbf{N}$  je matice bázových funkcí (v MKP nazývaných příčinkovými nebo interpolačními funkcemi),

$\mathbf{r}$  je vektor dosud neznámých zobecněných posunů.

Pomocí geometrických rovnic (1.2) získáme aproximované pole deformace

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\partial}^T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{N}\mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\partial}^T\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\partial}^T\mathbf{N}\mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r}.\end{aligned}\tag{1.191}$$

Fyzikální rovnice (1.12) zapíšeme pomocí (1.191) takto:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{B}\mathbf{r}).\tag{1.192}$$

Pro zápis potenciální energie systému nejsou nutné. Uvádíme je proto, aby bylo patrné, jakým způsobem se při aplikaci Lagrangeova principu vypočtou nakonec složky vektoru  $\boldsymbol{\sigma}$ . Dosazením aproximace (1.191) do (1.10) vyjde

$$W = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0)^T \mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0).\tag{1.193}$$

Pomocí (1.192) a (1.193) dále rozvedeme funkcionál (1.153)

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0)^T \mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_0^T + \mathbf{r}^T \mathbf{N}^T) \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_p} (\mathbf{u}_0^T + \mathbf{r}^T \mathbf{N}^T) \bar{\mathbf{p}} d\Gamma.\end{aligned}\tag{1.194}$$

Po provedení naznačené integrace zjistíme, že  $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$  je funkcí prvků vektoru  $\mathbf{r}$ .

Extrém funkce o více proměnných nastává, jestliže první parciální derivace podle všech proměnných jsou rovny nule, což zapsáno maticově dává podmínku

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{0}.\tag{1.195}$$

Rozepsáním tohoto vztahu obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = \mathbf{0},\tag{1.196}$$

kteřou můžeme přepsat standardním způsobem:

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}_u.\tag{1.197}$$

Rovnice je symbolickým vyjádřením zobecněných podmínek rovnováhy diskretizovaného systému. Jednotlivé symboly značí

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \\ &\text{matice tuhosti systému,} \\ \mathbf{R}_p &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma \\ &\text{vektor zobecněného (transformovaného) zatížení,} \\ \mathbf{R}_u &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \\ &\text{vektor zobecněných reakcí.} \end{aligned}$$

Rozšíření na úlohy dynamiky je snadné. Druhý integrál v (1.196) se jen doplní o síly setrvačné, čímž vyjde

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B} \mathbf{r} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\bar{\mathbf{X}} - \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{r}}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} \, d\Gamma = \mathbf{0}. \quad (1.198)$$

Z toho vyplývají následující zobecnělé podmínky dynamické rovnováhy diskretizovaného systému

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}_u, \quad (1.199)$$

kde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \, d\Omega, \quad (1.200)$$

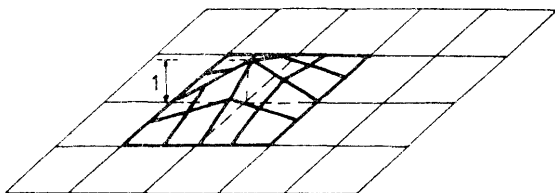
je matice hmotnosti systému.

Takto získaná matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  bývá označována jako *konzistentní* matice hmotnosti. Při řešení mnoha praktických úloh se spokojíme s jednodušším popisem setrvačných vlastností systému - soustředíme intuitivně hmotnost do jednotlivých uzlových bodů, což bude mít za následek, že matice  $\mathbf{M}$  vyjde diagonální.

Z podmínek rovnováhy (1.197) získáme zobecnělé posuny  $\mathbf{r}$ . Tím se potvrzuje, že algoritmus odvozený z Lagrangeova principu minima potenciální energie odpovídá deformační metodě.

Na tomto místě ukážeme rozdíl mezi klasickou Ritzovou metodou a MKP. V klasické Ritzově metodě jsou báze funkce voleny na celé vyšetřované oblasti a jejich volba je při komplikovanějším tvaru vyšetřované

oblasti nebo při časté změně okrajových podmínek (podepření) značně obtížná, ne-li nemožná. MKP oproti tomu má bázové funkce velmi jednoduché, nenulové pouze v nejbližším okolí jednotlivých uzlových bodů - viz obr. 1.25. Chceme-li v klasické Ritzově metodě zpřesnit řešení, musíme přidat další, lineárně nezávislé bázové funkce. V MKP postupujeme obdobně. Bázové funkce přidáme jednoduše tak, že vyšetřovanou oblast rozdělíme na více prvků. Na stejné oblasti vznikne více malých kopečků, což odpovídá zvýšení počtu (globálních) bázových funkcí.



Obr. 1.25: Příklad bázové funkce v MKP

### Silová varianta Ritzovy metody

K přibližnému řešení zobecnělou Ritzovou metodou slouží podmínka (1.162). Předpokládejme, že neznámé složky vektoru napětí mohou být přibližně vyjádřeny ve tvaru lineární kombinace předem zvolených bázových funkcí

$$\sigma(x, y, z) = \bar{\sigma}(x, y, z) + \sum_i \beta_i \sigma_i(x, y, z). \quad (1.201)$$

Funkce  $\bar{\sigma}$  jsou vybrány tak, aby splňovaly Cauchyho rovnice (1.1) a silové okrajové podmínky (1.6) předepsané na  $\Gamma_p$ . Funkce  $\sigma_i$  jsou lineárně nezávislé a splňují homogenní Cauchyho rovnice (1.1) a homogenní silové okrajové podmínky (1.6). Koefficienty lineární kombinace  $\beta_i$  hledáme. Předcházející vztah můžeme symbolicky zapsat ve tvaru

$$\sigma = \bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta. \quad (1.202)$$

S využitím vztahu (1.13) obdržíme pro komplementární energii výraz

$$W^* = \frac{1}{2} (\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta)^T \mathbf{C} (\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta) + (\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta)^T \bar{\epsilon}_0. \quad (1.203)$$

Jeho uplatněním v (1.162) najdeme

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta)^T \mathbf{C}(\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta) + (\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta)^T \bar{\varepsilon}_0] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (1.204)$$

Obdobně jako v případě Lagrangeova principu zjišťujeme, že  $\Pi^*$  je po naznačené integraci funkcí zatím neurčených koeficientů lineární kombinace  $\beta$ . Podmínka extrému má tvar

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \beta} = \mathbf{O}. \quad (1.205)$$

Rozepsáním tohoto vztahu obdržíme ( $\mathbf{p}$  vyjádříme pomocí (1.202) v kombinaci s (1.6)):

$$\int_{\Omega} [\mathbf{S}^T \mathbf{C}(\bar{\sigma} + \mathbf{S}\beta) + \mathbf{S}^T \bar{\varepsilon}_0] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{S}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = \mathbf{O}. \quad (1.206)$$

Tato rovnice představuje zobecnělé podmínky kompatibility diskretizovaného systému. Je to soustava lineárních algebraických rovnic, kterou můžeme přepsat v symbolickém tvaru

$$\mathbf{P}\beta + \Delta_p - \Delta_u = \mathbf{O}, \quad (1.207)$$

kde

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} d\Omega$$

je matice poddajnosti systému

$$\Delta_p = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T (\mathbf{C} \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_0) d\Omega$$

vektor zobecnělých deformací způsobených předepsanými silami  $\bar{\mathbf{X}}$ ,  $\bar{\mathbf{p}}$  a počáteční deformací  $\bar{\varepsilon}_0$ ,

$$\Delta_u = \int_{\Gamma_u} \mathbf{S}^T \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma$$

vektor zobecnělých deformací způsobených předepsanými posuny  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Z podmínek spojitosti deformací získáme parametry  $\beta$ , které umožňují určit pomocí (1.202) přibližnou hodnotu napětí v tělese. To znamená, že algoritmus odvozený z Castiglianova principu odpovídá silové metodě.

## 1.7 Podmínky konvergence v deformační variantě

Řešení MKP spočívá v nahrazení spojité idealizované konstrukce soustavou prvků. Přesnost řešení závisí na

- způsobu dělení řešené oblasti (počtu prvků a aproximaci tvaru hranice)
- aproximaci hledaných funkcí po prvku.

Aby přesnost řešení mohla být uvedenými dvěma způsoby zajištěna, musí být splněny následující podmínky konvergence, kladené na aproximační funkce

- spojitost
- úplnost.

Spojitosť znamená, že aproximované funkce (posuny, teplota ap.) musí být spojité jak uvnitř prvku, tak na hranici mezi prvky. Spojitosť tedy zajišťuje, že v důsledku zatížení nevznikají v soustavě prvků mezery. Pokud jsou neznámými v uzlových bodech pouze funkční hodnoty (uzlové posuny, uzlové teploty ap.), potom musí být ve všech bodech hranice mezi jednotlivými prvky zajištěna spojitost pouze funkčních hodnot, tzv.  $C^0$  spojitost. Pokud však jsou neznámými v uzlových bodech i derivace (např. pootočení normály při řešení desek na základě Kirchhoffovy teorie), potom aproximační funkce musí zajišťovat též spojitost v odpovídajících prvních derivacích neznámých funkcí ve všech bodech hranice mezi prvky, tzv.  $C^1$  spojitost.

Spojitosť je automaticky splněna u tažených - tlačných a ohýbaných prutů, neboť jsou spojeny pouze v uzlových bodech (průřezech). Poměrně snadné je zajištění spojitosti při řešení rovinné úlohy. Obtížnější je to v případě řešení tenkých desek a skořepin.

Úplnost budeme definovat s ohledem na řešení úloh teorie pružnosti. Aproximační funkce splňují podmínku úplnosti, jestliže

a) jsou schopny reprezentovat přemístění prvku jakožto tuhého tělesa, tedy bez vzniku deformace a z ní plynoucích napětí

b) jsou schopny reprezentovat stav konstantní deformace. K pochopení tohoto požadavku pomůže následující představa: Bude-li konstrukce dělena na neomezeně rostoucí počet prvků, stává se v limitě každý prvek neomezeně

malým. Jestliže deformace na prvku bude konstantní, potom lze zřejmě aproximovat v konstrukci libovolný průběh deformace.

Pokud aproximační funkce splňují podmínky spojitosti a úplnosti, říkáme, že prvek je konformní. Konvergence k přesnému řešení je v takovém případě monotónní. Nevyplývá z toho však, že napětí jsou spojitá na hranicích mezi prvky. Rovněž tak z uvedeného neplyne nic pro rychlost konvergence. Ta závisí na stupni aproximačních polynomů. Je žádoucí používat kompletních polynomů příslušného stupně.

Podmínka spojitosti nemusí být splněna a přesto řešení konverguje k přesnému řešení idealizované konstrukce. Konvergence však již není monotónní. Prvků, které nespĺňují požadavek spojitosti, je používána zvláště pro řešení desek a skořepin celá řada. V každém případě však prvek musí splňovat podmínku úplnosti. Pokud jsou aproximační funkce spojitě, ale ne úplně, řešení konverguje (dokonce monotónně), avšak k chybnému výsledku.

V případě nekonformních prvků, kdy je splněna podmínka úplnosti, avšak nejsou splněny podmínky spojitosti, je třeba prověřit, zda podmínky úplnosti vyhovuje soustava prvků. Prakticky se test provádí tak, že se z několika prvků (patch) vytvoří jednoduchý konstrukční prvek a ten se podrobí zatížení silami nebo předepsanými posuny, které odpovídají stavu konstantní deformace na idealizovaném konstrukčním prvku. V anglické literatuře se tento postup označuje jako *patch test*. Shoda předpokladu s výsledkem výpočtu potvrzuje výstižnost modelu. Podrobnosti jsou uvedeny ve třetí kapitole.

## 1.8 Nelineární systémy a kritérium stability

Ukázali jsme, že potenciální energie diskretizovaného systému je funkcí posunů  $r_i$ , tj.  $\Pi = \Pi(r_1, r_2, \dots) = \Pi(\mathbf{r})$ . Podmínky zapsané ve tvaru

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (1.208)$$

vyjadřují fakt, že vnitřní síly <sup>7</sup>  $\mathbf{F}$  jsou v rovnováze s vnějšími silami  $\mathbf{R}$ . Jestliže se systém chová nelineárně, vnitřní síly jsou funkcí posunů  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r_1, r_2, \dots) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Malému vzrůstu vnějších sil o  $d\mathbf{R}$  přísluší přírůstek sil

<sup>7</sup>Pod pojmem "vnitřní síly" se rozumí uzlové síly, které jsou vnitřním silám ekvivalentní.

vnitřních  $dF_i = \sum_j (\partial F_i / \partial r_j) dr_j$ , neboli <sup>8</sup>

$$d\mathbf{F}^T = d\mathbf{r}^T \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{F}^T \right) = d\mathbf{r}^T \mathbf{K}_t^T, \quad (1.209)$$

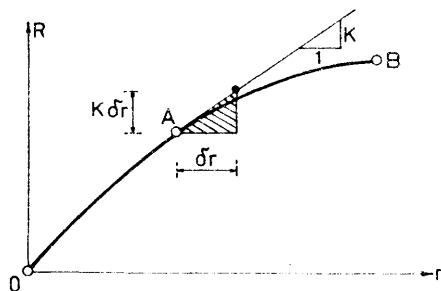
kde  $\mathbf{K}_t = (\partial \mathbf{F}^T / \partial \mathbf{r})^T$  je matice tečnové tuhosti. Její prvky jsou určeny vzorcem

$$k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial r_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_i \partial r_j}. \quad (1.210)$$

Rovnováha na konci přírůstku bude vyjádřena rovnicí

$$\mathbf{K}_t d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{R} - \mathbf{F}. \quad (1.211)$$

Člen na pravé straně vyjadřuje nerovnováhu mezi vnějšími a vnitřními silami vzniklou linearizací úlohy. Při numerickém řešení se odstraňuje iterací podmínek rovnováhy. Podrobnosti jsou uvedeny v čl. 9.4.



Obr. 1.26: Fundamentální dráha

Prozkoumejme podmínky stabilního stavu v bodu  $A$  na fundamentální dráze  $OAB$  (obr. 1.26). Za předpokladu, že vnější síly  $\mathbf{R}$  jsou pevně dány, uvažujme výchylku systému do vedlejšího stavu způsobenou malými posuny

<sup>8</sup>Derivace skalární funkce  $f$  podle vektoru  $\mathbf{r}$  je chápána jako operace sloupcového operátoru  $(\partial/\partial \mathbf{r})$  na tuto funkci. Jejím výsledkem je sloupcová matice  $\{\partial f/\partial \mathbf{r}\} = \{\partial f/\partial r_1, \dots, \partial f/\partial r_n\}^T$ . Podle stejných zásad je vytvořena i derivace vektoru  $\mathbf{F}^T$  podle vektoru  $\mathbf{r}$ .



$\delta \mathbf{r}$ . Potenciální energie systému II se změní o

$$\begin{aligned}
 \Delta \Pi &= \Pi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \Pi(\mathbf{r}) \\
 &= \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r_i \partial r_j} \delta r_i \delta r_j + \dots \\
 &= \sum_i (F_i - R_i) \delta r_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} \delta r_i \delta r_j + \dots \\
 &= \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{F} - \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_t \delta \mathbf{r} + \dots \\
 &= \delta \Pi + \delta^2 \Pi + \dots
 \end{aligned} \tag{1.212}$$

Na fundamentální dráze je zajištěna rovnováha, takže

$$\Delta \Pi \doteq \delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_t \delta \mathbf{r}. \tag{1.213}$$

Rovnovážný stav je

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabilní} \\ \text{kritický} \\ \text{nestabilní} \end{array} \right\}, \text{ jestliže } \delta^2 \Pi \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ pro všechny vektory } \delta \mathbf{r} \\ = 0 \text{ pro některé vektory } \delta \mathbf{r} \\ < 0 \text{ pro některé vektory } \delta \mathbf{r}. \end{array} \right. \tag{1.214}$$

Předchozí výsledek nyní zobecníme na základě prvního a druhého zákona termodynamiky. Ucelený výklad podal Bažant v [10]. Zde se dotkneme jen nejdůležitějších závěrů.

Podle prvního zákona termodynamiky (zachování energie) je přírůstek vnitřní energie, kterou budeme dále značit obvyklým symbolem  $U$  místo  $E_i$ , roven součtu přírůstku tepla  $\Delta Q$  přijatého tělesem z okolí a přírůstku práce vykonané vnějšími silami:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{R}. \tag{1.215}$$

S ohledem na druhý zákon termodynamiky uvažme přírůstek entropie ( $T$  je absolutní teplota)

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} + \Delta S_i. \tag{1.216}$$

První člen je dán tokem tepla do tělesa z okolí, zatímco  $\Delta S_i$  vyjadřuje vnitřní přírůstek entropie v konstrukci. Podle druhého zákona termodynamiky změna stavu  $\Delta S_i < 0$  *nemůže* nastat, případ  $\Delta S_i = 0$  *může* nastat

(změna zachovávající termodynamickou rovnováhu, která je vratná), případ  $\Delta S_i > 0$  vyjadřující nevratné procesy *musí* nastat (důsledně vzato při každém reálném přetvárném procesu dochází k disipaci energie).

V souladu s těmito závěry je rovnovážný stav stabilní, jestliže systém *nemůže* vyvolat změnu svého stavu sám od sebe. Kritérium (1.214) tak nabude obecnějšího tvaru. Rovnovážný stav je

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabilní} \\ \text{kritický} \\ \text{nestabilní} \end{array} \right\}, \text{ jestliže } \delta S_i \left\{ \begin{array}{l} < 0 \text{ pro všechny vektory } \delta \mathbf{r} \\ = 0 \text{ pro některé vektory } \delta \mathbf{r} \\ > 0 \text{ pro některé vektory } \delta \mathbf{r}. \end{array} \right. \quad (1.217)$$

Stabilitní kritérium se obvykle vyjadřuje pomocí stavových funkcí. Základní stavovou funkcí je vnitřní energie, jejíž přírůstek vyjádříme pomocí (1.215) a (1.216) ve tvaru

$$\Delta U = \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} + T(\Delta S - \Delta S_i). \quad (1.218)$$

Předchozí vyjádření je vhodné pro případ  $\Delta S = 0$ , který při zachování termodynamické rovnováhy ( $\Delta S_i = 0$ ) odpovídá adiabatickým deformacím  $\Delta Q = T\Delta S = 0$  (při velmi rychlých deformacích je změna energie způsobená vedením tepla zanedbatelná).

S vnitřní energií je spojena tzv. Legendreovou transformací

$$F = U - TS \quad (1.219)$$

Helmholtzova volná energie, jejíž přírůstek

$$\Delta F = \Delta U - \Delta(TS) = \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} - S \Delta T - T\Delta S_i. \quad (1.220)$$

Je vhodná pro izotermické deformace (velmi pomalé, takže je dostatek času na zajištění teplotní rovnováhy).

Zobecněním koncepce potenciální energie  $\Pi$  jsou stavové funkce  $\mathcal{F}$  resp.  $\mathcal{U}$ , pro něž

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &= \Delta F - \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} = -S \Delta T - T\Delta S_i, \\ \Delta \mathcal{U} &= \Delta U - \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{R} = -T\Delta S - T\Delta S_i. \end{aligned}$$

Kritérium stability vyjádříme nyní takto:

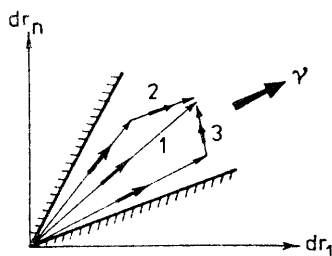
Rovnovážný stav konstrukce je při izentropických podmínkách ( $\Delta S = 0$ )

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabilní} \\ \text{kritický} \\ \text{nestabilní} \end{array} \right\}, \text{ jestliže } \delta^2 \mathcal{U} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_S(\mathbf{v}) \delta \mathbf{r} = -T\delta S_i \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0. \end{array} \right.$$

Rovnovážný stav konstrukce je při izotermických podmínkách ( $\Delta T = 0$ )

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabilní} \\ \text{kritický} \\ \text{nestabilní} \end{array} \right\}, \text{ jestliže } \delta^2 \mathcal{F} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_T(\boldsymbol{\nu}) \delta \mathbf{r} = -T \delta S_i \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0. \end{array} \right.$$

Argument  $\boldsymbol{\nu} = d\mathbf{r}/(d\mathbf{r}^T d\mathbf{r})^{1/2}$  ukazuje, že stavové funkce  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{F}$ , resp. matice tečnové tuhosti  $\mathbf{K}_S$  i  $\mathbf{K}_T$  jsou obecně dráhově závislé. U některých materiálů, jako je pružnoplastický materiál s deformačním zpevněním, mohou být matice  $\mathbf{K}$  na  $\boldsymbol{\nu}$  nezávislé, pokud se vektor  $\boldsymbol{\nu}$  pohybuje v určitém sektoru (např. kuželi) vymezeném ve vícerozměrném prostoru o souřadnicích  $dr_1, dr_2, \dots$ . Pro sektor vyznačený v obr. 1.27 jsou matice  $\mathbf{K}$  nezávislé na směru  $\boldsymbol{\nu}$  na drahách 1 a 2.



Obr. 1.27: Sektor dráhové nezávislosti

Termodynamické kritérium stability lze interpretovat takto:

Jestliže se konstrukce stane nestabilní, energie  $T\Delta S_i > 0$  ji uvede do pohybu (kinetická energie). V případě disipativních procesů, jako je vazkost, plasticita, vnitřní tření, poškození a lom, se tato energie nevratně změní v teplo.

Je-li konstrukce ve stabilním rovnovážném stavu, představuje energie  $-T\Delta S_i > 0$  práci vnějších sil, kterou je třeba dodat, abychom konstrukci z rovnovážného stavu vychýlili.

# Kapitola 2

## Prutové konstrukce

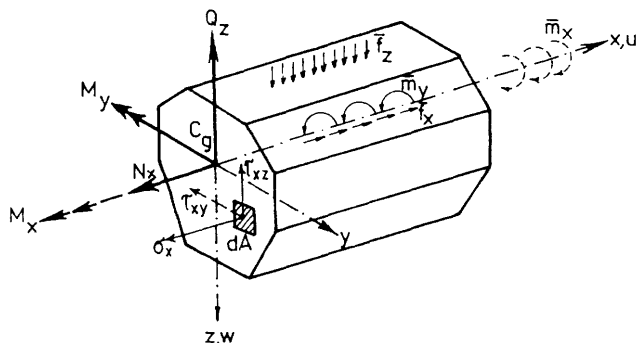
V této kapitole vyložíme řešení prutů pomocí dvou základních variant principu virtuálních prací, respektive variačních principů. Jak je obvyklé ve statice prutových konstrukcí, nebudeme energetické funkcionály vyjadřovat v napětích, ale ve vnitřních silách. Proto nejprve připomeneme nejdůležitější vztahy, jimiž se vnitřní síly řídí. V technické praxi se často setkáváme s ohýbanými pruty (nosníky), které spočívají jakožto základové pásy na pružném podloží. K tomuto účelu jsme vybrali Winklerův-Pasternakův model pružného podkladu, který je jednoduchý a z praktického hlediska dostatečně výstižný.

### 2.1 Základní vztahy pro prut

#### 2.1.1 Transformace základních rovnic pružnosti k průřezu

Uvažujme prut zatížený v rovině určené osou prutu  $x$ , která prochází těžištěm průřezu  $C_g$  a osou souměrnosti průřezu  $z$  (obr. 2.1). Jedná se o rovinný případ namáhání, který v průřezu způsobuje normálovou sílu  $N_x$ , posouvající sílu  $Q_z$  a ohybový moment  $M_y$ . Vnitřní síly jsou s napětími svázány podmínkami ekvivalence

$$N_x = \int_A \sigma_x dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA. \quad (2.1)$$



Obr. 2.1: Přímý prut

Účinkem smykových napětí dochází k deplanaci průřezu, jak je patrné z obr. 2.2. S výjimkou bodů  $A$  a  $B$ , kde je smykové napětí  $\tau_{xz} = 0$ , a tedy i zkosení  $\gamma_{xz} = \tau_{xz}/G = 0$ , se tečna k deformovanému průřezu odchyluje od kolmice k deformované střednici prutu (teoretická normála).

V technické praxi se osvědčil výpočet zkosení průřezu za předpokladu, že smykové napětí je po výšce průřezu rozloženo rovnoměrně (obr. 2.2 dole).

Průměrnému napětí  $\tau$  odpovídá průměrné zkosení  $\gamma$  určené úhlem mezi teoretickou normálou a pseudonormálou  $A'B'$ . Fyzikální vztah mezi průměrným zkosením  $\gamma$  a průměrným smykem  $\tau$  zapíšeme ve tvaru

$$\tau = k G \gamma. \quad (2.2)$$

Konstanta  $k$  se určí z podmínky rovnosti prací skutečných napětí (obvyklý součinitel  $1/2$  nepíšeme)

$$\int_A \tau_{xz} \gamma_{xz} dA = \frac{Q_z^2}{GI_y^2} \int_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA$$

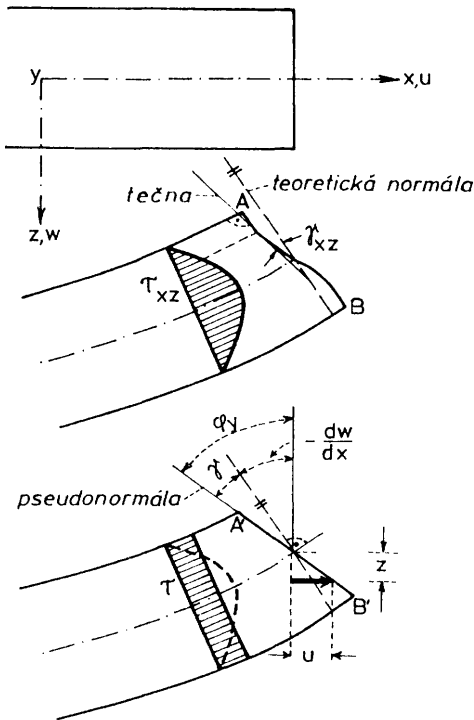
a zprůměrovaných napětí

$$\int_A \tau \gamma dA = \tau \gamma A = \frac{Q_z^2}{kAG}.$$

Porovnáním obou výrazů vychází

$$k = \frac{I_y^2}{A \int_A \frac{S_y^2(z)}{b^2(z)} dA}. \quad (2.3)$$

V předchozích vzorcích značí  $A$  průřezovou plochu,  $I_y$  moment setrvačnosti průřezu a  $S_y$  statický moment části průřezové plochy, odňaté řezem šířky  $b$  v úrovni  $z$ , k ose  $y$ . U obdélníkového průřezu je  $k = 5/6$ .



Obr. 2.2: Předpoklady o deformaci prutu

Předpoklad, že průřez zůstává po deformaci rovinný, není však kolmý k deformované střednici prutu, přijali Mindlin, Reissner, Timošenko ad. Pro určitost jej budeme dále nazývat *Mindlinovou hypotézou*.

Podle ní a v souladu s obr. 2.2 lze vypočítat vodorovný posun  $u$  způsobený ohybem (pootočením průřezu  $\phi_y$ ) a protažením střednice

$$u(x, s) = u_s(x) + \phi_y(x)z. \quad (2.4)$$

Geometrické rovnice umožňují vypočítat relativní prodloužení podélného

vlákna

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d u_s}{d x} + \frac{d \varphi_y}{d x} z = \varepsilon_x(x, z) \quad (2.5)$$

a zkosení

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y + \frac{d w}{d x} = \gamma(x). \quad (2.6)$$

Při poslední úpravě jsme přijali druhý obvyklý předpoklad u prutů, že svislé posuny se po výšce průřezu nemění, tedy  $w(x, z) = w(x)$ .

Rozvedením fyzikálních vztahů pomocí (2.5) a (2.6) vychází

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_0) = E\left(\frac{d u_s}{d x} + \frac{d \varphi_y}{d x} z - \bar{\varepsilon}_0\right) \\ \tau &= k G \gamma = k G \left(\varphi_y + \frac{d w}{d x}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

S využitím předchozích poznatků a s uvážením, že osa  $y$  prochází těžištěm  $C_g$ , nabudou výrazy (2.1) pro průřezové síly tvaru

$$\begin{aligned} N_x &= EA \frac{d u_s}{d x} - \bar{N}_0, \\ M_y &= EI_y \frac{d \varphi_y}{d x} - \bar{M}_0, \\ Q_z &= kGA\left(\varphi_y + \frac{d w}{d x}\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde

$$\bar{N}_0 = E \int_A \bar{\varepsilon}_0(x, z) dA, \quad \bar{M}_0 = E \int_A \bar{\varepsilon}_0(x, z) z dA. \quad (2.9)$$

Je-li počáteční deformace způsobena oteplením  $\bar{\varepsilon}_0 = \alpha T(x, z)$ , dostaneme

$$\bar{N}_0 = \bar{N}_T = E\alpha \int_A T dA, \quad \bar{M}_0 = \bar{M}_T = E\alpha \int_A T z dA. \quad (2.10)$$

Síly označené pruhem jsou vnitřními silami působícími v konstrukci, která se nemůže deformovat ( $du_s/dx = 0$ ,  $d\varphi_y/dx = 0$ ). Poznamenejme ještě, že  $\bar{\varepsilon}_0$  resp.  $T$  mohou být nanejvýš lineárními funkcemi proměnné  $z$ , aby byl splněn předpoklad o zachování rovinnosti průřezů po deformaci (kompatibilita sousedních elementů).

Zanedbáme-li vliv posouvajících sil na přetvoření prutu, vyjde z podmínky

$$\gamma = \varphi_y + \frac{d w}{d x} = 0 \quad (2.11)$$

vazba mezi pootočením průřezu a průhybem

$$\varphi_y = -\frac{dw}{dx}. \quad (2.12)$$

Řešení konstrukcí podle (2.12) odpovídá Bernoulliovu předpokladu o zachování kolmosti příčných řezů k deformované střednicové ose prutu. Druhý ze vzorců (2.8) má v takovém případě tvar

$$M_y = -\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} + \bar{M}_0\right). \quad (2.13)$$

Vnitřní síly musí splňovat tři podmínky rovnováhy na diferenciálním elementu prutu (srov. [68])

$$\frac{dN_x}{dx} + \bar{f}_x = 0, \quad \frac{dQ_z}{dx} + \bar{f}_z = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} + \bar{m}_y - Q_z = 0. \quad (2.14)$$

Z posledních dvou rovnic lze vyloučit posouvající sílu  $Q_z$ , což vede k rovnici

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{d\bar{m}_y}{dx} + \bar{f}_z = 0. \quad (2.15)$$

Předchozí vztahy využijeme při výpočtu rámových konstrukcí. Roštové konstrukce jsou kromě ohybu namáhány kroucením. Krouticí moment  $M_x$  je svázán s relativním úhlem zkroucení  $d\varphi_x/dx$  vztahem

$$M_x = GI_k \frac{d\varphi_x}{dx}, \quad (2.16)$$

kde  $I_k$  je moment tuhosti průřezu ve volném kroucení. U masivních průřezů, jejichž tvar se alespoň zhruba blíží kruhu, se  $I_k$  vyjadřuje přibližně vzorcem

$$I_k = \frac{A^4}{40I_p}, \quad (2.17)$$

kde  $I_p$  je polární moment setrvačnosti průřezu. U složitějších průřezů lze  $I_k$  vypočítat pomocí MKP, jak je popsáno v čl. 7.1.

Diferenciální podmínka rovnováhy krouticích momentů má tvar

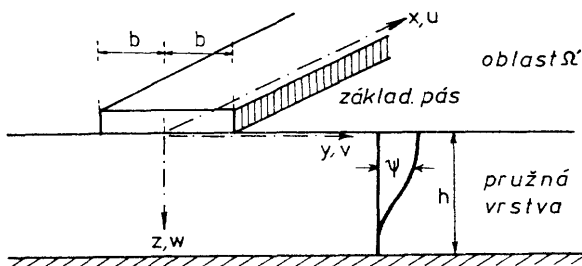
$$\frac{dM_x}{dx} + \bar{m}_x = 0, \quad (2.18)$$

kde  $\bar{m}_x$  je spojitě krouticí zatížení. V obr. 2.1 je vyznačeno čárkovaně.



## 2.1.2 Prut na pružném podloží

Základové pásy jsou modelovány jako nosníky spočívající na pružném podloží. Pro vertikálně neohraničený podklad se nejčastěji používá Boussinesqova teorie pružného poloprostoru, pro podklad tvořený ohraničenou vrstvou tloušťky  $h$  obr. (2.3) je vhodný Winklerův-Pasternakův dvouparametrický model. Omezíme se na tento případ a pro jednoduchost budeme předpokládat, že vrstva je homogenní a izotropní.



Obr. 2.3: Pás na pružné vrstvě

Dále budeme předpokládat, že vodorovné posuny  $u, v$  jsou zanedbatelné ve srovnání se svislým posunem  $w$ <sup>1</sup>. Za předpokladu, že známe průběh posunů  $w$  po tloušťce vrstvy (pro určitost si myslíme, že funkce  $\psi$  popisující tento průběh byla zjištěna experimentálně), můžeme psát

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w(x, y, z) = w(x, y, 0) \psi(z). \quad (2.19)$$

S využitím geometrických rovnic (1.2) najdeme

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 0, & \epsilon_y &= 0, & \gamma_{xy} &= 0, \\ \epsilon_z &= w \frac{d\psi}{dz}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} \psi, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} \psi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

<sup>1</sup>Podmínky  $u = v = 0$  určují zvláštní druh anizotropie, která charakterizuje tzv. Westergaardův materiál. Jeho podrobnou analýzu podal Hanuška v [29]. Ukázal, že předpoklad o neroztažitelnosti podloží při zachování platnosti Hookeova zákona (1.12) vede na nekonzistentní řešení, což má neblahé důsledky na analýzu napjatosti uvnitř podloží. Důsledné odvození teorie neroztažitelného podloží vyžaduje vyjít z transversálně izotropních těles s pěti materiálovými konstantami a k výsledkům dojít limitním přechodem těchto konstant. Na druhé straně modely založené na apriorních předpokladech o neroztažitelnosti podloží poskytují dobrou aproximaci svislých posunů povrchu. Vystihují proto i tuhost podloží, která nás přednostně zajímá z hlediska interakce podloží s konstrukcí.

kde  $w = w(x, y, 0)$ .

Vzhledem k předpokladům (2.19) se vzorce pro výpočet napětí zjednoduší na tvar

$$\sigma_z = E_{oed} w \frac{d\psi}{dz}, \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \psi, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \psi, \quad (2.21)$$

kde podle tab. 1.1 je oedometrický modul

$$E_{oed} = G \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.22)$$

a modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.23)$$

Separace proměnných ve vztazích (2.19) až (2.21) umožňuje vyloučit závislost řešení na proměnné  $z$ . Za tím účelem nejprve vyjádříme virtuální práci vnitřních sil, a to pomocí vztahů (2.20) a (2.21). Provedeme-li ve vztahu (viz odst. 1.6.1)

$$\delta E_i = \int_{\Omega} (\delta \varepsilon_z \sigma_z + \delta \gamma_{xz} \tau_{xz} + \delta \gamma_{yz} \tau_{yz}) d\Omega, \quad (2.24)$$

kde

$$\delta \varepsilon_z = \delta w \frac{d\psi}{dz}, \quad \delta \gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \psi, \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \psi,$$

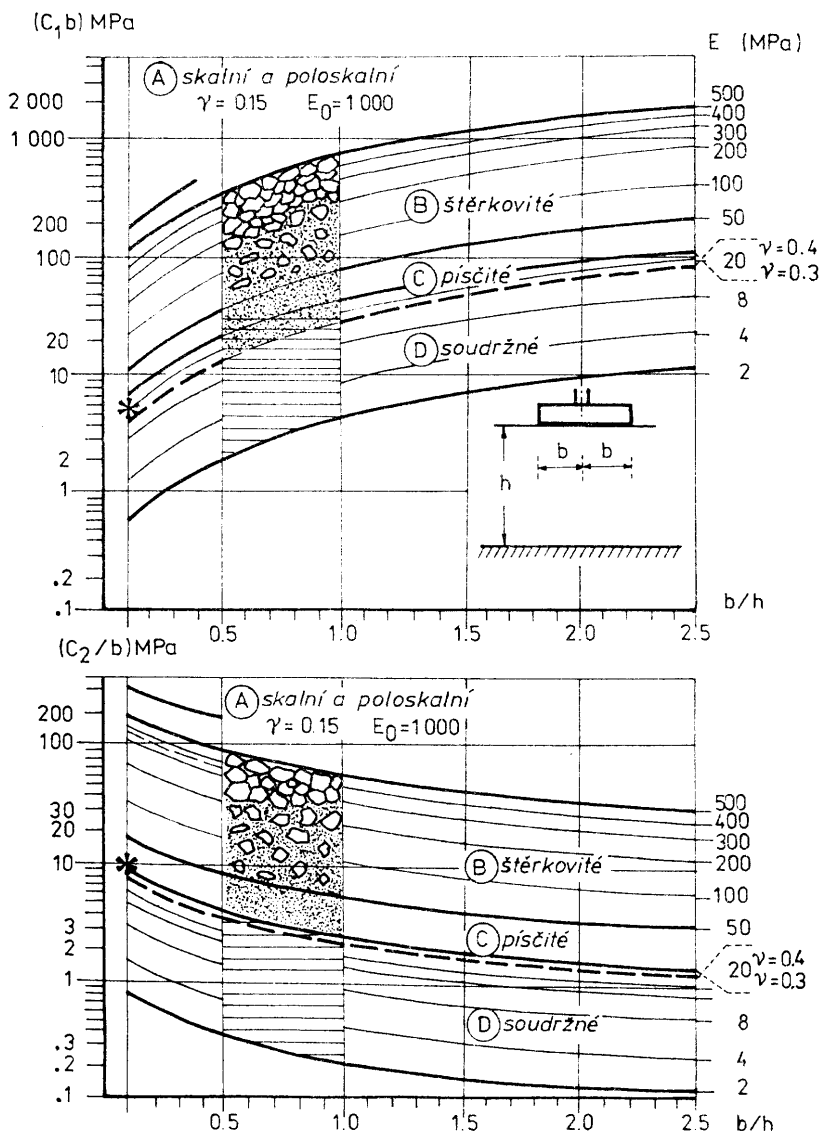
integraci po tloušťce vrstvy, snadno zjistíme, že

$$\delta E_i = \int_{\Omega'} \left\{ \delta w C_1 w + C_2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy. \quad (2.25)$$

Integrační oblast  $\Omega'$  je vyznačena v obr. 2.3. Nově odvozené materiálové konstanty souvisejí se vstupními parametry  $E$  a  $\nu$  vztahy

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^h E_{oed} \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 dz \quad (\text{Nm}^{-3}), \\ C_2 &= \int_0^h G \psi^2 dz \quad (\text{Nm}^{-1}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Podrobnou analýzou vrstvy lze ukázat (viz [51]), že průběh funkce  $\psi$  je závislý na dvou vstupních konstantách  $E$  a  $\nu$  a poměru  $b/h$  (obr. 2.3).

Obr. 2.4: Závislost  $C_1, C_2$  na poměru  $b/h$  a  $E$

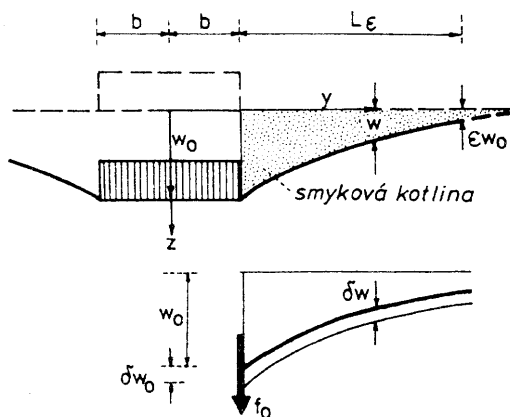
Důsledky této závislosti jsou patrné z obr. 2.4, který slouží k rychlému stanovení konstant  $C_1$  a  $C_2$ .

Výraz (2.25) umožňuje definovat dvě ekvivalentní smykové síly

$$q_{xz} = C_2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad q_{yz} = C_2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.27)$$

kteří pracují na virtuálních zkoseních  $\partial(\delta w)/\partial x$ ,  $\partial(\delta w)/\partial y$  a jejichž virtuální práce je rovna úhrnné práci smykových napětí  $\tau_{xz}$  a  $\tau_{yz}$  nerovnoměrně rozložených po tloušťce vrstvy.

Výše uvedené poznatky umožní vyšetřit síly, jimiž podloží působí na deformovaný základový pás při ohybu v rovině  $xz$  a při kroucení kolem osy  $x$ . Vyjdeme ze základního deformačního stavu - rovnoměrného zatlačení pásu do podloží podle obr. 2.5.



Obr. 2.5: Rovnoměrné zatlačení pásu do podloží

Nechť  $f_0 = -q_{yz}(b)$  je ekvivalentní měrná smyková síla ( $\text{Nm}^{-1}$ ), kterou část zeminy pod pásem působí na odňatou část vpravo  $y \geq b$  a zatlačuje ji dolů. Vzhledem k odňaté části se  $f_0$  jeví jako vnější síla konající virtuální práci (uvažujeme pruh šířky  $\Delta x = 1\text{m}$ )

$$-\delta E_e = f_0 \delta w_0,$$

kde  $E_e$  je potenciální energie vnějších sil.

Ohybová plocha je v tomto speciálním případě nezávislá na proměnné  $x$ , takže princip virtuálních posunů

$$\delta(E_e + E_i) = 0$$

nabude tvaru

$$-f_0 \delta w_0 + \int_b^\infty \left[ \delta w C_1 w + C_2 \frac{d}{dy} (\delta w) \frac{dw}{dy} \right] dy = 0.$$

Druhý člen integrálu upravíme integrací per partes:

$$\left( -f_0 - C_2 \left[ \frac{dw}{dy} \right]_{y=b} \right) \delta w_0 + \int_b^\infty \left[ C_1 w - C_2 \frac{d^2 w}{dy^2} \right] \delta w dy = 0.$$

Při této úpravě jsme uvážili, že  $dw/dy \rightarrow 0$  pro  $y \rightarrow \infty$ .

Rovnice bude splněna při libovolných virtuálních posunech, bude-li platit podmínka rovnováhy svislých sil

$$C_1 w - C_2 \frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \text{pro } y \geq b \quad (2.28)$$

a okrajová podmínka (viz též vzorec (2.27))

$$f_0 = -q_{yz}(b) = -C_2 \left[ \frac{dw}{dy} \right]_{y=b}. \quad (2.29)$$

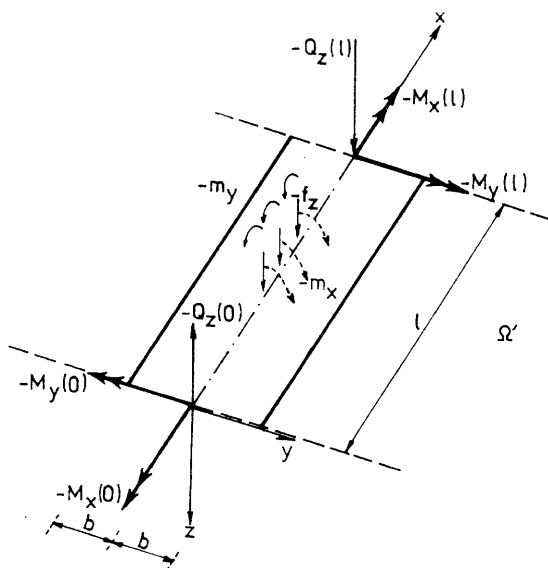
Řešení rovnice (2.28) umožňuje stanovit tvar *smýkové kotliny* vyznačené na obr. 2.5. Elementární výpočet dává

$$w(y) = w_0 e^{-\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}(y-b)}, \quad \text{pro } y \geq b, \quad (2.30)$$

$$f_0 = w_0 \sqrt{C_1 C_2}. \quad (2.31)$$

Vzorec (2.30) má velký praktický význam, neboť poskytuje snadný odhad délky smýkové kotliny  $L_\varepsilon$ . Indexem  $\varepsilon$ , kterému přísluší dostatečně malé číslo, určujeme podle obr. 2.5 místo, kde je pokles povrchu z praktického hlediska zanedbatelný. Řešením rovnice

$$\varepsilon w_0 = w_0 e^{-\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} L_\varepsilon}$$



Obr. 2.6: Segment podloží pod základovým pásem

najdeme

$$L_\varepsilon = -\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \ln \varepsilon = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.32)$$

Předchozí výsledky nyní zobecníme. Uvažujme segment podloží pod pásem délky  $l$  (obr. 2.6). Základový pás působí na podloží měrným zatížením  $-f_z$  ( $f_z = f_z^{podi}$ , je podle obr. 2.1 zatížení, kterým působí podloží na pás), dále spojitým momentovým zatížením  $-m_x, -m_y$  a koncovými silami  $[-Q_z, -M_x, -M_y]_{x=0}^l$ . Se silovými faktory jsou sdruženy veličiny  $w_0, \varphi_x, \varphi_y = -dw_0/dx$  popisující přetvoření kontaktní plochy pod pásem. Jejich vzájemný vztah získáme opět aplikací principu virtuálních posunů, který umožní vyloučit závislost řešení na proměnné  $y$ . Za tím účelem vyjádříme svislý posun  $w = w(x, y)$  obecného bodu povrchu pomocí vzorce (2.30)

$$w(x, y) = \begin{cases} w_0(x) + \varphi_x(x)y, & \text{pro } |y| \leq b \\ [w_0(x) + \varphi_x(x)b] e^{-\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}(y-b)}, & \text{pro } y \geq b. \end{cases} \quad (2.33)$$

Uplatněním této aproximace ve variační rovnici

$$\delta(E_e + E_i) = 0,$$

neboli

$$\int_0^l (f_z^{podl} \delta w_0 + m_x^{podl} \delta \varphi_x + m_y^{podl} \delta \varphi_y) dx + [Q_z \delta w_0 + M_x \delta \varphi_x + M_y \delta \varphi_y]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C_1 w \delta w + C_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0, \quad (2.34)$$

dostaneme po úpravě, spočívající v integraci a formálním přeskupení členů, následující vyjádření

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left\{ \delta w_0 \left[ f_z + 2 \left( C_1 b + \sqrt{C_1 C_2} \right) w_0 \right] \right. \\ & + \delta \varphi_y \left[ m_y + 2 \left( C_2 b + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \varphi_y \right] \\ & + \delta \varphi_x \left[ m_x + 2b^2 \left( C_1 \frac{b}{3} + \frac{C_2}{b} + \sqrt{C_1 C_2} \right) \varphi_x \right] \\ & + \left. \frac{d \delta \varphi_x}{dx} 2b^2 \left( C_2 \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \frac{d \varphi_x}{dx} \right\} dx \\ & + [Q_z \delta w_0 + M_x \delta \varphi_x + M_y \delta \varphi_y]_{x=0}^{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Poslední člen v integrálu upravíme integrací per partes. Jedná se o běžný výpočetní postup, který není třeba procházet. Má-li být rovnice splněna při nezávislých variacích  $\delta w_0$ ,  $\delta \varphi_x$ ,  $\delta \varphi_y$ , musí být součinitelé u variací rovny nule, takže

$$f_z^{podl.} = -2 \left( C_1 b + \sqrt{C_1 C_2} \right) w \quad (2.36)$$

$$m_y^{podl.} = -2 \left( C_2 b + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \varphi_y = 2 \left( C_2 b + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \frac{d w}{d x}$$

$$\begin{aligned} m_x^{podl.} &= -2b^2 \left( C_1 b/3 + \frac{C_2}{b} + \sqrt{C_1 C_2} \right) \varphi_x \\ &+ 2b^2 \left( C_2 b/3 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \frac{d^2 \varphi_x}{d x^2}. \end{aligned}$$

Na okrajích  $x = 0$  a  $x = l$  musí být splněny vztahy

$$Q_z = 0, \quad M_y = 0, \quad M_x = -2b^2 \left( C_2 b/3 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}} \right) \frac{d\varphi_x}{dx}.$$

Index nula jsme u posunu  $w$  vynechali kvůli dalšímu použití.

Zahrnutím získaných výsledků do (2.15) dojdeme k diferenciální rovnici ohybu prutu na pružném Winklerově-Pasternakově podkladě:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{d\bar{m}_y}{dx} + \bar{f}_z + \left[ 2b \left( C_2^* \frac{d^2 w}{dx^2} - C_1^* w \right) \right] = 0, \quad (2.37)$$

kde

$$\begin{aligned} C_1^* &= C_1 + \frac{1}{b} \sqrt{C_1 C_2}, \\ C_2^* &= C_2 + \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Zdůrazňujeme, že šířka základu je označena  $2b$ . Výraz v hranaté závorce v rovnici (2.37) vyjadřuje reakci pružného podkladu. Obdobným způsobem upravíme i diferenciální rovnici (2.18):

$$\frac{dM_x}{dx} + \bar{m}_x + \left[ 2b \left( C_4^* \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - C_3^* \varphi_x \right) \right] = 0, \quad (2.39)$$

kde

$$\begin{aligned} C_3^* &= \frac{1}{3} C_1 b^2 + C_2 + b \sqrt{C_1 C_2} \\ C_4^* &= \frac{1}{3} C_2 b^2 + \frac{b}{2} \sqrt{\frac{C_2^3}{C_1}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

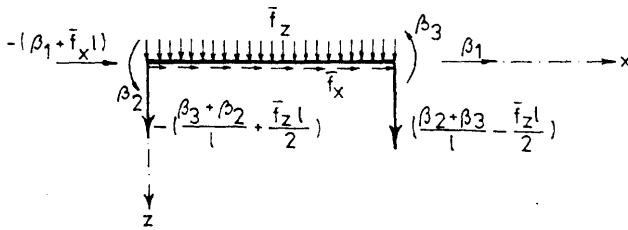
Výraz v hranaté závorce opět vyjadřuje reakci pružného podkladu.

## 2.2 Tažený - tlačенý a ohýbaný prvek

### 2.2.1 Silová varianta řešení

Prvek na obr. 2.7 je umístěn v lokální soustavě souřadnic a přenáší osově síly (tažený-tlačенý prvek) a ohybové momenty a posouvající síly (ohýbaný prvek). Za předpokladu rovnoměrného rozdělení zatížení  $\bar{f}_x$ ,  $\bar{f}_z$  po délce





Obr. 2.7: Prvek v lokální soustavě souřadnic

prutu je soustava sil vyznačených na obr. 2.7 v rovnováze. Ze šesti zobecněných koncových sil jsou tři veličiny (osová síla  $\beta_1$  a momenty  $\beta_2, \beta_3$ ) tvořící vektor  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}^T$  nezávislé, zbývající silové faktory jsou svázány třemi podmínkami rovnováhy na prvku - dvěma silovými a jednou momentovou.

Rovnovážné vnitřní síly jsou vyjádřeny následujícími vzorci ( $x = \xi l$ ):

Normálová síla

$$N_x(\xi) = \beta_1 + \bar{f}_x l(1 - \xi), \quad (2.41)$$

ohybový moment

$$M_y(\xi) = -\beta_2(1 - \xi) + \beta_3\xi + \frac{\bar{f}_z l^2}{2}\xi(1 - \xi). \quad (2.42)$$

Konečně posouvající síla podle druhého vzorce (2.14)

$$Q_z(\xi) = \frac{\beta_2 + \beta_3}{l} + \frac{\bar{f}_z l}{2}(1 - 2\xi). \quad (2.43)$$

Deformace odpovídající vnitřním silám vypočteme ze vzorců (2.8). Počáteční deformace  $\bar{\epsilon}_0$  budeme považovat za důsledek rovnoměrného oteplení  $T$  a nerovnoměrného oteplení  $(T_d - T_h)$  lineárně rozděleného po výšce průřezu. Rozdělení teploty po délce prutu je konstantní. Osová dilatace způsobená normálovou silou

$$\frac{d u_s}{d x} = \frac{1}{EA}[\beta_1 + \bar{f}_x l(1 - \xi)] + \alpha T. \quad (2.44)$$

Změna křivosti způsobená ohybovým momentem

$$\frac{d \varphi_y}{d x} = \frac{1}{EI_y} \left[ -\beta_2(1 - \xi) + \beta_3\xi + \frac{\bar{f}_z l^2}{2}\xi(1 - \xi) \right] + \alpha \frac{T_d - T_h}{h}, \quad (2.45)$$

kde  $h$  je výška průřezu.

Zkosení způsobené posouvající silou

$$\gamma = \frac{1}{kGA} \left[ \frac{\beta_2 + \beta_3}{l} + \frac{\bar{f}_z l}{2} (1 - 2\xi) \right]. \quad (2.46)$$

Ve vzorcích (2.44) a (2.45) značí  $T = \frac{1}{2}(T_d + T_h)$  změnu teploty v ose prutu, indexy  $d$  a  $h$  jsou označena dolní a horní vlákna prutu.

Přidržíme se maticového vyjádření Castiglianova principu z odst. 1.6.4 a zavedeme analogický přepis vztahů (2.41) až (2.46). Musíme si však uvědomit, že maticové symboly budou mít poněkud jiný význam, neboť neppracujeme v napětích, ale v průřezových silách. V důsledku toho se integrace přes objem prvku zredukuje na integrace po jeho délce. Rovnice (2.41) až (2.43) zapíšeme maticově takto

$$\begin{Bmatrix} N_x(\xi) \\ M_y(\xi) \\ Q_z(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\xi) & \xi \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_z l (1-\xi) \\ \frac{\bar{f}_z l^2}{2} \xi (1-\xi) \\ \frac{\bar{f}_z l}{2} (1-2\xi) \end{Bmatrix},$$

neboli

$$\sigma(\xi) = \mathbf{S}(\xi)\beta + \bar{\sigma}(\xi). \quad (2.47)$$

Obdobně přepíšeme i rovnice (2.44) až (2.46) vyjadřující materiálové vlastnosti prvku:

$$\epsilon(\xi) = \mathbf{C} [\mathbf{S}(\xi)\beta + \bar{\sigma}(\xi)] + \bar{\epsilon}_0(\xi), \quad (2.48)$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{EI_y} & \\ & & \frac{1}{kGA} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

je matice poddajnosti průřezu a

$$\bar{\epsilon}_0 = \left\{ \alpha T, \alpha \frac{T_d - T_h}{h}, 0 \right\}^T \quad (2.50)$$

vektor počátečního přetvoření způsobeného změnou teploty. Význam zbývajících symbolů je evidentní.

Rovnice kompatibility deformace je vyjádřena rovnicí (1.207). Matice poddajnosti prvku je určena vzorcem

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) \mathbf{C} \mathbf{S}(\xi) l d\xi \\ &= \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{6EI_y}(2 + \kappa) & \frac{l}{6EI_y}(-1 + \kappa) \\ 0 & \frac{l}{6EI_y}(-1 + \kappa) & \frac{l}{6EI_y}(2 + \kappa) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

kde

$$\kappa = \frac{6EI_y}{kGA l^2}. \quad (2.52)$$

K uvedenému výsledku jsme se dostali tak, že jsme matice v integrandu roznásobili a poté integrovali každý prvek výsledné matice v mezích od 0 do 1. Úprava mezí odpovídá transformaci  $\mathbf{x} = \xi l$ , která prvek délky  $l$  převádí na prvek jednotkový.

Stejně formálně lze propočítat vektor tří deformací (protažení prutu  $\Delta$  a pootočení koncových průřezů prostě podepřeného nosníku  $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) způsobených vnějším zatížením a oteplením (obr. 2.8)

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \int_0^1 \mathbf{S}^T(\xi) [\mathbf{C} \bar{\sigma}(\xi) + \bar{\epsilon}_0(\xi)] l d\xi \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\bar{f}_x l^2}{2EA} \\ -\frac{\bar{f}_z l^3}{24EI_y} \\ \frac{\bar{f}_z l^3}{24EI_y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha T l \\ -\frac{\alpha l(T_d - T_h)}{2h} \\ \frac{\alpha l(T_d - T_h)}{2h} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Za předpokladu oboustranného vetknutí prvku dosadíme do rovnice kompatibility (1.207)  $\Delta_u = \mathbf{0}$ . Z redukované rovnice

$$\mathbf{P} \beta_p + \Delta_p = \mathbf{0}$$

vypočteme tři koncové zobecněné síly na oboustranně vetknutém prvku

$$\begin{aligned}\beta_p &= -\mathbf{P}^{-1}\Delta_p \\ &= \left\{ -\left(\frac{\bar{f}_x l}{2} + \bar{N}_T\right), \frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T, -\left(\frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T\right) \right\}^T,\end{aligned}\quad (2.54)$$

kde

$$\mathbf{P}^{-1} = \hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y(2+\kappa)}{l(1+2\kappa)} & \frac{2EI_y(1-\kappa)}{l(1+2\kappa)} \\ 0 & \frac{2EI_y(1-\kappa)}{l(1+2\kappa)} & \frac{2EI_y(2+\kappa)}{l(1+2\kappa)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

je (zúžená) *matice tuhosti* prvku.

Naopak, kdyby prvek doznal při nulovém vnějším zatížení a oteplení koncové deformace  $\Delta_u = \hat{\mathbf{r}} = \{\Delta, \vartheta_1, \vartheta_2\}^T$ , koncové síly by musely mít podle (1.207) hodnotu

$$\beta = \mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.56)$$

V závěru odst. 1.6.3 jsme se zmínili v komentáři k matematickým modelům MKP o užitečnosti přechodu od silové varianty řešení k deformační (posunové) variantě. Probíraný prvek umožňuje tento přechod dobře ilustrovat. Cílem transformace je sestavení základní rovnice deformační metody (1.197) pro prvek. Protože jej vyjímáme z konstrukce, musíme vektor transformovaného zatížení  $\mathbf{R}_p$  doplnit o vektor koncových sil  $\mathbf{R}$ , jimiž na prvek působí okolní část. Oba druhy sil  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{R}_p$  totiž mají při uplatnění principu řezu povahu vnějších sil. Základní rovnici deformační metody zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_p. \quad (2.57)$$

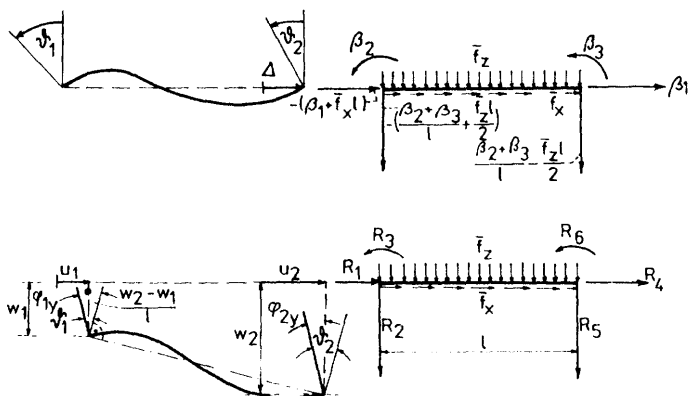
Přechod od (2.54) a (2.56) k (2.57) vyžaduje znát vztahy mezi třemi parametry ryzí deformace  $\Delta$  a šesti zobecněnými posuny

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}^T \\ &= \{u_1, w_1, \varphi_{1y}, u_2, w_2, \varphi_{2y}\}^T,\end{aligned}\quad (2.58)$$

kteří v sobě zahrnují i tři stupně volnosti, jež má prvek jako tuhé těleso. Současně musíme znát vztah mezi třemi nezávislými silovými faktory  $\beta$  a šesti zobecněnými koncovými silami

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}^T, \quad (2.59)$$

kteří jsou svázány třemi podmínkami rovnováhy. Příslušné souvislosti jsou vyjádřeny vztahy (2.60) a (2.61), které jsme sestavili pomocí obr. 2.8. Platí



Obr. 2.8: Závislost koncových sil

$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 1 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_{1y} \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_{2y} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{f}_z l \\ -\frac{\bar{f}_z l}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\bar{f}_z l}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix}.$$

Přehlednější je zápis v kompaktním tvaru

$$\hat{r} = T r \quad (2.60)$$

$$R = \bar{R} + T^T \beta. \quad (2.61)$$

Je formálním vyjádřením *Krohnova teoremu*, podle kterého jsou matice vystupující v geometrické rovnici (2.60) a v silové rovnici (2.61) vzájemně transponované.

Podle (2.54) a (2.56) je vektor  $\beta$  součtem dvou členů

$$\beta = P^{-1}(\hat{r} - \Delta_p) = \hat{K}(\hat{r} - \Delta_p). \quad (2.62)$$

Kombinací vzorců (2.60) až (2.62) obdržíme hledané vyjádření

$$K = T^T \hat{K} T \quad (2.63)$$

$$= \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} \frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 & -\frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 \\ & \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ & & (2+\kappa) & 0 & \frac{3}{l} & (1-\kappa) \\ & & & \frac{A(1+2\kappa)}{2I_y} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \\ & & & & & (2+\kappa) \end{bmatrix}$$

Připomínáme, že součinitel  $\kappa$  je definován vzorcem (2.52). Dále vyjde

$$R_p = -\bar{R} + T^T \hat{K} \Delta_p. \quad (2.64)$$

Jednotlivé prvky vektoru  $R_p$  jsou vyjádřeny takto

$$R_{p1} = \frac{\bar{f}_x l}{2} - \bar{N}_T, \quad R_{p2} = \frac{\bar{f}_z l}{2}, \quad R_{p3} = -\left(\frac{1}{12} \bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T\right),$$

$$R_{p4} = \frac{\bar{f}_x l}{2} + \bar{N}_T, \quad R_{p5} = \frac{\bar{f}_z l}{2}, \quad R_{p6} = \frac{1}{12} \bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T,$$

kde

$$\bar{N}_T = EA\alpha T, \quad \bar{M}_T = EI_y \alpha \frac{T_d - T_h}{h}. \quad (2.65)$$

Vektor transformovaného zatížení  $R_p$  obsahuje zobecnělé koncové síly, kterými prut působí na podpory. Záporně vzaté hodnoty ( $-R_p$ ) naopak vyjadřují koncové síly na dokonale vetknutém nosníku. Z tohoto pohledu je vhodné porovnat 4., 3. a 6. prvek vektoru ( $-R_p$ ) s prvky vektoru  $\beta_p$  vypočtenými ze vorce (2.54).

### 2.2.2 Deformační (posunová) varianta řešení

Podobně jako jsme v odst. 2.2.1 vyšli z Castiglianova variačního principu, v případě deformační varianty obrátíme pozornost k principu Lagrangeovu. Fyzikálními vztahům (2.8)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & kGA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d u_s}{d x} \\ \frac{d \varphi_y}{d x} \\ \varphi_y + \frac{d w}{d x} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha \frac{T_d - T_h}{h} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

odpovídá podle odst. 1.6.4. formální přepis

$$\sigma = \mathbf{D}(\epsilon - \bar{\epsilon}_0), \quad (2.66)$$

kde  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$  je matice tuhosti průřezu prvku.

Potenciální energie systému je podle (1.153) součtem potenciální energie vnitřních sil

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\epsilon - \bar{\epsilon}_0)^T \mathbf{D} (\epsilon - \bar{\epsilon}_0) l d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \left( \frac{d u_s}{d x} - \alpha T \right)^2 EA + \left( \frac{d \varphi_y}{d x} - \alpha \frac{T_d - T_h}{h} \right)^2 EI_y \right. \\ &\quad \left. + \left( \varphi_y + \frac{d w}{d x} \right)^2 kGA \right] l d\xi \end{aligned} \quad (2.67)$$

a potenciální energie vnějších sil

$$E_e = - \int_0^1 [u_s \bar{f}_x + w \bar{f}_z] l d\xi - \mathbf{r}^T \mathbf{R}. \quad (2.68)$$

Všimněme si, že do potenciální energie vnějších sil patří i energie koncových sil (2.59), jimiž odňatá část působí na vyjmutý prvek.

Výpočet podáme za stejných předpokladů jako v odst. 2.2.1, tj. zatížení  $\bar{f}_x$ ,  $\bar{f}_z$  a změna teploty střednice prvku  $T = \frac{1}{2}(T_d + T_h)$  jsou po délce prvku konstantní, po výšce průřezu má změna teploty lineární průběh.

V Ritzově metodě vyjdeme z aproximace funkcí  $u_s$ ,  $\varphi_y$ ,  $w$ , které musí zajišťovat spojitost deformací v konstrukci. Protože kompatibilní model à

priori nevyžaduje splnění rovnováhových podmínek (2.14), můžeme vyjít z přetvoření nezátíženého nosníku, které je způsobeno jen přemístěním a pootočením koncových průřezů, tedy složkami vektoru (2.58).

Výchozím krokem je aproximace osových posunů

$$u_s = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 \quad (2.69)$$

a průhybů

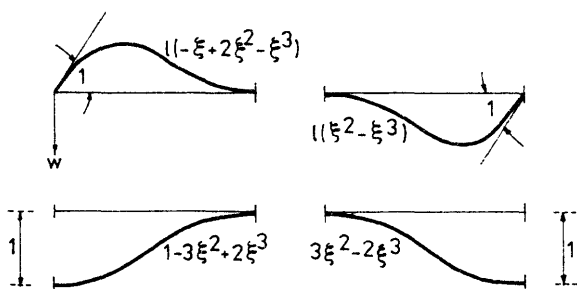
$$\begin{aligned} w = & [1 - \xi^2(3 - 2\xi)]w_1 - \xi(1 - \xi)^2 l \vartheta_1 \\ & + \xi^2(3 - 2\xi)w_2 + \xi^2(1 - \xi) l \vartheta_2, \end{aligned} \quad (2.70)$$

kteří jsou za přijatých předpokladů přesným řešením úlohy.

Geometrické znázornění kubických bázových funkcí u jednotlivých parametrů  $w_1$ ,  $\vartheta_1$ ,  $w_2$ ,  $\vartheta_2$  je patrné z obr. 2.9. Parametry  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  představují pootočení tečny k ose prutu v krajních průřezech a jejich kladný smysl je shodný s kladným smyslem rotace průřezů  $\varphi_{1y}$ ,  $\varphi_{2y}$ . Z toho vyplývá, že

$$\vartheta_1 = - \left( \frac{dw}{dx} \right)_{\xi=0}, \quad \vartheta_2 = - \left( \frac{dw}{dx} \right)_{\xi=1}.$$

Zbývá nalézt aproximaci funkce  $\varphi_y$ . Víme, že při nulovém zatížení  $\bar{f}_z$  je



Obr. 2.9: Kubické bázové funkce

podle druhého vzorce (2.14) posouvající síla podél prvku konstantní. Vzhledem k třetímu vzorci (2.8) musí proto platit

$$\varphi_y + \frac{dw}{dx} = \gamma = \text{konst.} \quad (2.71)$$



Parametr  $\gamma$  vyloučíme z požadavku, aby aproximace  $w$  a  $\varphi_y$  splnily momentovou podmínku rovnováhy (2.14):

$$EI_y \frac{d^2 \varphi_y}{d x^2} = kGA\gamma. \quad (2.72)$$

Spojením vztahů (2.71) a (2.72) vyjde

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{EI_y}{kGA} \frac{d^3 w}{d x^3} = -\frac{EI_y}{kGA l^3} \frac{d^3 w}{d \xi^3} \\ &= 2\kappa \left[ \frac{w_2 - w_1}{l} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Součinitel  $\kappa$  je stejný jako ve vzorci (2.52).

Známe-li  $\gamma$ , můžeme pomocí (2.71) vyjádřit úhly  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$ . Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} l\vartheta_1 &= \varphi_{1y}l - \gamma l = \varphi_{1y}l + 2\kappa(w_1 - w_2) - \kappa(\vartheta_1l + \vartheta_2l) \\ l\vartheta_2 &= \varphi_{2y}l - \gamma l = \varphi_{2y}l + 2\kappa(w_1 - w_2) - \kappa(\vartheta_1l + \vartheta_2l) \end{aligned}$$

vypočteme

$$\begin{aligned} l\vartheta_1 &= \frac{1}{1+2\kappa} [2\kappa w_1 + (1+\kappa)\varphi_{1y}l - 2\kappa w_2 - \kappa\varphi_{2y}l] \\ l\vartheta_2 &= \frac{1}{1+2\kappa} [2\kappa w_1 - \kappa\varphi_{1y}l - 2\kappa w_2 + (1+\kappa)\varphi_{2y}l]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Konečně podle (2.71) je v obecném průřezu

$$\varphi_y = \gamma - \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{l} \left[ \frac{dw}{d\xi} + \frac{\kappa}{6} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right]. \quad (2.75)$$

Uplatníme-li výrazy (2.74) ve vztazích (2.70) a (2.75), obdržíme finální vzorce pro aproximace

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{1+2\kappa} \left\{ [(1+2\kappa) - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3] w_1 \right. \\ &\quad + l[-(1+\kappa)\xi + (2+\kappa)\xi^2 - \xi^3] \varphi_{1y} \\ &\quad \left. + [2\kappa\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3] w_2 + l[\kappa\xi + (1-\kappa)\xi^2 - \xi^3] \varphi_{2y} \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \frac{1}{1+2\kappa} \left\{ [6\xi - 6\xi^2] \frac{w_1}{l} + [(1+2\kappa) - 2(2+\kappa)\xi + 3\xi^2] \varphi_{1y} \right. \\ &\quad \left. + [-6\xi + 6\xi^2] \frac{w_2}{l} + [-2(1-\kappa)\xi + 3\xi^2] \varphi_{2y} \right\}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Snadno se můžeme přesvědčit o správnosti těchto vztahů. Totiž při  $\kappa = 0$  musíme obdržet z (2.76) výraz (2.70). Na první pohled je patrné, že tomu tak skutečně je. Pootočení průřezu  $\varphi_y$  se pro  $\gamma = 0$  musí rovnat pootočení tečny k ose prutu, pro kterou platí

$$\vartheta = \varphi_y = -\frac{dw}{dx} = (6\xi - 6\xi^2)\frac{w_1}{l} + (1 - 4\xi + 3\xi^2)\varphi_{1y} + (-6\xi + 6\xi^2)\frac{w_2}{l} + (-2\xi + 3\xi^2)\varphi_{2y}. \quad (2.78)$$

Je třeba poznamenat, že kontrola není zcela úplná, vzhledem k tomu, že jsme neověřili správnost koeficientů u těch členů, kde se vyskytuje  $\gamma$ .

Odvozené vztahy zapíšeme nyní v kompaktním maticovém tvaru. Uzlové posuny sestavíme do vektoru  $\mathbf{r}$  podle vzorce (2.58). Aproximace hledaných funkcí  $\mathbf{u} = \{u_s, \varphi_y, w\}^T$  vyjádříme prostřednictvím matice bázových funkcí  $\mathbf{N}$  podle (1.190), kde položíme  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{O}$ . Platí

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \\ 0 & h_7 & h_8 & 0 & h_9 & h_{10} \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

kde  $h_i$  jsou interpolační funkce, příslušné jednotlivým uzlovým parametrům. Spolu se svými prvními derivacemi jsou sestaveny do tabulky 2.1. Zbývá aproximovat pole deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \frac{du_s}{dx}, \frac{d\varphi_y}{dx}, \left( \varphi_y + \frac{dw}{dx} \right) \right\}^T \quad (2.80)$$

podle (1.191). Snadno ověříme, že matice  $\mathbf{B}$  má tvar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dh_3}{dx} & \frac{dh_4}{dx} & 0 & \frac{dh_5}{dx} & \frac{dh_6}{dx} \\ 0 & h_3 + \frac{dh_7}{dx} & h_4 + \frac{dh_8}{dx} & 0 & h_5 + \frac{dh_9}{dx} & h_6 + \frac{dh_{10}}{dx} \end{bmatrix}.$$

Konečně potřebujeme podklady pro výpočet transformovaného zatížení v rovnici (1.197). V důsledku předpokladu  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{O}$  bude i  $\mathbf{R}_u = \mathbf{O}$ . Dále vzhledem k tomu, že zatížení působí pouze v rovině  $(x, y)$  a vlastní tíha může být zahrnuta do složky  $\bar{f}_z$ , je

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{O} \quad \text{a} \quad \bar{\mathbf{p}} = \{ \bar{f}_x, 0, \bar{f}_z \}^T. \quad (2.81)$$

P

i	$h_i$	$\frac{d h_i}{d x}$
1	$1 - \xi$	$-\frac{1}{l}$
2	$\xi$	$\frac{1}{l}$
3	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [6\xi - 6\xi^2]$	$\frac{1}{l^2(1+2\kappa)} [6 - 12\xi]$
4	$\frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2(2+\kappa)\xi + 3\xi^2]$	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [-2(2+\kappa) + 6\xi]$
5	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [-6\xi + 6\xi^2]$	$\frac{1}{l^2(1+2\kappa)} [-6 + 12\xi]$
6	$\frac{1}{1+2\kappa} [-2(1-\kappa)\xi + 3\xi^2]$	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [-2(1-\kappa) + 6\xi]$
7	$\frac{1}{1+2\kappa} [(1+2\kappa) - 2\kappa\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3]$	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [-2\kappa - 6\xi + 6\xi^2]$
8	$\frac{l}{1+2\kappa} [-(1+\kappa)\xi + (2+\kappa)\xi^2 - \xi^3]$	$\frac{1}{1+2\kappa} [-(1+\kappa) + 2(2+\kappa)\xi - 3\xi^2]$
9	$\frac{1}{1+2\kappa} [2\kappa\xi + 3\xi^2 - 2\xi^3]$	$\frac{1}{l(1+2\kappa)} [2\kappa + 6\xi - 6\xi^2]$
10	$\frac{l}{1+2\kappa} [\kappa\xi + (1-\kappa)\xi^2 - \xi^3]$	$\frac{1}{1+2\kappa} [\kappa + 2(1-\kappa)\xi - 3\xi^2]$

Tabulka 2.1: Tabulka interpolačních funkcí a jejich derivací

Střední člen odpovídá spojitému momentovému zatížení, které je podle přijatých předpokladů nulové. Účinky ohrání jsou zahrnuty prostřednictvím síly  $\bar{N}_T$  a momentu  $\bar{M}_T$ , které jsou určeny vzorcí (2.65). V maticovém zápisu tomu odpovídá součin  $\mathbf{D}\bar{\epsilon}_0$ , pro který platí

$$\mathbf{D}\bar{\epsilon}_0 = \{ \bar{N}_T, \bar{M}_T, 0 \}^T. \quad (2.82)$$

Tím je vše připraveno k výpočtu matice tuhosti  $\mathbf{K}$  a vektoru transformovaného zatížení  $\mathbf{R}_p$ . Výpočet lze v zásadě provést dvěma způsoby:

- numericky
- analyticky.

Numerický výpočet představuje aplikaci vhodné integrační formule na vyčíslení integrálů v (1.197). Tento postup je zcela univerzální, neboť bychom mohli uvažovat prvek s proměnným průřezem nebo složitějším průběhem zatížení po prvku. V případě prizmatického prutového prvku, kterým se právě zabýváme, použijeme analytickou integraci. Takový postup nejen elegantnější, ale i rychlejší při vlastní realizaci na počítači. Kromě toho uvážíme, že získané vztahy jsou pouze modifikací vztahů známých z klasického řešení prutových konstrukcí deformační metodou.

Nejprve vypočteme vektor transformovaného zatížení od rovnoměrného zatížení  $\mathbf{p}$  a oteplení. Výpočet je jednoduchý, vyžaduje pouze roznásobení matic v integrandu a integraci každého prvku výsledné matice (vektoru) zvlášť. Uvedeme pouze výsledek

$$\mathbf{R}_p = \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D}\bar{\epsilon}_0 l d\xi + \int_0^1 \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} l d\xi, \quad (2.83)$$

který je shodný se vztahem (2.64), kde jsme k vektoru transformovaného zatížení došli přes rovnovážný model.

Dříve, než přistoupíme k výpočtu matice tuhosti, všimněme si, že prvky ve třetím řádku matice  $\mathbf{B}$  představují hodnotu smykové deformace  $\gamma$ , která přísluší jednotlivým prvkům vektoru uzlových posunů. Vzhledem k tomu, že tato hodnota je ale explicitně dána vzorcem (2.73), můžeme porovnáním získat vztahy

$$\begin{aligned} h_3 + \frac{dh_7}{dx} &= \frac{-2\kappa}{l(1+2\kappa)}, & h_5 + \frac{dh_9}{dx} &= \frac{2\kappa}{l(1+2\kappa)}, \\ h_4 + \frac{dh_8}{dx} &= \frac{\kappa}{l(1+2\kappa)}, & h_6 + \frac{dh_{10}}{dx} &= \frac{\kappa}{l(1+2\kappa)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Této okolnosti jsme si dříve nemuseli všimnout, neboť vzhledem k obsazení vektoru (2.82) byly tyto členy násobeny při výpočtu vektoru  $\mathbf{R}_p$  nulovými hodnotami. Výpočet podle vzorce

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} l d\xi \quad (2.85)$$

vede k výsledku, který je uveden ve vzorci (2.63) a k němuž jsme před tím došli jinou cestou.

Na závěr prověříme, zda aproximace funkcí  $u_s$ ,  $\varphi_y$ ,  $w$  splňuje základní kritéria z čl. 1.7, totiž schopnost popsat přemístění prvku jako tuhého celku a vyjádřit konstantní deformaci (křivost).

1. Přemístění prvku jako tuhého celku lze zadat třemi parametry  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_0$  tak, že jim bude příslušet vektor (2.58) ve tvaru

$$\mathbf{r}_0 = \{ u_0, w_0, \varphi_0, u_0, w_0 - \varphi_0 l, \varphi_0 \}^T. \quad (2.86)$$

Dosazením příslušných parametrů přemístění do vztahů (2.69), (2.77) a (2.76) snadno zjistíme, že požadované podmínky jsou splněny, neboť vychází

$$u_s(\xi) = u_0, \quad \varphi_y(\xi) = \varphi_0, \quad w(\xi) = w_0 - \xi l \varphi_0. \quad (2.87)$$

2. Přijatá aproximace zřejmě připouští pouze konstantní deformaci  $\varepsilon_x = (u_2 - u_1)/l$ . Konstantní zkosení  $\gamma$  bylo předpokládáno vztahem (2.71) à priori. Přesvědčíme se ještě, že stavu

$$\mathbf{r}_0 = \{ 0, 0, \varphi_0, 0, 0, -\varphi_0 \} \quad (2.88)$$

přísluší konstantní změna křivosti  $d\varphi_y/(ld\xi) = -2/l$ . Výpočet založený na vztahu (2.77) ponecháme čtenáři.

Získaný pozitivní výsledek by nás neměl překvapit, neboť předchozí řešení bylo založeno na přesném vyjádření funkcí  $u_s$ ,  $\varphi_y$ ,  $w$  pro prut zatížený pouze v koncových průřezech.

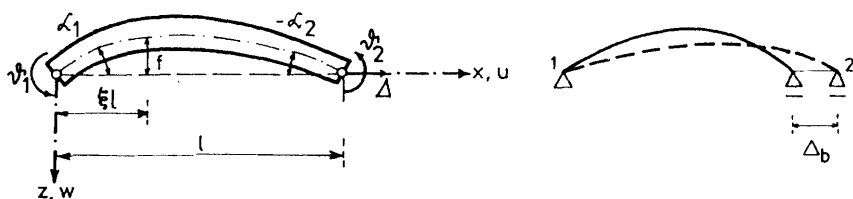
## 2.3 Zakřivený prutový prvek

Zatímco u přímých prutů je splnění kritérií pro přemístění prvku jako tuhého celku a pro konstantní deformaci (křivost) poměrně snadné, u zakřivených prutů (a zejména u zakřivených plošných prvků) jsou uvedené požadavky obtížným problémem. Představme si, že zakřivenému prvku předepíšeme

pouze změnu křivosti, tedy čistě ohybový účinek. Aproximace pole posunutí musí být taková, aby v tomto stavu nevedla ke vzniku osových (obecně membránových) sil a naopak.

Popíšeme jednoduché řešení, které zakládá konstrukci osových (membránových) a ohybových tvarů přetvoření na tzv. *principu dekompozice* [66]. Uvedený princip s výhodou uplatníme v čl. 3.4 při konstrukci skořepinového prvku.

Sledujme plochý prvek na obr. 2.10, který je umístěn v lokální soustavě souřadnic. Podobně jako v odst. 2.2.1 (obr. 2.8) zavedeme tři parametry ryzi deformace  $\hat{r} = \{\Delta, \vartheta_1, \vartheta_2\}^T$ , z nichž první představuje změnu vzdálenosti průřezů 1, 2 ve směru osy  $x$  a druhé dva pootočení koncových průřezů s vyloučením přemístění prvku jako tuhého celku.



Obr. 2.10: Zakřivený prutový prvek

Dekompozice spočívá ve vyjádření změny vzdálenosti koncových průřezů  $\Delta$  součtem dvou členů

$$\begin{aligned} \Delta &= u_2 - u_1 \\ &= \Delta_m + \Delta_b, \end{aligned} \quad (2.89)$$

kde  $\Delta_m$  je změna vzdálenosti způsobená protažením střednice (účinek osových sil),

$\Delta_b$  je změna vzdálenosti způsobená změnou křivosti (účinek ohybových momentů).

Druhý člen vypočteme snadno pomocí principu virtuálních sil. Za přijatého předpokladu, že oblouk je dostatečně plochý, vyjdeme z práce momentu jednotkové síly  $\bar{M} = \bar{l}f$  na změně křivosti ( $-d^2w/dx^2$ ):

$$\bar{l} \cdot \Delta_b = - \int_0^1 f(\xi) \frac{1}{l^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} l d\xi = - \frac{1}{l} \left[ f \frac{dw}{d\xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} + \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{df}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi. \quad (2.90)$$

Funkce  $f$  a  $w$  budeme aproximovat kubickými polynomy

$$\begin{aligned} w(\xi) &= -\xi(1-\xi)^2 l \vartheta_1 + \xi^2(1-\xi) l \vartheta_2, \\ f(\xi) &= \xi(1-\xi)^2 l \alpha_1 - \xi^2(1-\xi) l \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Spojením (2.90) a (2.91) najdeme

$$\Delta_b = \frac{1}{l} \int_0^1 \frac{df}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi = -c_1 l \vartheta_1 - c_2 l \vartheta_2, \quad (2.92)$$

kde

$$c_1 = \frac{2}{15} \alpha_1 - \frac{1}{30} \alpha_2, \quad c_2 = \frac{2}{15} \alpha_2 - \frac{1}{30} \alpha_1.$$

Rovnici (2.89) nyní uvedeme pomocí (2.92) na tvar

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \Delta - \Delta_b \\ &= \Delta - \left\{ -c_1 l, -c_2 l \right\} \left\{ \begin{matrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{matrix} \right\} = \Delta - \hat{T} \vartheta. \end{aligned} \quad (2.93)$$

K odvození matice tuhosti zakřiveného prutového prvku použijeme postup, který v čl. 3.7 zobecníme při odvození matice tuhosti skořepinového prvku. Vyjdeme ze zúžené matice tuhosti přímého prutového prvku (2.55). Nejprve ji přepíšeme do tvaru

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \hat{K}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.94)$$

Skalární člen  $\hat{K}_1 = EA/l$  vyjadřuje osovou tuhost prvku, matice  $\hat{K}_2$  je typu (2, 2) a vyjadřuje jeho ohybové vlastnosti. Protože je v ní respektován i vliv posouvajících sil na přetvoření prvku, měli bychom pro tento případ ( $\kappa \neq 0$ ) modifikovat vzorec (2.92) pro výpočet upravených konstant  $c_1^*$ ,  $c_2^*$ . Podrobnosti postupu, při němž je třeba využít aproximací z odst. 2.2.2, ponecháme čtenáři.

Zúženou matici tuhosti zakřiveného prvku  $\hat{K}_f$  (index  $f$  upozorňuje na přítomnost vzepětí) obdržíme porovnáním dvou výrazů pro potenciální energii deformace. Jednak platí

$$2E_i = \hat{r}^T \hat{K}_f \hat{r}, \quad (2.95)$$

kde

$$\hat{r} = \{\Delta, \vartheta_1, \vartheta_2\}^T = \{\Delta, \vartheta^T\}^T, \quad (2.96)$$

jednak můžeme psát

$$\begin{aligned}
 2E_i &= \Delta_m \hat{K}_1 \Delta_m + \vartheta^T \hat{K}_2 \vartheta \\
 &= \left( \Delta - \vartheta^T \hat{T}^T \right) \hat{K}_1 \left( \Delta - \hat{T} \vartheta \right) + \vartheta^T \hat{K}_2 \vartheta \\
 &= \Delta \hat{K}_1 \Delta - \vartheta^T \hat{T}^T \hat{K}_1 \Delta - \Delta \hat{K}_1 \hat{T} \vartheta + \vartheta^T \left( \hat{T}^T \hat{K}_1 \hat{T} + \hat{K}_2 \right) \vartheta.
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Porovnáním obou výrazů vysvitne, že

$$\begin{aligned}
 \hat{K}_f &= \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & -\hat{K}_1 \hat{T} \\ -\hat{T}^T \hat{K}_1 & \left( \hat{T}^T \hat{K}_1 \hat{T} + \hat{K}_2 \right) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & EA c_1^* & EA c_2^* \\ EA c_1^* & \frac{2EI_y(2+\kappa)}{l(1+2\kappa)} + EA l c_1^* & \frac{2EI_y(1-\kappa)}{l(1+2\kappa)} + EA l c_1^* c_2^* \\ EA c_2^* & \frac{2EI_y(1-\kappa)}{l(1+2\kappa)} + EA l c_1^* c_2^* & \frac{2EI_y(2+\kappa)}{l(1+2\kappa)} + EA l c_2^* \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Rozšířenou matici tuhosti ohybaného prvku typu (6, 6), zahrnující stupně volnosti, které popisují přemístění prvku jako tuhého tělesa, vypočteme v souladu se vzorcem (2.63) transformací

$$K_f = T^T \hat{K}_f T. \tag{2.99}$$

## 2.4 Prvek pro řešení roštových konstrukcí

### 2.4.1 Analogie mezi taženým-tlačeným prvkem a krouceným prvkem

Prvky trámového roštu jsou v přijaté lokální soustavě souřadnic namáhány ohybovými momenty  $M_y$ , posouvajícími silami  $Q_z$  a krouticími momenty  $M_x$ . Nevznikají osové síly. Všimněme si podobnosti fyzikálního vztahu (2.8) pro normálovou sílu  $N_x$  a fyzikálního vztahu (2.16) pro krouticí moment  $M_x$ . Z ní plyne analogie mezi oběma veličinami, které využijeme k sestavení matice tuhosti a vektoru transformovaného zatížení pro roštový prvek.



Nechť  $\varphi_{1x}$  a  $\varphi_{2x}$  jsou pootočení koncových průřezů kolem osy  $x$ . Uspořádáme-li vektor zobecněných uzlových posunů podle schématu

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}^T \\ &= \{\varphi_{1x}, w_1, \varphi_{1y}, \varphi_{2x}, w_2, \varphi_{2y}\}^T \end{aligned} \quad (2.100)$$

a ve vektoru koncových sil  $\mathbf{R}$  přisoudíme prvkům  $R_1$  a  $R_4$  význam krouticích momentů v koncových průřezech, vyplyne porovnáním výše uvedených fyzikálních vztahů, dále vektorů (2.58) a (2.100) a konečně vektoru (2.59), jehož prvky jsou znázorněny v obr. 2.8, s nově definovaným silovým vektorem  $\mathbf{R}$ , že matice tuhosti vznikne následující úpravou vzorce (2.63)

$$\mathbf{K} = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & 0 \\ & & (2+\kappa) & 0 & \frac{3}{l} & (1-\kappa) \\ & & & \beta & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \\ & & & & & (2+\kappa) \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

$$\text{kde } \beta = \frac{GI_k(1+2\kappa)}{2EI_y}.$$

Bude-li prvek po délce přenášet konstantní momentové zatížení  $\bar{m}_x$ , obdržíme vektor transformovaného zatížení z analogie s vektorem (2.64)

$$\mathbf{R}_p = \left\{ \frac{\bar{m}_x l}{2}, \frac{\bar{f}_z l}{2}, -\left(\frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T\right), \frac{\bar{m}_x l}{2}, \frac{\bar{f}_z l}{2}, \frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \bar{M}_T \right\}^T.$$

Kombinací matic tuhosti a vektorů transformovaného zatížení pro rámový a roštový prvek již snadno odvodíme příslušné vztahy pro obecný prostorový prvek.

## 2.4.2 Roštový prvek na pružném Winklerově-Pasternakově podloží

Matice tuhosti roštového prvku na pružném podloží je součtem matice tuhosti  $\mathbf{K}_1$  ohýbaného a krouceného prvku tvořícího část základového pásu, která je určena vzorcem (2.101), a matice tuhosti  $\mathbf{K}_2$  pružného podkladu.

Fyzikální vlastnosti pružného podkladu jsme popsali v odst. 2.1.2. Připomínáme, že ve Winklerově-Pasternakově modelu se do spolupráce zapojuje i zemina mimo základ. Tento fakt můžeme ignorovat, zavedeme-li ekvivalentní tuhosti pro ohyb podle vzorců (2.38) a pro kroucení podle vzorců (2.40), které nám umožňují pracovat pouze s kontaktní plochou základového prvku.

Výpočet přídatné matice tuhosti  $\mathbf{K}$  založíme na výrazu (2.25) pro virtuální práci vnitřních sil při ohybu, který rozšíříme o analogický výraz pro virtuální práci vnitřních sil při kroucení. Po zavedení ekvivalentních tuhostních konstant (jsou označeny hvězdičkou) a uvážení, že se základ deformuje v rovině  $xz$ , nabude výchozí rovnice tvaru

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{r} = \quad (2.102)$$

$$= 2b \int_0^l \left[ \delta w C_1^* w + \frac{d}{dx} (\delta w) C_2^* \frac{dw}{dx} + \delta \varphi_x C_3^* \varphi_x + \frac{d}{dx} (\delta \varphi_x) C_4^* \frac{d\varphi_x}{dx} \right] dx.$$

Pro průhyb a pootočení přijmeme známé aproximace z odst. 2.2.2

$$\begin{aligned} \varphi_x(\xi) &= \mathbf{N}_1(\xi) \mathbf{r}_1 \\ w(\xi) &= \mathbf{N}_2(\xi) \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (2.103)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \{ \varphi_{1x}, \varphi_{2x} \}^T, & \mathbf{N}_1 &= \{ h_1, h_2 \}^T, \\ \mathbf{r}_2 &= \{ w_1, \varphi_{1y}, w_2, \varphi_{2y} \}^T, & \mathbf{N}_2 &= \{ h_7, h_8, h_9, h_{10} \}^T. \end{aligned}$$

Interpoláční funkce jsou uvedeny v tab. 2.1. Po dosazení aproximací (2.103) do (2.102) bude

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_1^T \mathbf{K}_{21} \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{r}_2, \quad (2.104)$$

kde

$$\mathbf{K}_{21} = 2bl \int_0^1 \left[ C_3^* \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \frac{C_4^*}{l^2} \frac{d\mathbf{N}_1^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}_1}{d\xi} \right] d\xi, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{K}_{22} = 2bl \int_0^1 \left[ C_1^* \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \frac{C_2^*}{l^2} \frac{d\mathbf{N}_2^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}_2}{d\xi} \right] d\xi. \quad (2.106)$$

Přijmeme-li uspořádání vektoru zobecněných koncových posunů ve tvaru

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{matrix} \right\} = \{ \varphi_{1x}, \varphi_{2x} \mid w_1, \varphi_{1y}, w_2, \varphi_{2y} \}^T, \quad (2.107)$$

obdržíme matici tuhosti podloží ve tvaru

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Abychom ji uvedli do souladu s maticí tuhosti základového pásu (2.101), museli bychom její prvky odpovídajícím způsobem přeskupit. Podrobnosti integrace podle vzorců (2.105) a (2.106) nebudeme uvádět. Použijeme-li přímou integraci, dojdeme k následujícím výsledkům:

$$\mathbf{K}_{21} = \frac{bl}{3} C_3^* \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{bmatrix} + \frac{2b}{l} C_4^* \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

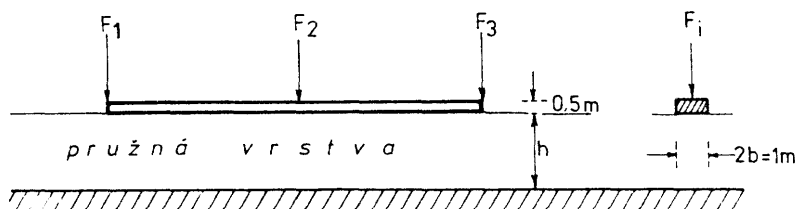
$$\mathbf{K}_{22} = \frac{2blC_1^*}{(1+2\kappa)^2} \mathbf{K}_a + \frac{1}{l} \frac{2bC_2^*}{(1+2\kappa)^2} \mathbf{K}_b. \quad (2.110)$$

Pro prvky pomocných matic  $\mathbf{K}_a$ ,  $\mathbf{K}_b$  platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} k_{a11} &= \frac{4\kappa^2}{3} + \frac{7\kappa}{5} + \frac{13}{35}, & k_{b11} &= 4\kappa^2 + 4\kappa + \frac{6}{5}, \\ k_{a12} &= -l \left( \frac{\kappa^2}{6} + \frac{11\kappa}{60} + \frac{11}{210} \right), & k_{b12} &= -\frac{l}{10}, \\ k_{a13} &= \frac{2\kappa^2}{3} + \frac{3\kappa}{5} + \frac{9}{70}, & k_{b13} &= -\left( 4\kappa^2 + 4\kappa + \frac{6}{5} \right), \\ k_{a14} &= l \left( \frac{\kappa^2}{6} + \frac{3\kappa}{20} + \frac{13}{420} \right), & k_{b14} &= \frac{l}{10}, \\ k_{a22} &= l^2 \left( \frac{\kappa^2}{30} + \frac{\kappa}{30} + \frac{1}{105} \right), & k_{b22} &= l^2 \left( \frac{\kappa^2}{3} + \frac{\kappa}{3} + \frac{2}{15} \right), \\ k_{a23} &= -l \left( \frac{\kappa^2}{6} + \frac{3\kappa}{20} + \frac{13}{420} \right), & k_{b23} &= \frac{l}{10}, \\ k_{a24} &= -l^2 \left( \frac{\kappa^2}{30} + \frac{\kappa}{30} + \frac{1}{140} \right), & k_{b24} &= -l^2 \left( \frac{\kappa^2}{3} + \frac{\kappa}{3} + \frac{1}{30} \right), \\ k_{a33} &= \frac{4\kappa^2}{3} + \frac{7\kappa}{5} + \frac{13}{35}, & k_{b33} &= 4\kappa^2 + 4\kappa + \frac{6}{5}, \\ k_{a34} &= l \left( \frac{\kappa^2}{6} + \frac{11\kappa}{60} + \frac{11}{210} \right), & k_{b34} &= \frac{l}{10}, \end{aligned}$$

$$k_{a44} = l^2 \left( \frac{\kappa^2}{30} + \frac{\kappa}{30} + \frac{1}{105} \right), \quad k_{b44} = l^2 \left( \frac{\kappa^2}{3} + \frac{\kappa}{3} + \frac{2}{15} \right).$$

## Příklad 2.1

Obr. 2.11: Nosník na  $W - P$  podkladě

Účinnost smykové tuhosti podloží, která je zachycena v dvouparametrickém modelu, jakož i vlastnosti popsáno roštového prvku spočívajícího na tomto podloží ukážeme na příkladě základového pásu na obr. 2.11. Pás délky  $l = 12$  m, šířky  $2b = 1$  m a výšky  $d = 0,5$  m je zatížen třemi silami  $F_1 = 1$  MN,  $F_2 = 1.5$  MN,  $F_3 = 0.25$  MN. Materiálové charakteristiky pásu :  $E = 30$  MPa,  $G = 10$  MPa. Materiálové charakteristiky podloží jsou uvažovány v pěti variantách podle tabulky 2.2

varianta	a	b	c	d	e
$C_1$ ( $\text{MNm}^{-3}$ )	10	10	50	100	100
$C_2$ ( $\text{MNm}^{-1}$ )	1	5	25	10	50

Tabulka 2.2: Varianty materiálových charakteristik podloží

## Řešení:

Varianty  $a, b$  odpovídají založení na velmi poddajném podloží (soudržné zeminy), varianty  $d, e$  charakterizují tuhé podloží. Poměr tuhosti  $C_2/C_1 = 1/10$  (relativně malá smyková tuhost podloží) odpovídá podle grafu na obr. 2.4 zhruba poměru poloviční šířky základu k tloušťce stlačitelné vrstvy  $b/h \approx 0.3$ . Poměru tuhosti  $C_2/C_1 = 0.5$  přísluší  $b/h \approx 0.1$ . Z grafu si můžeme snadno odečíst přibližné hodnoty modulů pružnosti (deformace) podloží, jak je uvádí tabulka 2.3.

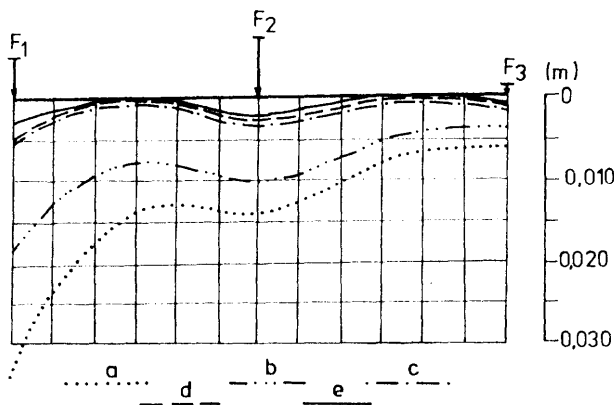
varianta	a	b	c	d	e
$E$ (MPa)	8	20	125	100	250

Tabulka 2.3: Moduly pružnosti (deformace) podloží

Body odpovídající variantě  $b$  jsou v grafu na obr. 2.4 vyznačeny hvězdičkami.

Za zmínku stojí porovnání variant  $c$  a  $d$ . Vyšší hodnota modulu pružnosti podloží ve variantě  $c$  má za následek především podstatný nárůst smykové tuhosti (konstanta  $C_2$ ), zatímco tuhost  $C_1$  oproti variantě  $d$  vychází dokonce nižší. I když z grafu lze získat jen hrubé odhady tuhostí  $C_1, C_2$  k poměru  $b/h$ , lze tušit, že především smyková tuhost podloží  $C_2$  ovlivní zásadním způsobem přetvoření i napjatost základového pásu.

Pro výpočet MKP byl pás rozdělen na 24 prvků s kubickou aproximací průhybu. Je respektován vliv posouvajících sil na přetvoření pásu. Výsledky jsou znázorněny v následujících obrázcích.

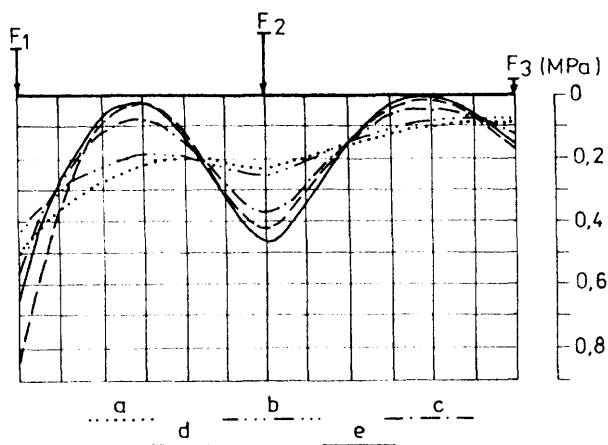


Obr. 2.12: Ohybové deformace pásu

Na obr. 2.12 jsou vykresleny ohybové deformace pásu v jednotlivých variantách. Obr. 2.13 znázorňuje průběhy kontaktních napětí. Je vidět, že tužší podloží způsobuje koncentraci napětí pod působícími silami, zatímco pole mezi těmito silami jsou odlehčována.

Z průběhů posouvajících sil v obr. 2.14 je patrný vliv smykové tuhosti podloží  $C_2$ . Ve variantě  $a$  je smyková tuhost  $C_2$  poměrně malá a hodnoty posouvajících sil v koncových průřezech jsou blízké hodnotám působících sil  $F_1 = 1 \text{ MN}$  a  $F_3 = 0,25 \text{ MN}$ . V dalších variantách je již vliv smykové tuhosti podloží větší a diference mezi působící silou a posouvající silou v pásu jde na vrub *smykové síly v podloží*, jež působí na koncové průřezy pásu *proti směru* vnějších zatěžovacích sil.

Z hlediska dimenzování základového pásu je nejužitečnější obr. 2.15, v němž jsou vykresleny průběhy ohybových momentů. Odlehčení pásu v poli mezi silami má podstatně větší vliv na snížení ohybových momentů v poli než na redukci



Obr. 2.13: Kontaktní napětí

momentů pod silou  $F_2$ .

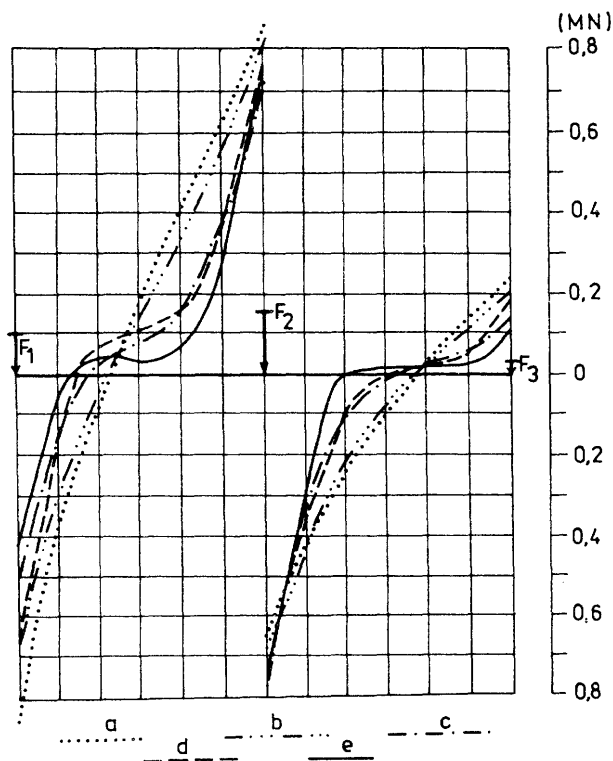
## 2.5 Statická kondenzace

V souvislosti s řešením prutových konstrukcí probereme obecně postup, který se označuje jako statická kondenzace a jehož smysl a podstatu nejlépe pochopíme na příkladě.

Mějme rámovou konstrukci na obr. 2.16. Jedná se o typický příklad ocelové konstrukce. Typický v tom smyslu, že má řadu kloubových styčníků. Důležitý nosník však probíhá přes všechny podpory spojitě. Rovněž hlavní sloupy jsou konstruovány tak, že nemají žádný vnitřní kloub. Prodiskutujme uspořádání prutů v detailu B. Styčnick, který je označen  $i$  má 3 stupně volnosti -  $u_i, w_i, \varphi_{iy} = \varphi_i$  (index  $y$  v dalším textu vynecháváme). V tomto styčniku se stýkají čtyři pruty, které jsou označeny malými písmeny  $a, b, c, d$  (obr. 2.17).

Deformace prutů  $b, c$  je popsána jednoznačně. U prutů  $a, d$  jsou jednoznačně popsány vodorovný a svislý posun. Pootočení koncových průřezů prutů  $a, d$ , které se stýkají ve styčniku  $i$ , jsou však různá od  $\varphi_i$ .

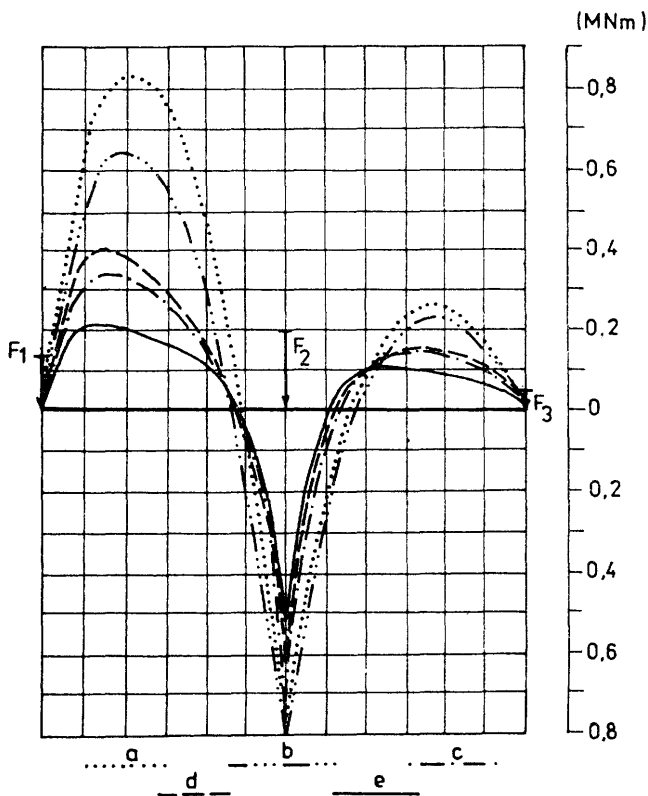
Tento problém můžeme vyřešit dvojím způsobem. Jednak můžeme zmnožit neznámá pootočení ve styčniku  $i$  tím způsobem, že v tomto styčniku budou 3 nezávislá pootočení -  $\varphi_i, \varphi_{ia}, \varphi_{id}$ , ( $\varphi_{ia}$  je pootočení pravého



Obr. 2.14: Posouvající síly v pásu

průřezu prutu  $a$ ,  $\varphi_{id}$  je pootočení levého průřezu prutu  $d$ ). Každému z těchto parametrů přísluší nezávislá podmínka rovnováhy. Podmínky rovnováhy příslušné parametrům  $\varphi_{ia}$ ,  $\varphi_{id}$  požadují, aby momenty na koncích prutů  $a$ ,  $d$ , které se stýkají v bodě  $i$ , byly rovné nule. Okamžitě se tudíž nabízí otázka - proč máme tyto jednoduché podmínky vkládat do globálních podmínek rovnováhy celé konstrukce, když se týkají jenom jednotlivých prutů. Tím dospíváme k druhé možnosti řešení uvedeného problému. Uplatníme podmínky nulových koncových momentů přímo v matici tuhosti prutového prvku a do globálních podmínek rovnováhy tak fakticky přičteme síly z prutu, který je pouze jednostranně vetknutý.

Ukážeme postup, jak získat matici tuhosti a vektor transformovaného

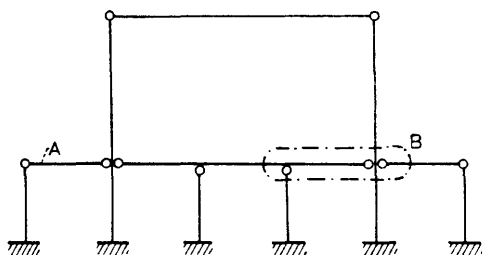


Obr. 2.15: Ohybové momenty v pásu

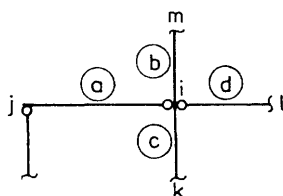
zatížení. Konkrétně si můžeme představit, že se jedná o prut  $a$ . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že posuny  $u_1, u_2$  jsou nulové. Ve skutečnosti tomu tak není, ale posuny  $u_1, u_2$  v případě prutu, jehož střednice je rovnoběžná s některou osou globální souřadnicové soustavy, neovlivňují hodnoty koncových smykových sil a momentů.

Aby se s uvedenými maticemi lépe pracovalo, přeskupíme neznámé parametry tak, aby parametr  $\varphi_2$ , který budeme vylučovat z podmínky  $M_2 = 0$ , byl poslední. Vektor zobecněných uzlových posunů  $r$  bude mít tvar  $\{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}^T$ . Tomu odpovídá následující matice tuhosti a vektor





Obr. 2.16: Schéma ocelového rámu



Obr. 2.17: Detail B

transformovaného zatížení

$$K = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & 2+\kappa & \frac{3}{l} & 1-\kappa \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & 1-\kappa & \frac{3}{l} & (2+\kappa) \end{bmatrix} \quad R_p = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{f}_z l}{2} \\ \frac{\bar{f}_z l^2}{12} - \bar{M}_T \\ \frac{\bar{f}_z l}{2} \\ \frac{\bar{f}_z l^2}{12} + \bar{M}_T \end{array} \right\}$$

Podmínka nulového momentu na pravém konci prutového prvku se získá z posledního řádku matice  $K$  a z posledního prvku vektoru  $R_p$ . Musí platit

$$\frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \left[ -\frac{3}{l} w_1 + (1-\kappa) \varphi_1 + \frac{3}{l} w_2 + (2+\kappa) \varphi_2 \right] - \frac{\bar{f}_z l^2}{12} - \bar{M}_T = 0.$$

Odtud

$$\frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)}\varphi_2 = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \left[ \frac{3}{(2+\kappa)l}w_1 - \frac{1-\kappa}{(2+\kappa)}\varphi_1 - \frac{3}{(2+\kappa)l}w_2 \right] + \frac{\bar{f}_z l^2}{12(2+\kappa)} + \frac{\bar{M}_T}{(2+\kappa)}.$$

Vzhledem k tomu, že i na jednotlivém prvku platí  $\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}$ , můžeme závislost  $\varphi_2$  na parametrech  $w_1, \varphi_1, w_2$  v tomto vztahu uplatnit jednoduše tak, že za  $\varphi_2$  dosadíme do každé z prvních tří rovnic  $\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}$ . Tak obdržíme modifikovanou matici tuhosti a modifikovaný vektor zatížení:

$$\mathbf{K}^* = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 \\ \text{sym.} & & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } k_{11} &= \frac{6}{l^2} \left( 1 - \frac{3}{2(2+\kappa)} \right), & k_{12} &= -\frac{3}{l} \left( 1 - \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \right), \\ k_{13} &= -\frac{6}{l^2} \left( 1 - \frac{3}{2(2+\kappa)} \right), & k_{22} &= (2+\kappa) \left( 1 - \left( \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \right)^2 \right), \\ k_{23} &= \frac{3}{l} \left( 1 - \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \right), & k_{33} &= \frac{6}{l^2} \left( 1 - \frac{3}{2(2+\kappa)} \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_p^* = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\bar{f}_z l}{2} \left( 1 + \frac{1}{2(2+\kappa)} \right) + \frac{3}{l} \frac{\bar{M}_T}{(2+\kappa)} \\ -\frac{\bar{f}_z l^2}{12} \left( 1 + \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \right) - \bar{M}_T \left( 1 + \frac{1-\kappa}{2+\kappa} \right) \\ \frac{\bar{f}_z l}{2} \left( 1 - \frac{1}{2(2+\kappa)} \right) - \frac{3}{l} \frac{\bar{M}_T}{(2+\kappa)} \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (2.112)$$

Položíme-li nyní  $\kappa = 0$ , tj. zanedbáme-li vliv smykových deformací, můžeme např. z druhého řádku odvodit známý vzorec ze stavební mechaniky pro moment ve vetknutí na jednostranně vetknutém nosníku. Vliv změny teploty zanedbáme, tuhost prutu označíme shodně se zvyklostmi stavební mechaniky  $k = 2EI_y/l$  (je to zcela výjimečné označení, neboť symbol

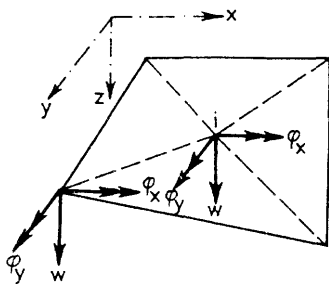
$k$  až dosud značil koeficient udávající vliv rozložení smykových napětí na hodnotu  $\gamma$ ). Pro  $M_{ji}$  platí

$$M_{ji} + \left(-\frac{1}{8}\bar{f}_z l^2\right) = -\frac{3}{2l}k w_1 + \frac{3}{2}k \varphi_1 + \frac{3}{2l}k w_2. \quad (2.113)$$

Odvození vzorců pro svislé uzlové síly, jakož i znaménkovou kontrolu ponecháme na procvičení čtenáři.

Nyní obraťme pozornost k obecnějšímu pojetí statické kondenzace. Postup uvedený výše je sice názorný, postrádá však formální jednoduchost a univerzálnost, potřebnou k sestavení efektivního algoritmu řešení. V dalším budeme předpokládat, že máme matici tuhosti  $\mathbf{K}$  a vektor transformovaného zatížení  $\mathbf{R}_p$ , příslušné obecně nějaké subkonstrukci. Subkonstrukce může být modelována v podstatě libovolným systémem prvků. Jednoduchý typ subkonstrukce se vyskytuje hlavně při řešení plošných konstrukcí, kdy se jako základní prvek často vyskytuje prvek trojúhelníkový. Z hlediska úspory při zadávání vstupních údajů však raději pracujeme s prvky čtyřúhelníkovými, které vytvoříme tak, že složíme dohromady čtyři prvky trojúhelníkové, jak je vyznačeno na obr. 2.18 pro případ deskového prvku. Předpokládejme, že takový prvek má v každém uzlovém bodě tři parametry posunutí

- průhyb  $w$
- pootočení normály okolo osy  $x - \varphi_x$
- pootočení normály okolo osy  $y - \varphi_y$ .



Obr. 2.18: Subkonstrukce složená ze čtyř trojúhelníkových prvků

Parametry  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  související s uzlovým bodem uprostřed čtyřúhelníkového prvku označíme jako vnitřní parametry, neboť v podmínkách rovnováhy příslušných k těmto parametrům vystupují pouze parametry příslušné

tomuto jedinému prvku. Máme tedy v poněkud obecnější podobě stejnou situaci, jako v případě jednostranně vetknutého nosníku. Stejně jako u prutu seřadíme parametry pole posunů tak, aby ty, které budou kondenzací vyloučeny, byly poslední. Za tím účelem rozdělíme matici tuhosti, vektor uzlových posunů i vektor transformovaného zatížení na pole. Příslušnost k vnitřním stupňům volnosti označíme indexem  $i$  (interní), příslušnost k ostatním stupňům volnosti  $e$  (externí). Na základě této úmluvy můžeme matici tuhosti, vektor uzlových posunů a vektor transformovaného zatížení přepsat do tvaru

$$K = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \quad r = \begin{Bmatrix} r_e \\ r_i \end{Bmatrix} \quad R_p = \begin{Bmatrix} R_{pe} \\ R_{pi} \end{Bmatrix}. \quad (2.114)$$

Podmínky rovnováhy na izolované subkonstrukci zapíšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_e \\ r_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_e \\ R_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{pe} \\ R_{pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R'_e \\ R'_i \end{Bmatrix}. \quad (2.115)$$

Ve vektoru  $R_i$  jsou uspořádány vnější síly působící přímo ve vnitřním uzlu  $i$  subkonstrukce, ve vektoru  $R_e$  jsou uspořádány zobecnělé síly, jimiž ve vnějších uzlech  $e$  působí na vyjmutou subkonstrukci okolní část konstrukce. Z druhé rovnice (2.115) vyjádříme  $r_i$ :

$$r_i = K_{ii}^{-1}(R'_i - K_{ie}r_e). \quad (2.116)$$

Tento výraz dosadíme do první rovnice (2.115) a obdržíme

$$(K_{ee} - K_{ei}K_{ii}^{-1}K_{ie})r_e = R'_e - K_{ei}K_{ii}^{-1}R'_i, \quad (2.117)$$

což můžeme zapsat symbolicky

$$K^*r_e = R^*, \quad (2.118)$$

kde

$$\begin{aligned} K^* &= K_{ee} - K_{ei}K_{ii}^{-1}K_{ie}, \\ R^* &= R_e + R_{pe} - K_{ei}K_{ii}^{-1}(R_i + R_{pi}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

### Příklad 2.2

Uvažujme jednostranně vetknutý prut, který můžeme považovat za zvláštní případ subkonstrukce. Poněvadž budeme kondenzovat pouze jeden

parametr, je matice  $K_{ii}$  tvořena pouze jediným prvkem, takže snadno získáme matici (prvek) inverzní.

### Řešení:

Vzhledem k symetrii matice tuhosti je  $K_{ei} = K_{ie}^T$ . Jednotlivé matice  $K_{ee}$ ,  $K_{ei}$ ,  $K_{ii}$  a vektory  $R_{pe}$ ,  $R_{pi}$  mají tvar (jediný prvek vektoru  $R_i$  - vnější ohybový moment působící v kloubu na prut - neuvažujeme):

$$K_{ee} = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} & -\frac{3}{l} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{3}{l} & 2+\kappa & \frac{3}{l} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}, \quad K_{ei} = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)} \begin{Bmatrix} -\frac{3}{l} \\ 1-\kappa \\ -\frac{3}{l} \end{Bmatrix},$$

$$R_{pe} = \begin{Bmatrix} \frac{\bar{f}_z l}{2} \\ -\frac{\bar{f}_z l^2}{12} - \bar{M}_T \\ \frac{\bar{f}_z l}{2} \end{Bmatrix}, \quad K_{ii} = \frac{2EI_y}{l(1+2\kappa)}(2+\kappa),$$

$$R_{pi} = \frac{\bar{f}_z l^2}{12} + \bar{M}_T.$$

Podrobnosti výpočtu podle vzorců (2.119) neuvádíme, čtenář je snadno zvládne sám a výsledek porovná se vzorci (2.111) a (2.112).

Na příkladě eliminace pootočení jednoho z koncových průřezů oboustranně vetknutého prutového prvku jsme ilustrovali obecný postup kondenzace podle rovnic (2.119). Zdůrazněme, že je-li to jen trochu možné, vyhýbáme se inverzi. V případě kondenzace lze získat matici  $K^*$  a vektor  $R^*$  aplikací Gaussovy eliminace na matici  $K$  a na vektor  $R$ . Takový postup je velmi jednoduchý, numericky stabilní a v případě větší subkonstrukce v maximální možné míře zachovává pásový charakter matice tuhosti.

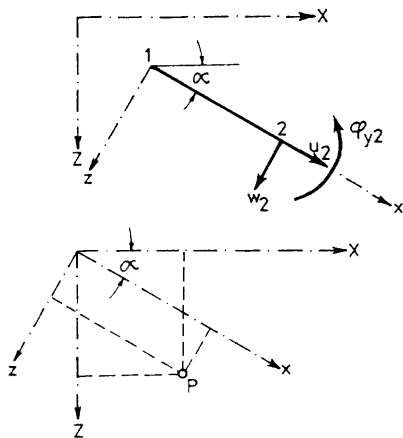
## 2.6 Transformace souřadnic

Matice tuhosti i vektory transformovaného zatížení byly dosud vždy vztaženy k souřadnicové soustavě, jejíž osa  $x$  byla ztotožněna se střednicí vyšetřovaného prutového prvku. Při analýze celých konstrukčních systémů je však třeba vztáhnout řešení k určité referenční souřadnicové soustavě. Tato soustava bývá zpravidla jediná a nazývá se *globální souřadnicová soustava*. V mnohých případech je účelné zvolit s ohledem na formulaci okrajových

podmínek pro některé uzlové body speciální referenční souřadnicovou soustavu. Podrobněji o této otázce bude pojednáno v souvislosti s řešením deskových konstrukcí. V každém uzlovém bodě musí být definována jediná souřadnicová soustava proto, abychom mohli příspěvky z matic tuhosti a vektorů zatížení v každém uzlovém bodě algebraicky sčítat.

Přechod od matice tuhosti vyjádřené v lokální souřadnicové soustavě k matici tuhosti vyjádřené v globální souřadnicové soustavě ukážeme opět na příkladě prutového prvku.

Vyděme z geometrického názoru. Ztotožníme počátek lokální a globální souřadnicové soustavy, jak je znázorněno na obr. 2.19. Souřadnice bodu P v globální souřadnicové soustavě označme  $X, Z$  a v lokální souřadnicové soustavě  $x, z$ . Pomocí obrázku snadno stanovíme transformační vztahy



Obr. 2.19: Transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha + Z \sin \alpha \\ z &= -X \sin \alpha + Z \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.120)$$

kde

$$\cos \alpha = \frac{X_2 - X_1}{l}, \quad \sin \alpha = \frac{Z_2 - Z_1}{l}.$$

Vzhledem k tomu, že se posuny transformují stejně jako polohové vektory a pootočení koncových průřezů  $\varphi_y$  se při pootáčení a posouvání souřadnicové soustavy nemění, můžeme pro přechod od neznámých parametrů  $r_1$  v lokální

souřadnicové soustavě k parametrům v globální souřadnicové soustavě  $r_g$  psát

$$r_l = A r_g, \quad (2.121)$$

kde  $A$  je transformační matice složená ze submatic  $a$ , pro které platí

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.122)$$

Znovu zdůrazněme, že všechny vztahy, které jsme až dosud odvodili, byly vztaženy k lokální souřadnicové soustavě s osou  $x$ , ležící v ose prutu. Tudíž platí

$$K_l r_l = R_l. \quad (2.123)$$

Do tohoto vztahu dosadíme z (2.121) a stejným způsobem vyjádříme i  $R_l$ , takže

$$K_l A r_g = A R_g. \quad (2.124)$$

Nyní využijme toho, že matice  $A$  je ortogonální, což znamená, že

$$A^{-1} = A^T. \quad (2.125)$$

Vztah (2.124) vynásobíme zleva maticí  $A^T$ . Uvážíme-li, že  $A^T A = I$ , vysvitne, že

$$A^T K_l A r_g = R_g. \quad (2.126)$$

Tento vztah je formálně shodný s (2.123), zaměníme-li  $K_g$  za  $K_l$ . Symbolem  $K_g$  označujeme matici tuhosti v globální souřadnicové soustavě. Vypočteme ji z lokální matice tuhosti použitím vztahu

$$K_g = A^T K_l A. \quad (2.127)$$

Vektor zatížení, vztažený ke globální souřadnicové soustavě se vypočte tak, že základní transformační vztah  $R_l = A R_g$  přenásobíme zleva maticí  $A^T$ . Odtud pro  $R_g$  plyne

$$R_g = A^T R_l. \quad (2.128)$$

Vztahy (2.121) a (2.128) vyjadřují tzv. kontragradienční transformaci.

Další maticí, jejíž transformační zákon nás zajímá, je matice  $\mathbf{G}$ . Definujeme ji tak, že zvolená napětí nebo síly na prvku, které jsou sestaveny do vektoru  $\mathbf{p}$ , vypočteme z uzlových posunů, vztažených k lokální souřadnicové soustavě, ze vzorce

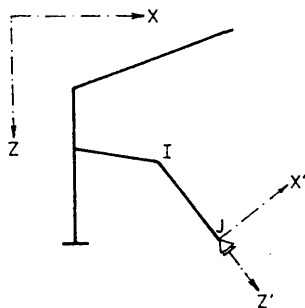
$$\mathbf{p}_l = \mathbf{G}_l \mathbf{r}_l. \quad (2.129)$$

Ve většině případů se vektor  $\mathbf{p}_l$  netransformuje. Typickým příkladem jsou právě pruty, kdy nás zajímá příčná a osová síla. Do (2.129) dosadíme tudíž pouze z (2.121). Obdržíme

$$\mathbf{p}_l = \mathbf{G}_g \mathbf{r}_g, \quad \mathbf{G}_g = \mathbf{G}_l \mathbf{A}. \quad (2.130)$$

Ze struktury matice  $\mathbf{A}$  plyne, že neexistuje geometrická souvislost mezi složkami vektoru v uzlu 1 a v uzlu 2. To znamená, že v každém uzlu můžeme zavést jinou referenční souřadnicovou soustavu. Pro všechny prvky, které se v daném uzlovém bodě stýkají, musí však být tato souřadnicová soustava totožná. Je přirozené, že nebudeme volit v každém uzlovém bodě z pouhého rozmaru jinou referenční souřadnicovou soustavu. Pokud si to zvláštní okolnosti nevyžádají, vztáhneme všechny uzlové body a parametry v nich ke globální souřadnicové soustavě.

Zvláštní okolností v případě rovinných rámových konstrukcí může být určitý druh podepření. Uvažujme konstrukci, jejíž schema je na obr. 2.20. Globální souřadnicová soustava  $(X, Z)$  vyhovuje všem styčnickům, kromě



Obr. 2.20: Zvláštní způsob podepření konstrukce

pravého dolního styčnicku, kde v důsledku šikmého podepření je vhodné zavést jinou referenční souřadnicovou soustavu  $(X', Z')$ . Geometrickou okrajovou podmínku v ní vyjádříme snadno, kladouce  $w_j = 0$ . Poněvadž v každém z koncových průřezů prutu  $I, J$  je jiná referenční souřadnicová soustava, je



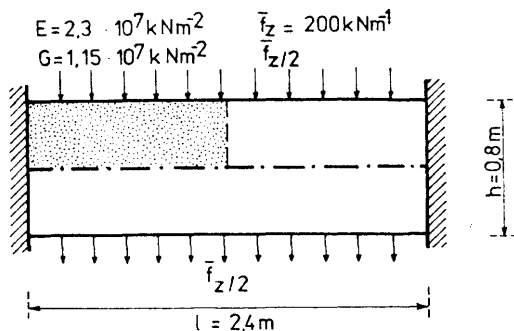
i transformační matice  $\mathbf{A}$  složena ze dvou odlišných submatic  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$ .

### Příklad 2.3

V předcházejících odstavcích jsme probrali prvky pro analýzu prutových systémů. Řešení bylo založeno na Mindlinových předpokladech o přetvoření prvku. Aby si čtenář mohl učinit alespoň přibližnou představu o výstižnosti takového přístupu, porovnáme zde výsledky řešení podle Mindlinovy teorie s výsledky, získanými řešením dvourozměrné úlohy MKP. Podrobně je výpočet dvourozměrné úlohy probrán ve třetí kapitole. Zde se omezíme pouze na porovnání průhybu uprostřed oboustranně vetknutého nosníku, zatíženého rovnoměrně podle obr. 2.21. Zatížení na uvedeném obrázku je rozděleno na horní a dolní povrch nosníku. To je potřebné při řešení rovinné úlohy, jak bude podrobněji vysvětleno dále. Pro nosíkové řešení přirozeně počítáme se součtem zatížení obou povrchů. Na obrázku jsou rovněž uvedeny fyzikální charakteristiky materiálu.

#### Řešení:

Nejprve vypočteme průhyb středu vetknutého prvku pomocí nosíkového řešení. K výpočtu použijeme rovnic (2.8) ve tvaru



Obr. 2.21: Nosník k ověření Mindlinových předpokladů

$$\frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \frac{dw}{dx} + \varphi_y = \frac{Q_z}{kGA}.$$

Vzhledem k tomu, že konstrukce je symetrická podle svislé osy, nemá započít-

távání smykových deformací vliv na rozdělení vnitřních sil. Tudiž platí:

$$M_y = -\frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \frac{1}{2}\bar{f}_z x(l-x)$$

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = \frac{1}{2}\bar{f}_z l - \bar{f}_z x.$$

Dosazením do vztahu mezi ohybovým momentem a křivostí

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_y}{dx} &= \frac{1}{EI_y} \left[ -\frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 + \frac{1}{2}\bar{f}_z x(l-x) \right] \\ \frac{dw}{dx} + \varphi_y &= \frac{1}{kGA} \left( \frac{1}{2}\bar{f}_z l - \bar{f}_z x \right). \end{aligned}$$

Integrací první z předchozích rovnic získáme vztah

$$\varphi_y = \frac{1}{EI_y} \left[ -\frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 x + \frac{1}{4}\bar{f}_z x^2 l - \frac{1}{6}\bar{f}_z x^3 \right] + C.$$

Vzhledem k podepření v průřezu  $x = 0$ , je  $C = 0$ . Po vyloučení  $\varphi_y$  vyjde

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI_y} \left[ \frac{1}{12}\bar{f}_z l^2 x - \frac{1}{4}\bar{f}_z x^2 l + \frac{1}{6}\bar{f}_z x^3 \right] + \frac{1}{kGA} \left( \frac{1}{2}\bar{f}_z l - \bar{f}_z x \right).$$

Integrací a uplatněním okrajové podmínky  $w = 0$  v průřezu  $x = 0$  máme

$$w = \frac{1}{EI_y} \left[ \frac{1}{24}\bar{f}_z l^2 x^2 - \frac{1}{12}\bar{f}_z x^3 l + \frac{1}{24}\bar{f}_z x^4 \right] + \frac{1}{kGA} \left( \frac{1}{2}\bar{f}_z l x - \frac{1}{2}\bar{f}_z x^2 \right).$$

Po úpravě obdržíme vzorec

$$w = \frac{\bar{f}_z l^4}{24EI_y} \left[ 2\kappa\xi + (1-2\kappa)\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4 \right].$$

Průhyb uprostřed nosníku vypočítáme dosazením za  $\xi = 0,5$ .

$$w(x = \frac{l}{2}) = \frac{\bar{f}_z l^4}{384EI_y} (1 + 8\kappa).$$

Přístupme k dosazení číselných hodnot podle obr. 2.21. Nejprve uvažujme tvarový součinitel průřezu podle vzorce (2.3) hodnotou  $k = 1$ :

$$I_y = \frac{1}{12}0.8^3 = 0.042667 \text{ m}^4;$$

$$A = 1.0.8 = 0.8 \text{ m}^2;$$

$$\kappa = \frac{6.2.3.10^7 \cdot 0.042667}{1.1.15.10^7 \cdot 0.8.2.4^2} = 0.111.$$

Z toho vyplývá, že při masívním průřezu a poměru  $h/l = 1/3$  je vliv smykových deformací na průhyb uprostřed vetknutého nosníku 88.8% při  $k = 1$ . Při  $k = 5/6$  se tento vliv zvětší na 106.7%. Takže pro průhyb ve středu vetknutého nosníku máme (pro  $k = 1$ )

$$w(x = \frac{l}{2}) = \frac{200.2.4^4}{384.2.3.10^7.0.042667}(1 + 0.888889) = 3.326.10^{-5} \text{ m},$$

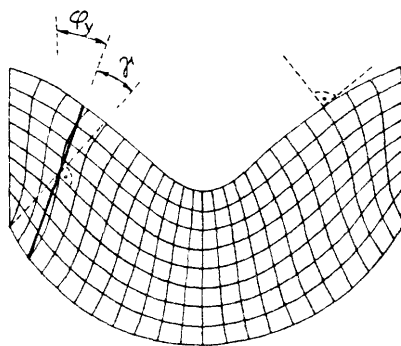
a pro  $k = 5/6$

$$w(x = \frac{l}{2}) = 3.639.10^{-5} \text{ m}.$$

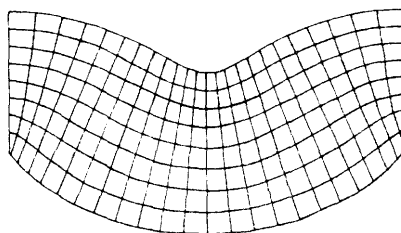
A nyní k výpočtu nosníku, jakožto stěny MKP. Průhyb se po výšce průřezu přirozeně mění, neboť nosník je ve skutečnosti po výšce stlačitelný. Jak je patrné z obrázku, bylo zatížení rozděleno polovinou na horní a polovinou na dolní povrch nosníku. Tím bylo zajištěno, že konstrukce a její odezva jsou antisymetrické vzhledem ke střednici nosníku. V důsledku toho nevzniká v podporách vodorovná reakce. To je nesmírně důležité, poněvadž jinak by se projevil obloukový účinek vodorovné reakce a získané výsledky by nebyly pro testování nosníkového řešení použitelné. Výpočtem jsme zjistili, že průhyb střednice uprostřed rozpětí vetknutého nosníku je  $w = 3.57.10^{-5}$  m, kdežto u krajním vlákně je  $w = 3.678.10^{-5}$  m. Z uvedených čísel je okamžitě patrná vynikající shoda s nosníkovým řešením.

Obě nosníková řešení  $k = 1$  i  $k = 5/6$  vyjadřují "energeticky průměrný" průhyb, který se v případě  $k = 5/6$  vešel do intervalu  $< 3.57.10^{-5}; 3.678.10^{-5} >$ . Lze proto předpokládat, že průběh smykových napětí po výšce průřezu bude blíže parabolickému průběhu ( $k = 5/6$ ) než obdélníkovému ( $k = 1$ ).

V obr. 2.22 je početní řešení znázorněno graficky. Ukazuje několik zajímavých skutečností. Za prvé je vidět, že v nosníku v blízkosti krajních vláken nedochází k smykové deformaci. Za druhé, čára vyznačující pootočení tuhého průřezu z nosníkového řešení jasně potvrzuje oprávněnost předpokladu o zanedbání deplanace průřezu. Na obr. 2.23 je znázorněn výsledek jiného výpočtu, kdy byl simulován stav přibližně odpovídající Kirchhoffovým předpokladům. Bylo totiž uvažováno  $G = 1.10^9 \text{ kNm}^{-2}$ . Z obrázku je vidět, že v takovém případě zůstávají normály normálami i po deformaci.



Obr. 2.22: Výpočet přetvoření pomocí bilineárních izoparametrických prvků (čl. 3.1)



Obr. 2.23: Simulování Kirchhoffových předpokladů

# Kapitola 3

## Plošné konstrukce

### 3.1 Základní vztahy pro izoparametrické prvky

#### 3.1.1 Podstata izoparametrických prvků

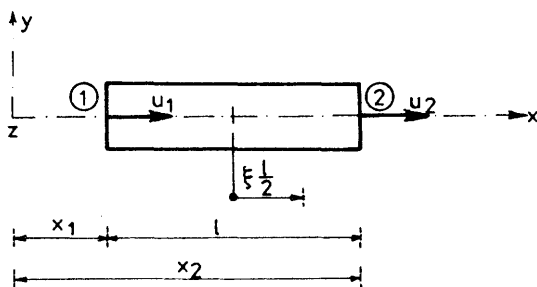
Izoparametrické prvky se tak nazývají proto, že k interpolaci geometrie prvku i k interpolaci posunů po prvku se používají stejné interpolační funkce. Nejjednodušší ukázkou izoparametrického prvku je tažený-tlačený prvek podle obr. 3.1.

Prvním krokem při použití izoparametrických prvků je výběr tzv. *přirozených souřadnic*. Přirozené souřadnice zobrazují úsečku délky 2 na jedno-rozměrný prvek, čtverec o straně 2 na dvourozměrný prvek a konečně krychli o délce hrany 2 na prostorový prvek. Zatím zůstaneme u příkladu taženého-tlačeného prvku a zavedeme jedinou přirozenou souřadnici  $\xi$ , která se rovná  $(-1)$  v uzlovém bodě 1 a  $(+1)$  v uzlovém bodě 2. Souřadnici libovolného bodu prvku vypočteme v závislosti na hodnotě přirozené souřadnice  $\xi$  a na souřadnicích uzlů  $x_1, x_2$ :

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2. \quad (3.1)$$

Pomocí interpolačních funkcí  $N_1, N_2$  přepíšeme předchozí vzorec takto:

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i, \quad \text{kde } N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (3.2)$$



Obr. 3.1: Tažený-tlačený prvek

Vztah mezi  $x$  a  $\xi$  je jednoznačný.

Stejným způsobem jako geometrie se vyjadřuje posun  $u(x)$ . Platí

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i. \quad (3.3)$$

Tento výklad není zcela nový, vzhledem k tomu, že již v předcházející kapitole jsme používali parametrické vyjádření. Bezrozměrným parametrem byla proměnná  $\xi = x/l$ . Důležitým krokem při přechodu od souřadnicové soustavy  $(x, y, z)$  k soustavě přirozených souřadnic  $(\xi, \eta, \zeta)$  je vyjádření vztahu mezi diferenciály souřadnic. V případě jednorozměrného prvku platí

$$dx = J d\xi, \quad (3.4)$$

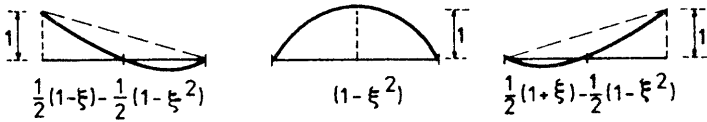
kde  $J$  je jacobíán transformace, a jeho hodnota je po celém prutu konstantní

$$J = \frac{l}{2}, \quad (3.5)$$

neboť

$$\frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{l}{2}.$$

Základní vlastností interpolačních funkcí  $N_i$  je fakt, že se rovnají 1 v bodě  $i$  a jsou nulové v ostatních uzlových bodech. Jako příklad interpolačních funkcí vyšších stupňů uvedme kvadratickou interpolaci pro tříbodový jednorozměrný prvek. Jednotlivé interpolační funkce jsou graficky znázorněny na obr. 3.2.



Obr. 3.2: Interpolační funkce

Formulace interpolačních funkcí, jak je uvedena v obr. 3.2, pochází od Batheho [7]. Umožňuje snadno konstruovat prvky s proměnným počtem stupňů volnosti. Povšimněme si, že vynecháme-li uzlový bod č. 2 a kvadratické členy v interpolačních funkcích, obdržíme lineární interpolační funkce (jsou v obr. 3.2 vyznačeny čárkovaně) podle vzorce (3.2).

### 3.1.2 Aproximační funkce na čtyřúhelníku

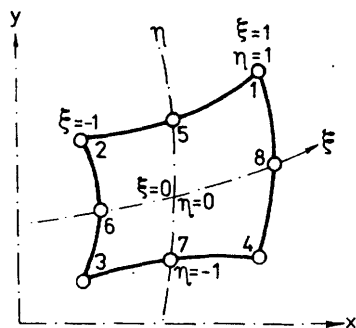
Uvedený postup konstrukce interpolačních funkcí je možné zobecnit i na dvou a třírozměrné prvky. Velmi atraktivní dvourozměrný prvek s proměnným počtem uzlových bodů lze zkonstruovat užitím kvadratické interpolace. V nejobecnějším případě se jedná o křivočarý osmiuzlový prvek podle obr. 3.3. Interpolační funkce jsou uvedeny v tabulce 3.1.

	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
$N_1 = 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)$	$-0.5 N_5$			$-0.5 N_8$
$N_2 = 0.25(1 - \xi)(1 + \eta)$	$-0.5 N_5$	$-0.5 N_6$		
$N_3 = 0.25(1 - \xi)(1 - \eta)$		$-0.5 N_6$	$-0.5 N_7$	
$N_4 = 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)$			$-0.5 N_7$	$-0.5 N_8$
$N_5 = 0.5(1 - \xi^2)(1 + \eta)$				
$N_6 = 0.5(1 - \eta^2)(1 - \xi)$				
$N_7 = 0.5(1 - \xi^2)(1 - \eta)$				
$N_8 = 0.5(1 - \eta^2)(1 + \xi)$				

Tabulka 3.1: Interpolační funkce pro dvourozměrný prvek

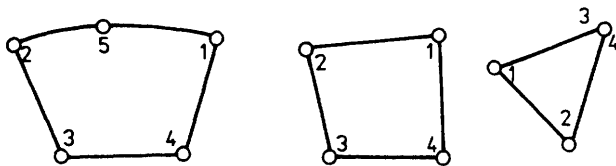
Zmíněná formulace dovoluje vynechat kterýkoliv z bodů 5, 6, 7, 8. Silně orámovány jsou interpolační funkce pro bilineární izoparametrický prvek. Pří-

klady prvků, které lze pomocí tabulky 3.1 vytvořit, jsou na obr. 3.4. Takto můžeme vytvořit i ten nejjednodušší dvourozměrný prvek - trojúhelník se třemi uzlovými body, a to tak, že vynecháme uzly 5, 6, 7, 8 a uzly 3, 4 (nebo jiné dva sousední uzlové body) ztotožníme. Obdobným způsobem lze tvořit i trojrozměrné izoparametrické prvky. Podrobnosti lze nalézt v [7].



Obr. 3.3: Křivočarý prvek

*Izoparametrické prvky zajišťují na hranicích mezi jednotlivými prvky pouze spojitost funkčních hodnot. Jsou proto vhodné jen v těch případech, kdy se ve funkcionálu příslušné úlohy vyskytují hledané funkce nejvýše v první derivaci. Typickou úlohou tohoto druhu je rovinná úloha (např. rovinná napjatost nebo rovinná deformace), pro jejíž řešení izoparametrické prvky vznikly. Podrobněji nyní probereme bilineární interpolaci, která se dále*

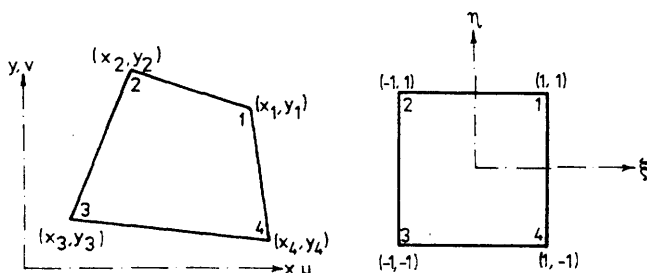


Obr. 3.4: Odvozené prvky

uplatní v souvislosti s rovinnou úlohou a při řešení desek.

Vyděme z názorné geometrické představy, kterou poskytuje obr. 3.5 a z něhož je patrný jak tvar prvku, tak zavedení přirozených souřadnic. Geometrii prvku můžeme vyjádřit prostřednictvím interpolačních funkcí. Pro souřadnice  $x$ ,  $y$  platí





Obr. 3.5: Zobrazení čtyřúhelníku na "jednotkový" prvek

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i. \quad (3.6)$$

Základním krokem při použití izoparametrických prvků je převedení úlohy ze soustavy souřadnic  $(x, y)$  do soustavy souřadnic  $(\xi, \eta)$ . Mějme nějakou funkci  $f = f(x, y)$ , která může představovat posun, teplotu, pórový tlak ap. a kterou aproximujeme izoparametricky, tj.

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i f_i. \quad (3.7)$$

Ve funkcionelech, které jsou základem MKP, se však nevyskytují pouze funkční hodnoty, ale i derivace hledané funkce  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Proto musíme znát závislost mezi derivacemi  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  a  $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ . Na základě věty o derivaci složené funkce lze psát

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

Se zápisem (3.8) můžeme zacházet jako se soustavou dvou lineárních

algebraických rovnic umožňujících získat inverzní vztah

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

kde

$$J = J(\xi, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

je jacobíán transformace. Aby bylo možné pro danou bilineární interpolaci vypočítat hodnotu jacobíánu v libovolném bodě prvku, dosadíme do (3.9) z (3.6). Potom

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_i \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) y_j \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_i P_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde

$$\mathbf{x}^T = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}, \quad \mathbf{y}^T = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \},$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 + \eta & \xi - \eta & -1 - \xi \\ -1 - \eta & 0 & 1 - \xi & \xi + \eta \\ -\xi + \eta & -1 + \xi & 0 & 1 - \eta \\ 1 + \xi & -\xi - \eta & -1 + \eta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Postupným roznásobením obdržíme

$$\mathbf{P} \mathbf{y} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} y_{24} + y_{34} \xi + y_{23} \eta \\ -y_{13} - y_{34} \xi - y_{14} \eta \\ -y_{24} - y_{12} \xi + y_{14} \eta \\ y_{13} + y_{12} \xi - y_{23} \eta \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$J = \frac{1}{8} [(x_{13}y_{24} - x_{24}y_{13}) + \xi(-x_{34}y_{12} + x_{12}y_{34}) + \eta(-x_{23}y_{14} + x_{14}y_{23})],$$

kde

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j.$$

Sestavme hodnoty funkce  $f$  v uzlech do vektoru  $\mathbf{r}_f^T = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  a rozeptejme vztah (3.9). Podobně jako při výpočtu hodnoty jacobianu najdeme

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f_i \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) y_j,$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{J} \mathbf{r}_f^T \mathbf{P} \mathbf{y}. \quad (3.13)$$

Analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{1}{J} \mathbf{r}_f^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (3.14)$$

Označme dále

$$\frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{X}, \quad -\frac{1}{J} \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y}, \quad (3.15)$$

kde např. podle (3.12) je

$$X_1 = \frac{1}{8J} (y_{24} + y_{34}\xi + y_{23}\eta), \quad Y_1 = -\frac{1}{8J} (x_{24} + x_{34}\xi + x_{23}\eta).$$

Derivace funkce  $f$  v bodě  $(\xi, \eta)$  lze potom vyjádřit jednoduchými vztahy

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{r}_f^T \mathbf{X}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{r}_f^T \mathbf{Y}. \quad (3.16)$$

Tím jsou připraveny nejdůležitější vzorce, které budeme dále potřebovat k odvození matice tuhosti izoparametrického prvku.

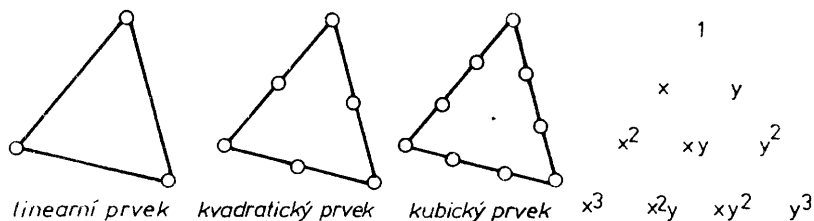
## 3.2 Základní vztahy pro trojúhelníkové prvky

### 3.2.1 Plošné souřadnice na trojúhelníku

Hlavní předností trojúhelníkových prvků je schopnost pokrýt snadno oblast libovolného tvaru. Na trojúhelníkových prvcích je možné aplikovat různé stupně polynomicke aproximace. Nejčastěji užívané jsou

- lineární aproximace s 3 parametry
- kvadratická aproximace se 6 parametry.

Zřídka se využívá ještě kubická aproximace s 10 parametry. Schéma s vyznačením uzlových bodů je na obr. 3.6, kde je současně vyznačena příslušná hierarchie aproximačních polynomů. Poznamenejme, že ve všech třech případech jde o tzv. *úplné polynomy*. Aby se s trojúhelníkovými prvky lépe



Obr. 3.6: Typy trojúhelníkových prvků

pracovalo, je vhodné přejít od kartézské soustavy souřadnic  $(x, y)$  k tzv. soustavě *plošných souřadnic*  $L_1, L_2, L_3$ . Platí

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3, \quad y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3. \quad (3.17)$$

Každé trojici  $(L_1, L_2, L_3)$  je jednoznačně přiřazena dvojice  $(x, y)$  a naopak. Funkce  $L_1, L_2, L_3$  nejsou nezávislé, neboť jsou vázány vztahem  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ . Vzhledem k tomu, že vztah mezi kartézskou soustavou souřadnic a plošnými souřadnicemi je lineární, jsou rovnicemi

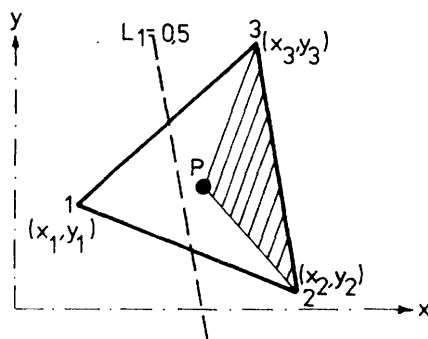
$$L_1 = \text{konst.}, \quad L_2 = \text{konst.}, \quad L_3 = \text{konst.}$$

popsány přímkami rovnoběžné se stranami trojúhelníkového prvku, jak je patrné z obr. 3.7.

Název *plošné souřadnice* je odvozen z jejich geometrického významu. Snadno lze ukázat, že např.  $L_1$  souřadnice bodu  $P$  z obr. 3.7 je poměr obsahu plochy vyšrafovaného trojúhelníku k obsahu plochy celého trojúhelníku

$$L_1 = \frac{\text{Obsah } \Delta P23}{\text{Obsah } \Delta 123}.$$

Kromě zápisu (3.17) je potřebné v dalším znát i vztah inverzní, který má tvar



Obr. 3.7: Plošné souřadnice

$$\begin{aligned} L_1 &= (a_1 + b_1x + c_1y)/2A, \\ L_2 &= (a_2 + b_2x + c_2y)/2A, \\ L_3 &= (a_3 + b_3x + c_3y)/2A, \end{aligned} \quad (3.18)$$

kde

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{Obsah } \Delta_{123}$$

a

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j.$$

### 3.2.2 Aproximační funkce na trojúhelníku

Obdobou aproximace (3.7) je výraz

$$f = \sum_i N_i f_i. \quad (3.19)$$

Pro nejjednodušší lineární aproximaci platí

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3.$$

Při kvadratické interpolaci je pro uzlové body

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \quad N_2 = (2L_2 - 1)L_2, \quad N_3 = (2L_3 - 1)L_3. \quad (3.20)$$

Pro body ve středech stran

$$N_4 = 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_3L_1. \quad (3.21)$$

Podrobnosti týkající se vyšších aproximačních funkcí jsou uvedeny např. v [74].

Zbývá uvést vjádření pro operátory  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ . K tomu je třeba vyjít z derivace složené funkce. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ &= \frac{b_1}{2A} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{b_2}{2A} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{b_3}{2A} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^3 b_k \frac{\partial}{\partial L_k}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Obdobně

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{c_1}{2A} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{c_2}{2A} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{c_3}{2A} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^3 c_k \frac{\partial}{\partial L_k}. \quad (3.23)$$

Při výpočtu matice tuhosti, hmotnosti nebo vektoru transformovaného zatížení je třeba vyčíslit hodnoty integrálů funkcí závislých na  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ . Proto je účelné uvést vzorce pro jejich výpočet

$$\iint_A L_i^a L_j^b L_k^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A, \quad (3.24)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou přirozená čísla v exponentech plošných souřadnic.

### 3.3 Tažený-tlačený prvek

Taženým-tlačeným prvkem se samostatně zabýváme čistě z metodických důvodů. Je totiž pouze speciálním případem prvku prutového. V taženém-tlačeném prvku se předpokládá jediná nenulová složka tenzoru napětí, a to  $\sigma_x$ . Přetvoření v příčném směru  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_y$  sice existují a nejsou zanedbatelná, avšak energie, která je s nimi spojená, vzhledem k zanedbatelně malým hodnotám napětí  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  zanedbatelná je. Z toho plyne, že jedinou neznámou funkcí je posun ve směru osy  $x$ , tj.  $u(x)$ . Aproximace posunu po délce prutu je vyjádřena vztahem (3.3), který můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$u(x) = \mathbf{N} \mathbf{r}, \quad (3.25)$$

kde

$$\mathbf{N} = \left\{ \frac{1}{2}(1-\xi), \frac{1}{2}(1+\xi) \right\}, \quad \mathbf{r}^T = \{ u_1, u_2 \}.$$

Deformace  $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$  se vypočte z následujícího vztahu

$$\varepsilon_x = \mathbf{B} \mathbf{r}, \quad (3.26)$$

kde

$$\mathbf{B} = \frac{2}{l} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \frac{1}{l} \{-1, 1\}.$$

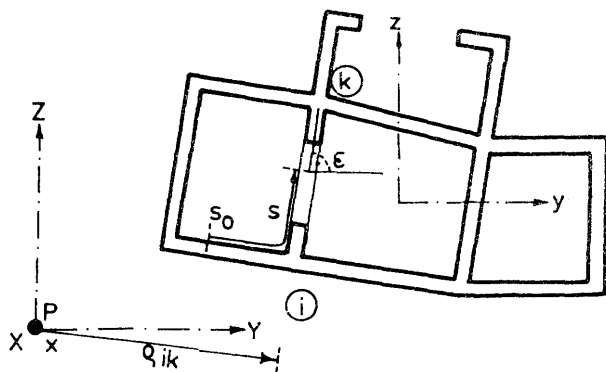
Matici tuhosti taženého-tlačeného prvku vypočteme ze vzorce  $\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx$ . Matice  $\mathbf{D}$  má jediný prvek  $D_{11} = EA$ . Platí

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l^2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} J d\xi = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

### 3.4 Tenkostěnný prutový prvek

Uvažujme tenkostěnný prut, který může mít uzavřený nebo polouzavřený průřez s otevřenými větvemi (obr. 3.8). Průřez piliře má lokální soustavu souřadnic  $y, z, \omega^*$  splňující podmínky

$$\int_A y dA = 0, \quad \int_A z dA = 0, \quad \int_A \omega^* dA = 0. \quad (3.28)$$



Obr. 3.8: Tenkostěnný prutový prvek

Naznačený prvek může být součástí vertikálního nosného systému výškové budovy. V takovém případě délka prvku  $l$  odpovídá výšce podlaží a lokální osy  $y, z$  je vhodné volit rovnoběžné s globálními osami  $Y, Z$ . Funkce  $\omega^*$  popisuje jednotkovou deplanaci průřezu. Vztahuje se k pólu  $P$  a počátku  $s_0$  souřadnice  $s$  a obvykle se zjišťuje za předpokladu volného kroucení. Na otevřených větvích přechází ve výsečovou souřadnici  $\omega$ . Průřez prvku má sedm stupňů volnosti: složky posunutí průřezu jako tuhého celku  $u_s, v_s, w_s$ , složky rotace  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  a míru deplanace  $\chi$ . Pomocí těchto veličin lze vyjádřit posuny  $u_1$  a  $u_2$  obecného bodu průřezu ve směru osy  $x$  a ve směru tečny ke střednici průřezu  $s$ . S označením podle obr. 3.8 můžeme psát

$$\begin{aligned} u_1(x, s) &= u_s(x) + \mathbf{s}_1^T(s) \mathbf{q}_1(x), \\ u_2(x, s) &= \mathbf{s}_2^T(s) \mathbf{q}_2(x), \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \{ -\varphi_z, \varphi_y, \chi \}^T, & \mathbf{q}_2 &= \{ v_s, w_s, \varphi_x \}^T, \\ \mathbf{s}_1 &= \{ y, z, \omega^* \}^T, & \mathbf{s}_2 &= \{ \cos \varepsilon, \sin \varepsilon, \rho \}^T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Z podmínek ekvivalence a užitím Hookeova zákona vypočteme vnitřní síly (srov. (2.8)): normálovou sílu  $N_x$ , posouvající síly  $Q_y, Q_z$ , dále momenty  $M_x, M_y, M_z$  a bimoment  $B$ . Po provedení nezbytných výpočtů vychází

$$\begin{aligned} N_x &= EAu'_s, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{D}_1 \mathbf{q}'_1, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{D}_2 \mathbf{q}_1 + \mathbf{D}_3 \mathbf{q}'_2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Derivace podle  $x$  jsou označeny čárkou. Nově zavedené matice jsou definovány takto:

$$\mathbf{M} = \{ -M_z, M_y, B \}^T, \quad \mathbf{Q} = \{ Q_y, Q_z, M_x \}^T. \quad (3.32)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \int_A E \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^T dA, & \mathbf{D}_2 &= \int_A G \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^T dA, \\ \mathbf{D}_3 &= \int_A G \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_2^T dA. \end{aligned} \quad (3.33)$$



Derivace podle  $s$  značíme tečkou. Z vlastností souřadnicových funkcí  $y, z$ ,  $\omega^*$  lze odvodit ekvivalentní vyjádření matice

$$\mathbf{D}_2 = \int_A G \dot{\mathbf{s}}_1 \dot{\mathbf{s}}_1^T dA = \mathbf{D}_2^T. \quad (3.34)$$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [20].

Matici tuhosti prvku vypočteme z výrazu pro potenciální energii vnitřních sil. S využitím podmínek (3.28) snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ u'_s E u'_s + \mathbf{q}'_1{}^T E \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_1^T \mathbf{q}'_1 \right. \\ &\quad \left. + \left( \mathbf{q}'_1{}^T \dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{q}'_2{}^T \dot{\mathbf{s}}_2 \right) G \left( \dot{\mathbf{s}}_1^T \mathbf{q}'_1 + \dot{\mathbf{s}}_2^T \mathbf{q}'_2 \right) \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde  $\Omega$  je objem prvku.

Tento výraz, jehož první dva členy na pravé straně představují energii normálových napětí a poslední člen energii smykových napětí, je zobecněním vztahu (2.67). Tvarový součinitel  $\mathbf{k}$  klademe rovný jedné. Integrací po průřezu uvedeme (3.35) s přihlédnutím k (3.33) a (3.34) na tvar

$$\begin{aligned} 2E_i &= \int_0^l \left[ u'_s E u'_s + \mathbf{q}'_1{}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_1{}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{q}'_2{}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_1 + \mathbf{q}'_1{}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_2 + \mathbf{q}'_2{}^T \mathbf{D}_3 \mathbf{q}'_2 \right] dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nechť

$$\mathbf{r}^T = \left\{ u_s^h \mid (\mathbf{q}_1^h)^T \mid (\mathbf{q}_2^h)^T \mid u_s^d \mid (\mathbf{q}_1^d)^T \mid (\mathbf{q}_2^d)^T \right\} \quad (3.37)$$

je vektor zobecněných posunů koncových průřezů. Indexem  $h$  jsou označeny parametry příslušné hornímu průřezu, index  $d$  označuje parametry dolního průřezu. Matice tuhosti prvku bude typu (14, 14) a k jejímu určení poslouží výraz

$$2E_i = \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r}, \quad \text{resp.} \quad \delta E_i = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r}. \quad (3.38)$$

Zbývá aproximovat neznámé  $u_s, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  v ekvivalentním výrazu (3.36). Omezíme se na lineární izoparametrickou aproximaci<sup>1</sup> a do (3.36) dosadíme

<sup>1</sup>Vzhledem k tomu, že všechny hledané funkce v (3.36) jsou nejvýše v 1. derivaci, stačí volit aproximační funkce zajišťující pouze spojitost hledaných funkcí na hranici mezi prvky.

vztahy

$$\begin{aligned} u_s &= u_s^d N_1 + u_s^h N_2, \\ \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_1^d N_1 + \mathbf{q}_1^h N_2, \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_2^d N_1 + \mathbf{q}_2^h N_2, \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde  $N_1, N_2$  jsou dány vztahy (3.2).

Pokud bychom provedli přesnou integraci (3.36), získáme matici tuhosti, která je prakticky nepoužitelná. Vyskytne se jev, který nazveme smykovým ztuhnutím (v anglické literatuře *shear locking*). Prvek totiž vykazuje neúměrně vysokou tuhost ve smyku. Ukázalo se však, že tuto nechtost lze snadno odstranit. Jak je patrné z (3.31), je pro zvolenou aproximaci (3.39) průběh posouvajících sil po délce prvku lineární a průběh ohybových momentů konstantní. To je však v hrubém rozporu s požadavkem Schwedlerovy věty  $dM/dx = Q$ , která žádá pro své splnění opak, tj. aby průběh posouvající síly byl vyjádřen polynomem o jeden stupeň nižším než ohybový moment. Je zřejmé, že aproximací (3.39) toho nelze docílit. Rozpor lze pouze zmírnit zavedením doplňující podmínky konstantního smyku (srovnej (2.71))

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{dw_s}{dx} + \varphi_y \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{w_{s2} - w_{s1}}{l} + \frac{\varphi_{y1} + \varphi_{y2}}{2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{dv_s}{dx} - \varphi_z \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{v_{s2} - v_{s1}}{l} - \frac{\varphi_{z1} + \varphi_{z2}}{2}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

kde  $\gamma_{xz}$  je zkosení průřezu v rovině  $(x, z)$  a  $\gamma_{xy}$  je zkosení průřezu v rovině  $(x, y)$ .

Po aplikaci (3.40) budou všechny členy v (3.36) konstantní a integrace se zjednoduší na maticové násobení. Téhož efektu je možné docílit tím, že k integraci (3.36) použijeme jednobodovou Gaussovu integrační formuli. Pro členy, kde se vyskytují pouze derivace  $u_s', \mathbf{q}_1', \mathbf{q}_2'$ , je to přesný výpočet, pro členy, kde se vyskytují  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ , je to redukováná integrace. Lze ukázat, že tento postup, nazývaný *selektivní integrací*, je zcela shodný s užitím předpokladu (3.40).

Po provedení příslušných numerických operací obdržíme matici tuhosti prvku zapsanou v tabulce 3.2. Symbolem  $\mathbf{O}^T$  je v tabulce 3.2 označena řádková matice typu  $(1, 3)$ , kde symbolem  $\mathbf{O}^T$  je označena řádková matice typu  $(1, 3)$ .

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \frac{EA}{l} & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -\frac{EA}{l} & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \frac{1}{l}\mathbf{D}_1 + \frac{l}{4}\mathbf{D}_2 & \frac{1}{2}\mathbf{D}_2 & \mathbf{0} & -\frac{1}{l}\mathbf{D}_1 + \frac{l}{4}\mathbf{D}_2 & -\frac{1}{2}\mathbf{D}_2 & \\ & \frac{1}{l}\mathbf{D}_3 & \mathbf{0} & & \frac{1}{2}\mathbf{D}_2 & -\frac{1}{l}\mathbf{D}_3 \\ & & \frac{EA}{l} & & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \text{sym.} & & & & \frac{1}{l}\mathbf{D}_1 + \frac{l}{4}\mathbf{D}_2 & -\frac{1}{2}\mathbf{D}_2 \\ & & & & & \frac{1}{l}\mathbf{D}_3 \end{array} \right],$$

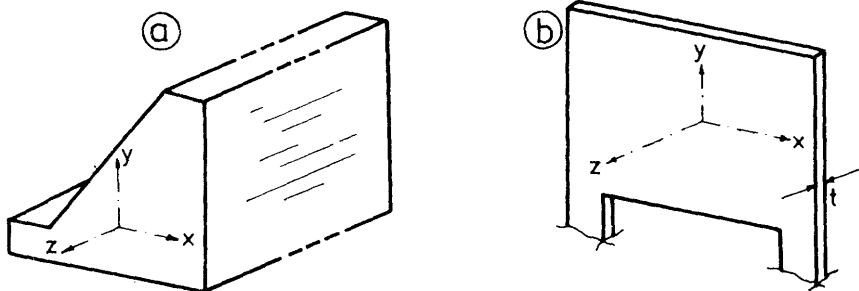
Tabulka 3.2: Matice  $\mathbf{K}$ 

### 3.5 Prvky pro rovinnou úlohu

Obecná prostorová úloha se redukuje na rovinnou, jestliže všechny veličiny jsou na jedné proměnné nezávislé (včetně geometrického tvaru). Takovou nezávisle proměnnou bude v našem případě  $z$ . Rovněž všechny působící síly (objemové i povrchové) musí být na  $z$  nezávislé. Nejprve stručně shrneme nejdůležitější poznatky z první kapitoly týkající se pojmu rovinná deformace a rovinná napjatost.

Jestliže kromě uvedených předpokladů je složka tenzoru deformace  $\varepsilon_z$  rovna nule, jedná se o případ *rovinné deformace*. Kromě toho jsou nulové složky tenzoru deformace  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Nenulové složky tenzoru napětí jsou  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z$ . Řešení úlohy musí splňovat všechny rovnice pro obecnou prostorovou napjatost. Některé rovnice jsou při tom v důsledku redukce na rovinný problém splněny identicky. Praktický příklad rovinné deformace nastává nejčastěji v souvislosti s řešením těles, jejichž rozměr ve směru  $z$  převažuje nad rozměry ve směrech  $x, y$ , avšak řešení nelze uspokojivě popsat pomocí zjednodušujících geometrických předpokladů. Klasickým příkladem je případ přehradní zdi (obr. 3.9a).

Jestliže kromě úvodních předpokladů je nulová složka tenzoru napětí  $\sigma_z$ , jedná se o případ *rovinné napjatosti*. V tomto případě jsou nenulovými složkami tenzoru napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ . Nenulová je i složka tenzoru deformace



Obr. 3.9: Příklady rovinných úloh

$\varepsilon_z$ . Zanedbáváme smykové napětí  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$  a odpovídající deformace  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Typickým příkladem je stanovení napjatosti tenké stěny, která je zatížena pouze ve střednicové rovině (obr. 3.9b)<sup>2</sup>.

V obou uvedených případech jsou pouze dvě neznámé funkce - posuny  $u, v$ . Obě jsou nezávislé na  $z$ . Statické i geometrické rovnice jsou pro obě úlohy totožné. Odlišné jsou fyzikální rovnice, reprezentované maticí tuhosti materiálu. Pro homogenní, izotropní materiál platí (viz tab. 1.1):

Rovinná deformace

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (3.41)$$

Rovinná napjatost

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Vektor napětí má pouze tři nenulové složky

$$\sigma = \{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \}^T. \quad (3.42)$$

<sup>2</sup>Důsledně vzato, jsou předpoklady rovinné napjatosti přesně splněny jen v limitním případě nekonečně tenké stěny  $t \rightarrow 0$  nebo pro tzv. zobecněnou rovinnou napjatost.

Obdobně vektor deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \right\}^T. \quad (3.43)$$

Geometrické rovnice obdržíme z (1.2). Platí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}. \quad (3.44)$$

Řešení dvourozměrné úlohy teorie pružnosti bylo první úspěšnou aplikací metody konečných prvků (viz [30]). Zahrnuje v sobě rovinnou napjatost a rovinnou deformaci. V obou úlohách se vyskytují tři složky tenzoru napětí a tři složky tenzoru deformace. V případě rovinné napjatosti všechny zbývající složky tenzoru napětí jsou nulové a nepřispívají tudíž do práce vnitřních sil. V případě rovinné deformace sice je napětí ve směru kolmém k rovině, ve které úlohu řešíme, nenulové, avšak příslušná složka tenzoru deformace je nulová a tudíž toto napětí rovněž nepřispívá do práce vnitřních sil.

V tomto článku nejprve odvodíme základní vztahy pro výpočet matice tuhosti trojúhelníkového prvku s konstantním polem deformace. Dále se budeme zabývat izoparametrickým čtyřúhelníkovým prvkem a nakonec popíšeme užitečné modifikace tohoto prvku. V té souvislosti využijeme obecnější variační principy. Omezíme se na jednoduché prvky s parametry zobecněných posunů pouze v uzlech čtyřúhelníku.

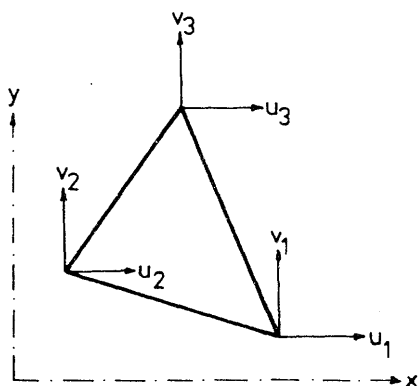
### 3.5.1 Trojúhelníkový prvek

Schema prvku je na obr. 3.10. Vektor uzlových posunů má 6 složek

$$\mathbf{r}^T = \left\{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \right\}.$$

Posuny uvnitř prvku musí být tudíž jednoznačně popsány těmito šesti parametry

$$u = \sum_{i=1}^3 L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 L_i v_i. \quad (3.45)$$



Obr. 3.10: Trojúhelníkový prvek (rovinná úloha)

Složky tenzoru deformace budou podle (3.44)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L_i}{\partial x} u_i = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i u_i,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 c_i v_i,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 (b_i v_i + c_i u_i),$$

což lze zapsat maticově ve tvaru

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}, \quad (3.46)$$

neboli

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{r}.$$

Z (3.46) je vidět, že složky vektoru  $\epsilon$  jsou po prvku konstantní. Jde tudíž o konformní prvek, neboť splňuje požadavky spojitosti i konstantní deformace.

V předcházející kapitole bylo ukázáno, že matice tuhosti se vypočte ze vzorce

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad (3.47)$$

při čemž integrační obor  $\Omega$  je vymezen objemem prvku.

Předpokládáme-li, že matice tuhosti materiálu  $\mathbf{D}$  se po prvku nemění, potom integrace (3.47) dává ( $t$  je tloušťka)

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A t.$$

Použitím tenzorového počtu lze vyjádřit matici tuhosti trojúhelníkového prvku ve vzorci. Použijeme následující označení:  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) jsou posuny obecného bodu  $(x_1, x_2)$  a  $u_i^\beta$  jejich hodnoty v uzlu  $\beta = 1, 2, 3$ .

Sledujíc předchozí postup, nejprve vypočteme derivace posunů.

Jelikož

$$u_i = L^\beta u_i^\beta, \quad i = 1, 2, \quad (3.48)$$

vychází

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial L^\beta}{\partial x_j} u_i^\beta = \frac{b_j^\beta u_i^\beta}{2A}, \quad (3.49)$$

kde při zavedení zkráceného zápisu  $y_{ij} = y_i - y_j$ ,  $x_{ij} = x_i - x_j$  atd. značí

$$\begin{aligned} b_1^1 &= y_{23}, & b_1^2 &= y_{31}, & b_1^3 &= y_{12}, \\ b_2^1 &= x_{32}, & b_2^2 &= x_{13}, & b_2^3 &= x_{21}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Rozvedením rovnice (1.39) pomocí předchozích vzorců obdržíme po malé úpravě výraz pro aproximaci tenzoru napětí za rovinné napjatosti

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{2A(1-\nu^2)} \left[ \delta_{ij} \nu b_l^\beta u_l^\beta + \gamma (b_j^\beta u_i^\beta + b_i^\beta u_j^\beta) \right], \quad (3.51)$$

kde  $\gamma = (1 - \nu)/2$ .

Matice tuhosti je dána vzorcem (srov. s (3.38))

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} &= \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = t A \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} & (3.52) \\ &= \frac{tE}{8A(1-\nu^2)} (b_j^\alpha \delta u_i^\alpha + b_i^\alpha \delta u_j^\alpha) \left[ \delta_{ij} \nu b_l^\beta u_l^\beta + \gamma (b_j^\beta u_i^\beta + b_i^\beta u_j^\beta) \right] \\ &= \frac{tE}{4A(1-\nu^2)} \delta u_i^\alpha \left[ \nu b_i^\alpha b_l^\beta u_l^\beta + \gamma b_j^\alpha (b_j^\beta u_i^\beta + b_i^\beta u_j^\beta) \right]. \end{aligned}$$

Jako příklad rozepíšeme první řádek matice tuhosti odpovídající virtuálnímu uzlovému posunu  $\delta u_1^1$ , který je shodný s virtuálním posunem  $\delta u_1$  v maticovém zápisu. Ve vztahu (3.52) položíme  $i = 1$ ,  $\alpha = 1$ , ostatní indexy jsou sčítací. Po malé úpravě využívající vzorců (3.50) bude první řádek matice tuhosti vyjádřen takto (srov. [54]):

$$D\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}\},$$

kde

$$\begin{aligned} a_{11} &= y_{23}^2 + \gamma x_{32}^2, & a_{12} &= \nu y_{23} x_{32} + \gamma x_{32} y_{23}, \\ a_{13} &= y_{23} y_{31} + \gamma x_{32} x_{13}, & a_{14} &= \nu x_{13} y_{23} + \gamma x_{32} y_{31}, \\ a_{15} &= y_{23} y_{12} + \gamma x_{32} x_{21}, & a_{16} &= \nu x_{21} y_{23} + \gamma x_{32} y_{12}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{tE}{4A(1-\nu^2)}.$$

Předchozí řešení byl odvozeno za předpokladu lineárně pružného izotropního materiálu. Jiné materiálové modely, které jsme popsali v první kapitole, se do výpočtu zavedou prostřednictvím jejich matice (tenzoru) materiálové tuhosti.

### 3.5.2 Izoparametrický bilineární čtyřúhelníkový prvek

Jak již bylo uvedeno v článku 3.1, jsou posuny aproximovány u izoparametrických prvků stejně jako geometrie. Platí tedy

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i v_i.$$

Pro snazší zápis sestavme uzlové posuny do dvou vektorů

$$\mathbf{r}_u^T = \{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}, \quad \mathbf{r}_v^T = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}.$$

Geometrické rovnice pro zvolenou bilineární aproximaci lze snadno zapsat s využitím (3.16)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{r}_u^T \mathbf{X} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{r}_v^T \mathbf{Y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{r}_u^T \mathbf{Y} + \mathbf{r}_v^T \mathbf{X}. \end{aligned}$$



Jestliže seskupíme všechny uzlové posuny do jediného vektoru  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}^T = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 \},$$

vztah mezi  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\mathbf{r}$  lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{r},$$

kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 \\ Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & Y_3 & X_3 & Y_4 & X_4 \end{bmatrix}.$$

Matice tuhosti se potom vypočte ze vztahu

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t J d\xi d\eta,$$

kde  $t$  je tloušťka prvku.

Výpočet se provede Gaussovou numerickou integrací, což lze formálně zapsat následujícím způsobem (viz Dodatek B) :


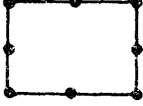


$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_j) t(\xi_i, \eta_j) J(\xi_i, \eta_j). \quad (3.53)$$

Pro bilineární prvek vyhovuje řád integrace  $N = 2$ . Pokud se tvar čtyřúhelníku výrazně liší od obdélníkového tvaru, je vhodné užít řád integrace  $N = 3$  (zejména kvůli proměně jacobíanu po prvku).

V článku 3.1 byly uvedeny tvarové funkce i pro vyšší prvky (bikvadratické). Většina programových systémů pro MKP v sobě zahrnuje vyšší izoparametrické prvky a poskytuje uživateli možnost výběru řádu integrace. V tabulce 3.3 jsou proto uvedena doporučení integrace pro některé typy rovinných izoparametrických prvků.

Dalším důležitým krokem je odvození vztahů pro výpočet vektoru transformovaného zatížení. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že zatížení  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$  působí pouze podél strany 1 - 2 (viz obr. 3.11). Pro posuny bodů této strany platí

$$u = \frac{1}{2}(1 + \xi)u_1 + \frac{1}{2}(1 - \xi)u_2, \quad v = \frac{1}{2}(1 + \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 - \xi)v_2.$$

PRVEK	řád integrace		PRVEK	řád integrace	
	obvyklý	maximální		obvyklý	maximální
	2 x 2	2 x 2		2 x 2	3 x 3
	2 x 2	3 x 3		3 x 3	4 x 4

Tabulka 3.3: Doporučený řád integrace

O zatížení budeme předpokládat, že jeho průběh mezi uzlovými body 1, 2 je

$$\bar{f}_x = \bar{f}_{x1} \frac{1}{2}(1 + \xi) + \bar{f}_{x2} \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \bar{f}_y = \bar{f}_{y1} \frac{1}{2}(1 + \xi) + \bar{f}_{y2} \frac{1}{2}(1 - \xi).$$

Odpovídající vektor transformovaného zatížení se vypočte podle vztahu (1.197). Po dosazení

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{x1}(1 + \xi) + \bar{f}_{x2}(1 - \xi) \\ \bar{f}_{y1}(1 + \xi) + \bar{f}_{y2}(1 - \xi) \end{Bmatrix}$$

a po integraci vyjde vektor transformovaného zatížení

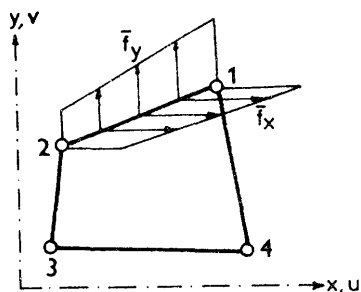
$$\mathbf{R}_p^T = \frac{l_{12}}{6} \{ 2\bar{f}_{x1} + \bar{f}_{x2}, 2\bar{f}_{y1} + \bar{f}_{y2}, \bar{f}_{x1} + 2\bar{f}_{x2}, \bar{f}_{y1} + 2\bar{f}_{y2}, 0, 0, 0, 0 \},$$

kde  $l_{12}$  je délka zatížené strany prvku.

Výpočet prvků vektoru transformovaného zatížení  $\mathbf{R}_p$  od objemových sil a od účinků teploty se vypočte podle (1.197) numerickou integrací. K tomu je třeba jen dodat, že kompletní matice  $\mathbf{N}$  má potom tvar

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix},$$

kde  $N_1$  až  $N_4$  jsou interpolační funkce z tab. 3.1.



Obr. 3.11: Zatížení strany prvku

### 3.5.3 Modifikovaný čtyřúhelníkový prvek

Probereme tři modifikace, z nichž ani jedna nenaruší "vnější vzhled" prvku. Modifikovaný prvek bude mít opět osm stupňů volnosti - po dvou v každém uzlu. Takže modifikace se fakticky dotkne pouze způsobu vyjádření členů matice tuhosti a v některých případech členů vektoru transformovaného zatížení.

První modifikace spočívá v použití selektivní integrace, která teoreticky souvisí se zavedením podmínky konstantního smykového přetvoření po prvku. Tato modifikace má vliv na řešení rovinných úloh, kde převládá vliv normálového napětí; jedná se tedy v podstatě o konstrukce, které svým charakterem připomínají nosníky. V jiných případech tato úprava nepřináší zhoršení. Modifikace spočívá v tom, že při integraci matice tuhosti použijeme pro všechny členy Gaussovu integraci v  $2 \times 2$  bodech, kromě členu  $G\gamma_{xy}^2$ , kde aplikujeme pouze jednobodovou integraci. To můžeme algoritmicky nejjednoduššeji vyřešit tak, že položíme hodnotu smykové deformace v Gaussových bodech (při integraci v  $2 \times 2$  bodech) rovnou hodnotě smykové deformace v bodě  $\xi = \eta = 0$ . Označme

$$\left. \begin{aligned} X_{i+4} &= X_i(\xi, \eta) \\ Y_{i+4} &= Y_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}, \quad \xi = \eta = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3.54)$$

Maticе  $\mathbf{B}$  se na základě toho změni na tvar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 \\ Y_5 & X_5 & Y_6 & X_6 & Y_7 & X_7 & Y_8 & X_8 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

S takto upravenou maticí  $\mathbf{B}$  můžeme počítat podle stejného algoritmu jako u nemodifikované matice tuhosti.

Nebudeme zde podrobně analyzovat teoretické aspekty souvislosti redukované integrace s rozšířeným Lagrangeovým principem, nýbrž dokážeme totožnost obou postupů pouze pro bilineární prvek. Za tím účelem zavedeme následující označení

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y \}^T = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{r}, & \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \{ \sigma_x, \sigma_y \}^T, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathbf{B}_\gamma \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

V Lagrangeově principu vycházíme z potenciální energie

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_\gamma^T G \mathbf{B}_\gamma d\Omega \mathbf{r} \\ &- \mathbf{r}^T \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma - \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Úlohu MKP řešíme z podmínky nulové variace, která se v případě diskretizované soustavy redukuje na podmínku  $\partial \Pi / \partial \mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Rozepsáním této podmínky obdržíme vyjádření

$$\left[ \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_\gamma^T G \mathbf{B}_\gamma d\Omega \right] \mathbf{r} = \mathbf{R}_p. \quad (3.58)$$

Matici tuhosti získáme integrací členů v hranaté závorce. Použijeme-li redukovanou integraci, znamená to, že první integrál vypočteme pomocí Gaussovy integrační formule s  $2 \times 2$ , eventuálně  $3 \times 3$  body. Druhý člen oproti tomu vypočteme pouze pomocí jednobodové integrace:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_\gamma^T G \mathbf{B}_\gamma d\Omega = t A \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)}^T G \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)}, \quad (3.59)$$

kde  $\mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)}$  znamená, že se jedná o vektor  $\mathbf{B}_\gamma$ ,  
 vyjádřený v bodě  $\xi = 0, \eta = 0$ ,  
 $t$  je tloušťka, definovaná pro rovinnou úlohu výše,  
 $A$  je plošný obsah prvku.

Tím jsme maticovou formou zapsali redukovanou integraci. Připomeňme, že se jednalo o Lagrangeův princip, z čehož mimo jiné plyne, že jsou à priori splněny geometrické rovnice.

Zavedme nyní nezávislou funkci  $\gamma$  prostřednictvím vedlejší podmínky

$$\gamma - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

a předpokládejme, že  $\gamma$  je po prvku konstantní. Posuny  $u, v$  mají bilineární aproximaci, stejnou jako u nemodifikovaného prvku. Nový funkcionál má tvar

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{r} + \frac{1}{2} \gamma t A G \gamma - \int_{\Omega} G \gamma \left[ \gamma - \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ &- \mathbf{r}^T \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma - \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Roznásobením a dosazením z (3.56) obdržíme

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \mathbf{r} - \frac{1}{2} \gamma t A G \gamma + \int_{\Omega} G \gamma \mathbf{B}_{\gamma} d\Omega \mathbf{r} \\ &- \mathbf{r}^T \int_{\Gamma_p} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} d\Gamma - \mathbf{r}^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Podmínky extrémů jsou dvojího typu:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega + \int_{\Omega} G \gamma \mathbf{B}_{\gamma}^T d\Omega &= \mathbf{R}_p, \\ -t A G \gamma + G \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\gamma} d\Omega \mathbf{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pomocí druhé rovnice (3.62) můžeme vyloučit  $\gamma$ . Povšimněme si přitom integrálu z funkce  $\mathbf{B}_{\gamma}$ . Tato funkce je v obou proměnných nejvýše lineární. Abychom dostali přesnou hodnotu integrálu, postačuje použít jednobodovou Gaussovu integraci. Tudíž platí

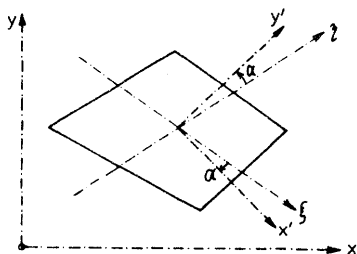
$$-t A G \gamma + G t A \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)} \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \gamma = \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)} \mathbf{r}. \quad (3.63)$$

Dosadíme-li tento výsledek do první z rovnic (3.62), obdržíme podmínku rovnováhy na prvku ve tvaru

$$\left[ \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega + G t A \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)}^T \mathbf{B}_{\gamma(\xi=\eta=0)} \right] \mathbf{r} = \mathbf{R}_p. \quad (3.64)$$

Tím jsme ale dospěli ke stejnému vyjádření podmínek rovnováhy na prvku jako v (3.58) a (3.59). Z toho vyplývá, že pro tento speciální případ (konstantní smyk a bilineární posuny  $u, v$ ) je selektivní integrace totožná s postupem, odvozeným z obecnějšího variačního principu<sup>3</sup>.

Uvedená formulace však není invariantní vzhledem k pootočení soustavy souřadnic. K eliminaci tohoto jevu se výpočet matice tuhosti provede v lokální soustavě souřadnic  $(x', y')$ , která je znázorněna na obr. 3.12. Poloha os  $x', y'$  se odvozuje od os  $\xi, \eta$  a to tak, že osa  $x'$  svírá s osou  $\xi$  stejný



Obr. 3.12: Zavedení lokální soustavy souřadnic

úhel jako osa  $y'$  s osou  $\eta$ . Vypočtená matice tuhosti se obvyklým způsobem transformuje do globální soustavy souřadnic.

Druhá modifikace spočívá v zavedení dalších stupňů volnosti pomocí tzv. *hierarchické bublinové funkce*. Obdobný přístup uplatníme při modifikaci čtyřúhelníkového deskového prvku v odstavci 3.6.5. O hierarchických funkcích je podrobněji pojednáno v desáté kapitole. Bublinová funkce má v souřadnicové soustavě  $(\xi, \eta)$  vyjádření  $(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$ . To znamená, že má nulovou hodnotu na stranách prvku a hodnotu 1 v aritmetickém středu prvku, tj. v bodě  $\xi = 0, \eta = 0$ . Pomocí této funkce můžeme opravit aproximaci funkcí  $u, v$  tímto způsobem:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \Delta u, \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i + (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \Delta v. \end{aligned} \quad (3.65)$$

<sup>3</sup>Při vyšších typech prvků to obecně neplatí. U vyšších (např. kvadratických) izoparametrických prvků není rovněž selektivní integrace tak účinná.

Označme

$$N_c = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

Potom

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{\partial N_c}{\partial y} = -\frac{2}{J} \left[ (1 - \xi^2)\eta \frac{\partial x}{\partial \xi} - (1 - \eta^2)\xi \frac{\partial x}{\partial \eta} \right], \\ X_c &= \frac{\partial N_c}{\partial x} = \frac{2}{J} \left[ (1 - \xi^2)\eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - (1 - \eta^2)\xi \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

O dva stupně volnosti se rozšíří vektor  $\mathbf{r}$ . Označíme jej

$$\mathbf{r}_c = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, \Delta u, \Delta v \}^T. \quad (3.67)$$

Matice  $\mathbf{B}$  má pro tento pětibodový čtyřúhelníkový prvek tvar

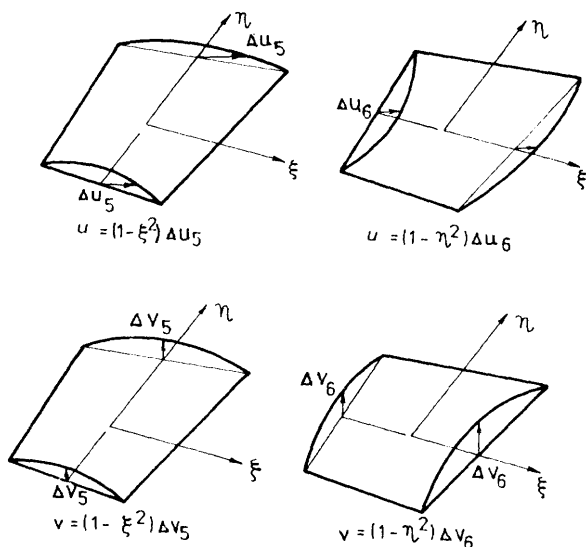
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 & 0 & X_c & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 & 0 & Y_c \\ Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & Y_3 & X_3 & Y_4 & X_4 & Y_c & X_c \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Pokud současně zavedeme obě předcházející modifikace, tj. i předpoklad konstantního smyku uvnitř prvku, matice  $\mathbf{B}$  bude mít následující tvar

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 & 0 & X_c & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 & 0 & Y_c \\ Y_5 & X_5 & Y_6 & X_6 & Y_7 & X_7 & Y_8 & X_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

V důsledku druhé modifikace se matice tuhosti zvětšila z původního typu (8, 8) na typ (10, 10). Avšak na první pohled je zřejmé, že stupně volnosti  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  jsou vnitřními stupni volnosti, takže je můžeme vyloučit (kondenzace, viz čl. 2.5). Díky tomu ani tato druhá modifikace nezpůsobí původnímu čtyřúhelníkovému prvku žádnou "kosmetickou vadu".

Třetí modifikace spočívá v zavedení aproximačních funkcí, které na hranici mezi prvky porušují podmínku spojitosti posunů, tzv. *nekompatibilních funkcí*. Lze dokázat, že v některých případech takový model konverguje ke správnému řešení, i když ne monotónně. Tvar nekompatibilních funkcí pro rovinnou úlohu je patrný z obr. 3.13. Pro každou z funkcí  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  jsou zavedeny dvě nekompatibilní aproximační funkce (módy) a to jako kvadratické



Obr. 3.13: Nekompatibilní aproximační funkce

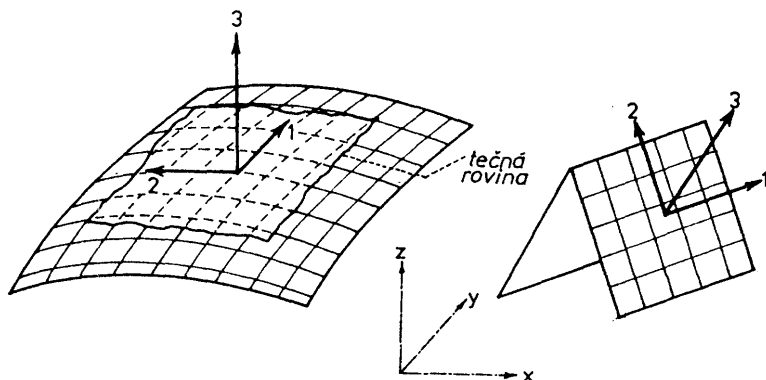
paraboly ve směru  $\xi$  a  $\eta$ . Lze ukázat, že čtyřúhelníkový prvek s nekompatibilními módy splňuje klasický patch test, jestliže má tvar obdélníka nebo rovnoběžníka. Rovinný prvek s nekompatibilními módy poskytuje velmi dobré výsledky při modelování ohybu, jak je patrné z tab.3.4. V [33] je popsána Taylorova úprava, která zajišťuje splnění patch testu i pro obecný čtyřúhelníkový prvek. Naše dosavadní zkušenosti s tímto prvkem však nejsou nejlepší.

### 3.5.4 Rovinný prvek s rotačními stupni volnosti

Rovinný izoparametrický prvek má v každém uzlovém bodě dva stupně volnosti - posuny  $u, v$ . To komplikuje algoritmus řešení plochých skořepin a lomenic pomocí rovinných stěnodeskových prvků. Ty jsou vytvořeny prostým složením stěnového a deskového prvku. Deska má v každém uzlu tři stupně volnosti -  $w, \varphi_x, \varphi_y$ . Při použití klasického izoparametrického stěnového prvku je tudíž v každém uzlu tuhost přiřazena pouze pěti stupňům volnosti. Drtivá většina programů pro analýzu prostorových plošných konstrukcí má v každém uzlu 6 stupňů volnosti - tři posuny a tři pootočení. Problém lze řešit tak, že zmíněné stupně volnosti se v každém uzlu vztáh-



nou k lokální soustavě souřadnic (1, 2, 3), kde osy 1, 2 leží v tečné rovině ke střednicové ploše prostorové plošné konstrukce - viz obr. 3.14.



Obr. 3.14: Lokální soustava souřadnic v tečné rovině plošné konstrukce

Uvedený postup přináší určité topologické problémy, vede ale k redukci celkového počtu stupňů volnosti, neboť pootočení okolo lokální osy 3 není přiřazena žádná (v případě lomenice) nebo velmi malá (v případě velmi ploché skořepiny) tuhost. Tento stupeň volnosti se tudíž vyloučí a v uzlovém bodě zbývá pouze 5 stupňů volnosti.<sup>4</sup>

Stěnodeskové prvky vytvořené výše popsaným způsobem vykazují určitou nelogičnost - ohybové chování je často popsáno lépe než membránové chování. Dobře navržená plošná konstrukce však převážnou většinu zatížení přenáší membránovými silami. Aproximace membránových sil se projeví rozhodujícím způsobem ve stabilitní analýze plochých skořepin (devátá kapitola). Je pozoruhodné, že vážná snaha o odstranění zmíněného nedostatku se projevila až v osmdesátých letech, kdy byly navrženy první stěnové prvky, které mají v každém uzlovém bodě kromě dvou posunových stupňů volnosti i pootočení [1, 52, 17, 34]. Zde uvedené dva typy prvků jsou založené na

- tzv. volné formulaci [17]
- na zobecněném variačním principu [34].

<sup>4</sup>Postup je v případě lomenic zcela korektní, v případě ploché skořepiny zavádí však určité ztuzení, neboť je zamezeno pootočení okolo lokální osy 3.

### Volná formulace

Postup popsáný dále byl navržen Berganem a Nygardem [17] a představuje alternativní přístup k MKP. Využívá skutečnosti, že je možné vytvořit membránový prvek s rotačními stupni volnosti v uzlech, který splňuje *a priori patch test* a má dobré vlastnosti při modelování rovinných konstrukcí nosníkového typu namáhaných ohybem (in-plane bending). Navržený přístup k odvození prvku se nazývá *volná formulace* (free formulation). Odlišuje se od postupů založených na variačních přístupech tím, že nevyžaduje pro zajištění konvergence plnou spojitost (kompatibilitu) mezi sousedními prvky. Vychází z upraveného *patch testu*.

Patch test je standardním postupem při zjišťování, zda nekonformní prvek splňuje podmínky konvergence (viz [43]). Bergan a Hanson v [17] formulovali postup ekvivalentní *patch testu* ve tvaru lineárních omezujících podmínek, které jsou aplikovány přímo na testovanou matici tuhosti. Po le posunů, odpovídající jak přemístění prvku jako tuhého tělesa tak stavu konstantní deformace, lze vyjádřit takto

$$u = N_r q_r + N_c q_c, \quad (3.70)$$

kde

$N_r$  je úplná soustava lineárně nezávislých tvarových funkcí (módů), reprezentujících přemístění prvku jakožto tuhého tělesa (3 módy),

$N_c$  je úplná soustava lineárně nezávislých módů, reprezentujících stavy konstantní deformace (3 módy),

$q_r, q_c$  jsou odpovídající zobecnělé souřadnice.

Vztah mezi zobecnělymi souřadnicemi  $q_r, q_c$  a uzlovými posuny  $r$  má tvar

$$r = G_r q_r + G_c q_c, \quad (3.71)$$

kde  $G_r, G_c$  se získá dosazením souřadnic uzlových bodů do  $N_r, N_c$ .

Podmínky (3.71) aplikujme na matici tuhosti konkrétního izolovaného prvku. První podmínka *patch testu* požaduje, aby módy  $q_r$  nevyvodily žádné uzlové síly. Tudíž

$$K G_r q_r = P_r q_r = O \Rightarrow K G_r = O. \quad (3.72)$$

$P_r$  je matice, jejíž sloupce představují uzlové síly od jednotlivých módů přemístění prvku jako tuhého tělesa.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Prvky vektoru zobecněných souřadnic mají tento význam -  $q_{r1}$  je posun ve směru osy  $x$ ,  $q_{r2}$  je posun ve směru osy  $y$ ,  $q_{r3}$  je pootočení okolo těžiště prvku.

Podmínka konstantního pole deformace vede ke stavu konstantního pole napětí po celém prvku, tedy i podél jeho stran. Jestliže zmíněná napětí nahradíme ekvivalentními (staticky, energeticky) uzlovými silami  $\mathbf{p}_c$ , potom lze druhý požadavek *patch testu* rovněž formulovat jako omezující podmínku aplikovanou na matici tuhosti. Musí platit

$$\mathbf{K} \mathbf{G}_c \mathbf{q}_c = \mathbf{p}_c = \mathbf{P}_c \mathbf{q}_c \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{G}_c = \mathbf{P}_c, \quad (3.73)$$

kde  $\mathbf{P}_c$  je matice, jejíž sloupce představují uzlové síly od jednotlivých módů stavu konstantní deformace. Omezující podmínky (3.72), (3.73) reprezentují *patch test*.

Volná formulace vychází z požadavku apriorního splnění *patch testu*. Vede k matici tuhosti, která je vytvořena ze dvou částí - ze základní matice tuhosti  $\mathbf{K}_b$  a z matice tuhosti příslušející tvarovým funkcím vyšších stupňů  $\mathbf{K}_h$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_h.$$

Cílem je získat membránový prvek, který má v každém uzlu kromě dvou posunových stupňů volnosti ještě třetí, kterým je pootočení okolo normály k rovině membránového prvku. Pootočení je definováno vztahem <sup>6</sup>

$$\varphi_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.74)$$

Takto definované pootočení je invariantní vzhledem k poloze soustavy souřadnic. Není ale totožné s pootočením stran prvku v uzlových bodech. Z toho důvodu je vztah mezi těmito veličinami vyjádřen prostřednictvím parametru  $\alpha$

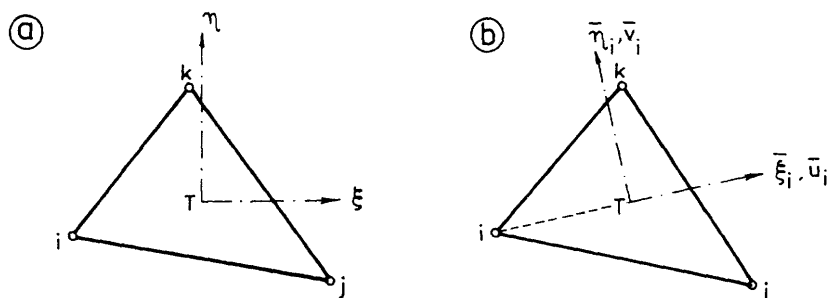
$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \alpha.$$

Ukázalo se, že pro  $\alpha$  větší než 1 dojde k podstatnému zlepšení *ohybového chování* prvku. Je však třeba poznamenat, že  $\alpha$  musí být stejné pro všechny prvky, aby nebyla porušena druhá podmínka *patch testu*.

Pro trojúhelníkový prvek podle obr. 3.15a jsou matice interpolačních funkcí, které splňují uvedené požadavky, dány vztahy

$$\mathbf{N}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

<sup>6</sup>Podrobnější výklad je uveden v následujícím odstavci.



Obr. 3.15: Trojúhelníkový prvek pro volnou formulaci

Základní matici tuhosti lze získat přímo pomocí matice tuhosti materiálu  $\mathbf{D}$  a transformační matice  $\mathbf{L}$ , která transformuje konstantní napětí podél stran prvku na ekvivalentní uzlové síly. Platí

$$\mathbf{K}_b = \frac{1}{A} \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T, \quad (3.76)$$

kde  $A$  je obsah trojúhelníkového prvku.

Tvar matice transformace  $\mathbf{L}$  závisí na zvolené aproximaci posunů podél jednotlivých stran prvku. V [17] je pro posuny stran použita nosníková interpolace, tj. pro posun kolmo ke straně kubický a pro posun podél strany lineární polynom.

Transformační matice  $\mathbf{L}$  má potom tvar

$$\mathbf{L}^T = \{\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3\}, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{L}_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{kj} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ \frac{1}{6} \alpha (y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \frac{1}{6} \alpha (x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & \frac{1}{3} \alpha (x_{ij} y_{ji} - x_{jk} y_{kj}) \end{bmatrix},$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j.$$

Pro  $\alpha = 0$  se po dosazení do (3.76) získá matice tuhosti trojúhelníkového prvku CST (constant strain triangle).

Matice tuhosti vyššího stupně se obdrží na základě interpolace (3.75), rozšířené o

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_h \mathbf{q}_h = \mathbf{N}_{h1} \mathbf{q}_{h1} + \mathbf{N}_{h2} \mathbf{q}_{h2} + \mathbf{N}_{h3} \mathbf{q}_{h3}. \quad (3.78)$$

Interpolace  $\mathbf{N}_{hi}$  představují čistý ohyb v soustavě souřadnic  $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i$ , kde  $\bar{\xi}_i$  se měří ve směru těžnice trojúhelníkového prvku, příslušné k  $i$ - tému uzlovému

bodů,  $\bar{\eta}_i$  je souřadnice ve směru kolmém k příslušné těžnici, jak je patrné z obr. 3.15b. V lokální soustavě souřadnic  $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$  je

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \left\{ \begin{array}{c} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i \\ -\frac{1}{2} \bar{\xi}_i^2 \end{array} \right\} q_{hi}.^7 \quad (3.79)$$

Celkově lze tedy pro pole posunů psát

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_r \mathbf{q}_r + \mathbf{N}_c \mathbf{q}_c + \mathbf{N}_h \mathbf{q}_h. \quad (3.80)$$

Obdobně jako v (3.71) platí

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_h \end{array} \right\} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_c \\ \mathbf{H}_h \end{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{H} \mathbf{r}. \quad (3.81)$$

Matrice tuhosti  $\mathbf{K}_h$  se vypočte následujícím způsobem :

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{H}_h^T \mathbf{K}_{qh} \mathbf{H}_h, \quad \text{kde } \mathbf{K}_{qh} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_h^T \mathbf{D} \mathbf{B}_h d\Omega \quad (3.82)$$

a  $\mathbf{B}_h$  je matice, která váže vektor deformací s vektorem  $\mathbf{q}_h$ .

Kromě parametru  $\alpha$  může být ve *volné formulaci* zaveden další parametr  $\beta$  tak, že

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \beta \mathbf{K}_h. \quad (3.83)$$

Vyplývá to z faktu, že *volná formulace* splňuje *patch test* pro libovolnou matici vyššího stupně. Pouze je třeba zajistit, aby matice tuhosti vyššího stupně měla správnou hodnotu. Je to současně záruka, že výsledná matice  $\mathbf{K}$  nebude mít falešný mód, s kterým není svázána žádná energie (tzv. free energy mode). Optimální volba parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  vede k velmi dobrým vlastnostem prvku. Podrobnosti, včetně přehledného programu, který lze bez úprav využít, lze nalézt v [17]. Doporučená hodnota parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  je

$$\alpha = 1.5, \quad \beta = 0.5.$$

Porovnání s jinými membránovými prvky je uvedeno dále.

<sup>7</sup>Derivací (3.79) se lze snadno přesvědčit, že relativní prodloužení ve směru osy  $\xi_i$  má lineární průběh a že smykové zkosení vzhledem k osám  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  je nulové.

### Prvek založený na zobecněném variačním principu

Nový přístup je založen na variační formulaci, která zavádí nezávislé pole rotací a využívá antisymetrickou část tenzoru napětí a antisymetrickou část gradientu deformace. Základní myšlenka pochází od Reissnera [61]. Aplikací v MKP a otázkou stability diskrétního řešení se zabývali Hughes a Brezzi [34]. Dále uvedená formulace byla popsána v [40] a využívá Allmannových interpolačních funkcí [1]. Pro zjednodušení výkladu bude zpočátku použit tenzorový, později maticový zápis a nebudou diskutovány okrajové podmínky.

Úloha je popsána následujícími rovnicemi :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j} + \bar{X}_i &= 0 && \text{(silové podmínky rovnováhy)} \\
 \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) &= 0 && \text{(momentové podmínky rovnováhy)} \\
 \omega_k &= \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) && \text{(definice pootočení okolí bodu)} \\
 \text{sym } \sigma_{ij} &= D_{ijkl} \text{ (sym } u_{k,l}) && \text{(konstitutivní rovnice)}
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Oproti formulaci uvedené v čl. 1.6 se *à priori* nepředpokládá symetrie tenzoru napětí. Jelikož v MKP dáváme přednost maticovému zápisu, zavedme matice

$$\nabla = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \tag{3.85}$$

Poslední tři rovnice v (3.84) lze potom zapsat takto:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} - \tau_{zy} \\ \tau_{zx} - \tau_{xz} \\ \tau_{xy} - \tau_{yx} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \nabla \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{u}, \tag{3.86}$$

kde prvky vektoru  $\boldsymbol{\tau}$  jsou složkami antisymetrické části tenzoru napětí a  $\boldsymbol{\sigma}$  obsahuje složky symetrické části tenzoru napětí. Operátorová matice  $\boldsymbol{\theta}$  je definována vztahem (1.5).

Za předpokladu apriorního splnění konstitutivní rovnice ( $\sigma$  nejsou nezávislé), má výchozí funkcionál tvar

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial^T \mathbf{u})^T \mathbf{D} \partial^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^T (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \, d\Omega \\ &- \frac{1}{2} \gamma^{-1} \int_\Omega \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Omega - \int_\Omega \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{u} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.87)$$

kde  $\gamma$  je předem zvolená kvazimateriálová konstanta související s tuhostí materiálu. Funkcionál (3.87) vznikl rozšířením klasického energetického funkcionálu o energii napětí  $\boldsymbol{\tau}$  (třetí člen na pravé straně) a o práci  $\boldsymbol{\tau}$  na dislokacích  $(\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega})$ , které vznikají v důsledku nezávislosti polí  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\omega}$ . Z podmínky stacionarity funkcionálu

$$\delta \Pi_\gamma = 0$$

se získají první tři rovnice (3.84) jakožto Eulerovy rovnice. Vzhledem k tomu, že v (3.87) se vyskytují kromě posunů i napětí, získá se diskretizací *smíšený typ prvku*.

Kdybychom vyloučili  $\boldsymbol{\tau}$  pomocí kvazikonstitutivní rovnice

$$\frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\tau} = \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}, \quad (3.88)$$

z níž je patrný význam konstanty  $\gamma$ , získali bychom funkcionál

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial^T \mathbf{u})^T \mathbf{D} \partial^T \mathbf{u} \, d\Omega + \frac{1}{2} \gamma \int_\Omega (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega})^T (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) \, d\Omega \\ &- \int_\Omega \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{u} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.89)$$

který vede k posunovému modelu<sup>8</sup>. Uvedené dva funkcionály jsou obdobou zavedení nezávislého  $\gamma_{xy}$  v izoparametrickém rovinném prvku, jak bylo uvedeno v předcházejícím odstavci.

Konstanta  $\gamma$ , která se vyskytuje v rovnicích (3.87) až (3.89), je závislá na řešení problému. Hughes a Brezzi dokázali [34], že v případě izotropního

<sup>8</sup>První integrál v (3.89) lze zapsat obvyklým způsobem

$$\int_\Omega (\partial^T \mathbf{u})^T \mathbf{D} \partial^T \mathbf{u} \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega.$$

V diskretní formulaci vede k obvyklé matici tuhosti klasického izoparametrického prvku.

materiálu a rovinné úlohy je optimální hodnota  $\gamma = G$  (smykový modul pružnosti). Numerické výpočty ukázaly, že výše uvedená formulace není citlivá na volbu hodnoty  $\gamma$ . Doporučuje se však volit ji rovnou  $G$  i pro ortotropní materiály.

### Výpočet matice tuhosti, interpolační funkce pro čtyřúhelníkový prvek

Matice tuhosti bude odvozena na základě funkcionálu (3.87) pro rovinnou úlohu. Pro jednotlivé funkce vystupující v (3.87) se použije následující interpolace :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i + N_c \Delta u + \sum_{I=5}^8 N_I \frac{l_{JK}}{8} (\omega_K - \omega_J) \cos \alpha_{JK}, \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i + N_c \Delta v + \sum_{I=5}^8 N_I \frac{l_{JK}}{8} (\omega_K - \omega_J) \sin \alpha_{JK}, \\ \omega_z &= \omega = \sum_{i=1}^4 N_i \omega_i \\ \tau &= \frac{1}{2} (\tau_{xy} - \tau_{yz}) = \tau_0 = \text{konst..} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Pro funkce  $N_1 \dots N_8$  platí vztahy z tab. 3.1, přičemž pro funkce  $N_1 \dots N_4$  se využije pouze silně zarámovaná část a  $N_5 \dots N_8$  se vezmou bez koeficientu 0.5. Hierarchické stupně volnosti  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  se vyloučí v rámci kondenzace podobně jako v druhé modifikaci čtyřúhelníkového prvku.

Pro indexy  $J, K$  platí FORTRANové vyjádření

$$J = I - 4, \quad K = \text{mod}(I, 4) + 1$$

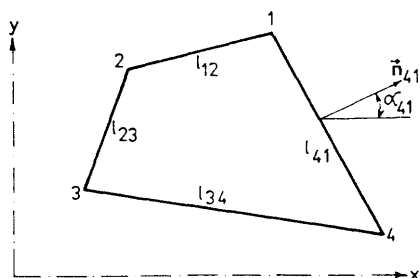
Druhý člen ve výrazech pro  $u, v$  je převzatý od Allmana, který jej získal při řešení ohybu nosníku (jeho odvození je uvedeno v souvislosti s modifikovaným deskovým prvkem v odst. 3.6.5). Podle obr. 3.16 značí  $l_{JK}$  délku strany prvku  $JK$  a  $\alpha_{JK}$  je úhel, který svírá příslušná normála s osou  $x$ . Označme

$$\partial^T \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{r}_u + \mathbf{G} \mathbf{r}_\omega, \quad (3.91)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u^T &= \{u_1, v_1, \dots, u_4, v_4, \Delta u, \Delta v\}, \\ \mathbf{r}_\omega^T &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$





Obr. 3.16: Prvek založený na obecném variačním principu

Matice  $\mathbf{B}$  je uvedena v odst. 3.5.3. Prvky v  $I$ -tém sloupci matice  $\mathbf{G}$  jsou vyjádřeny takto :

$$\begin{aligned}
 g_{1I} &= \frac{1}{8} \left( l_{IJ} \cos \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial x} - l_{IK} \cos \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial x} \right), \\
 g_{2I} &= \frac{1}{8} \left( l_{IJ} \sin \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial y} - l_{IK} \sin \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial y} \right), \\
 g_{3I} &= \frac{1}{8} \left( l_{IJ} \cos \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial y} - l_{IK} \cos \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial y} \right. \\
 &\quad \left. + l_{IJ} \sin \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial x} - l_{IK} \sin \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial x} \right),
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

kde pro indexy  $M, L, K, J$  platí FORTRANový zápis

$$M = I + 4, \quad L = M - 1 + 4 \operatorname{aint}(1/I), \quad K = \operatorname{mod}(M, 4) + 1, \quad J = L - 4.$$

Dále uvažme, že ve dvourozměrné úloze se výraz  $(\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega})$  redukuje na tvar

$$-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_z = \mathbf{a}^T \mathbf{r}_u + \mathbf{f}^T \mathbf{r}_\omega, \tag{3.94}$$

kde

$$\mathbf{a}^T = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_1}{\partial x}, \dots, -\frac{\partial N_c}{\partial y}, \frac{\partial N_c}{\partial x} \right\}. \tag{3.95}$$

Pro  $I$ -tý prvek vektoru  $\mathbf{f}$  platí ( $I = 1, 2, 3, 4$ )

$$\begin{aligned} f_I = & - \frac{1}{16} \left( l_{IJ} \cos \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial y} - l_{IK} \cos \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{16} \left( l_{IJ} \sin \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial x} - l_{IK} \sin \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial x} \right) - N_I. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Diskrétní formulace založená na funkcionálu (3.87) může být zapsána takto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & -\gamma^{-1}\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \tau_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.97)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} [\mathbf{B}, \mathbf{G}]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}, \mathbf{G}] d\Omega, \\ \mathbf{h}^T &= \int_{\Omega} \{\mathbf{a}^T, \mathbf{f}^T\} d\Omega, \quad \mathbf{r}^T = \{\mathbf{r}_u^T, \mathbf{r}_\omega^T\}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Konstanta  $\tau_0$  se vyloučí *statickou kondenzací*, což vede k vyjádření

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{r} = \mathbf{R}, \quad \text{kde } \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\Omega} \mathbf{h} \mathbf{h}^T. \quad (3.99)$$

Podobně lze odvodit diskrétní formulaci na základě funkcionálu (3.89). Pro  $\hat{\mathbf{K}}$  potom platí

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}^*, \quad (3.100)$$

kde

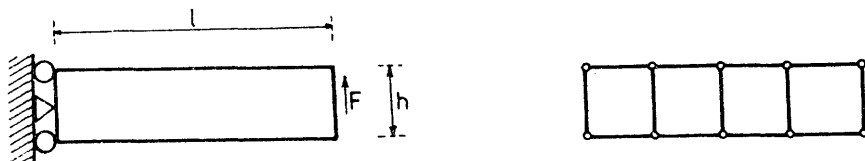
$$\mathbf{K}^* = \gamma \int_{\Omega} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{f}} \right\} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{f}} \right\}^T d\Omega. \quad (3.101)$$

Integrály v (3.98) se počítají numericky užitím Gaussovy integrační formule. Matice  $\mathbf{K}$  se integruje v  $3 \times 3$  bodech a matice  $\mathbf{K}^*$  v 1 bodě. Pro obdélníkové prvky tak obě výše uvedené formulace vedou k identickým výsledkům. U obecného čtyřúhelníku se výsledky mírně liší. Je to důsledkem skutečnosti, že při redukované integraci se v integrálu (3.101) neuplatní vliv bublinové funkce.

**Příklad 3.1** Aby si bylo možné učinit představu o kvalitě jednotlivých membránových prvků, jsou porovnány výsledky analýzy konzoly znázorněné na obr. 3.17, kde jsou uvedeny jednak geometrické a materiálové charakteristiky a potom dělení na prvky.

Řešení:

Výpočet byl proveden pomocí

Obr. 3.17: Testovací konzola ( $h=12$ ,  $l=48$ ,  $\nu=0.25$ ,  $F=40$ ,  $E=30000$ )

- bilineárního izoparametrického prvku (LIZ)
- bilineárního izoparametrického prvku s nekompatibilními módy (LIZN)
- bikvadratického izoparametrického prvku (BIZ)
- Berganova prvku s rotačními stupni volnosti (BEFE), kde čtyřúhelník je vytvořen ze dvou trojúhelníků
- Hughesova-Brezziho prvku s rotačními stupni volnosti (HUBR), uvedeného v tomto odstavci

Vypočtené hodnoty průhybů konce konzoly jsou uvedeny v následující tabulce: Za správné se bere řešení, získané pomocí kvadratického izoparametrického prvku

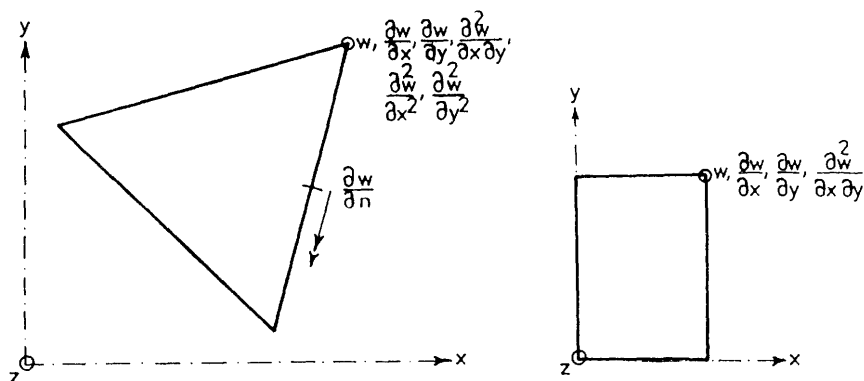
	LIZ	LIZN	BIZ	BEFE	HUBR
PRŮHYB	0.3112	0.3348	0.3557	0.3402	0.3445
% CHYBA	14.0	7.4	1.7	6.0	4.8
POČET STUPŇŮ VOLNOST	17	17	42	27	27

Tabulka 3.4: Porovnání membránových prvků

pro síť  $6 \times 10$  prvků.

### 3.6 Deskové prvky

Analýza desek a skořepin byla od počátku aplikace MKP jednou z nejčastěji řešených úloh. Zpočátku šlo výhradně o řešení tenkých desek na základě Kirchhoffovy teorie. Vycházelo se z klasického Lagrangeova principu. Vzhledem k požadavku  $C^1$  spojitosti (spojitost průhybu a obou derivací průhybu všude na hranici mezi sousedními prvky) měl nejjednodušší plně kompatibilní rovnoběžníkový prvek 16 stupňů volnosti (průhyb, derivace podle  $x$ , derivace podle  $y$  a druhá smíšená derivace v každém vrcholu prvku). Nejjednodušší trojúhelníkový prvek bez doplňujících geometrických vazeb dokonce 21 stupňů volnosti (šest v každém uzlu a jeden ve středu každé strany). Oba prvky jsou znázorněny na obr.3.18. Podrobnosti k těmto klasickým prvkům



Obr. 3.18: Schema kompatibilních prvků pro řešení tenkých desek

lze nalézt v [49]. Prvky poskytovaly při relativně malém počtu neznámých velmi dobré výsledky. Hlavní jejich nečteností však byly stupně volnosti příslušející vyšším derivacím, neboť pro ně neplatí jednoduché transformační vztahy. Kromě toho nezahrnovaly vliv smyku na deformaci.

Problém  $C^1$  spojitosti v souvislosti s řešením tenkých desek odstranil Herrmann [31] využitím Hellingerova-Reissnerova principu. Vznikl tak úplně nejjednodušší prvek pro řešení tenkých desek, který má pouze jeden stupeň volnosti v každém uzlu (průhyb) a jeden ve středu každé strany (moment ve směru normály  $M_n$ ). Lze sestavit obdélníkový i trojúhelníkový prvek. Podrobnosti lze nalézt v [3]. Tento postup je typickým představitelem *smíšené varianty MKP*. Ačkoliv zmíněné prvky poskytují velmi dobré výsledky, ve velkých programových balících se s nimi nesetkáme, neboť nevystačí s posunovými stupni volnosti.

Celá řada deskových prvků je založena na modifikovaných variačních principech [60]. Tyto prvky se nazývají hybridní a jsou dosud používány, zvláště při řešení lineárních úloh. Byly vyvinuty hybridní prvky založené jak na Kirchhoffově tak na Mindlinově teorii desek.

V následujících odstavcích jsou detailně zpracovány tři reprezentanti modernějšího pojetí analýzy deskových konstrukcí. Výběr reprezentantů je přirozeně subjektivní. K jejich přednostem patří robustnost, univerzálnost a jednoduchost.

Na deskové prvky můžeme pohlížet ze dvou hledisek. Z hlediska geometrie jsou podobně jako při řešení rovinné úlohy nejčastěji používány trojúhelníkové a izoparametrické čtyřúhelníkové prvky. Přednosti trojúhelníkových prvků se uplatní zvláště při řešení stěnodeskových konstrukcí a

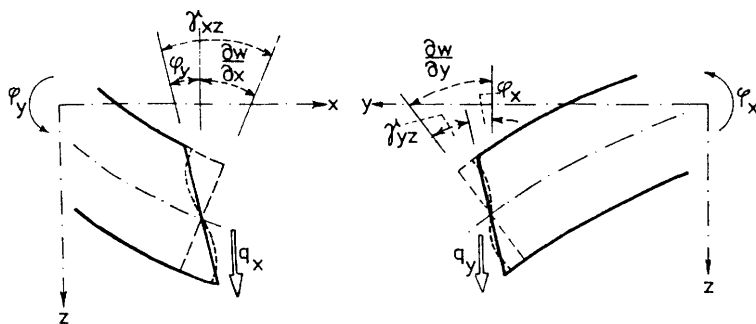
skořepin a hlavně při řešení nelineárních úloh. Izoparametrické prvky vyšších typů jsou zajímavé zejména pro desky se zakřivenou hranicí. Je totiž známo, že nepřesnosti vznikající z aproximace tvaru hranice jsou téhož řádu jako nepřesnosti plynoucí z aproximace neznámé funkce.

Z hlediska předpokladů o přetvoření přichází v úvahu *Kirchhoffova* teorie tenkých desek a *Mindlinova* teorie pro tlusté desky. Kirchhoffovu teorii i její variantu diskrétní Kirchhoffovu teorii lze považovat za zvláštní případ Mindlinovy teorie, které se proto budeme věnovat přednostně.

### 3.6.1 Mindlinova teorie tlustých desek

Mindlinova teorie je založena na následujících předpokladech (srov. odst. 2.1.1):

- rozdíl posunů krajních bodů desky ve směru osy  $z$  (stlačení desky) je vzhledem k absolutní hodnotě posunu  $w$  zanedbatelný
- normály ke střednicové rovině desky zůstávají i po deformaci přímé, nejsou však již kolmé ke střednicové ploše desky. Jsou proto nazývány pseudonormálami desky. Mindlinova teorie tedy zanedbává zborcení příčných řezů, jak je patrné z obr. 3.19
- normálové napětí  $\sigma_z$  je ve srovnání s napětími  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  malé, a proto se v energetické bilanci neuplatní.



Obr. 3.19: Předpoklady o přetvoření desky

Prvé dva předpoklady jsou ryze geometrické. Z prvního předpokladu plyne

$$w = w(x, y, z) \approx w(x, y). \quad (3.102)$$

Z druhého předpokladu vyplývá, že přemístění pseudonormály v prostoru (a tudíž také přemístění bodů, které na ní leží) lze popsat jako přemístění tuhého tělesa. Tuhé těleso má v prostoru šest stupňů volnosti - tři posuny a tři pootočení. Vzhledem k tomu, jak jsme definovali desku, jsou posuny  $u, v$  bodů střednicové plochy rovné nule. Vztáhneme-li parametry popisující přemístění pseudonormály k jejímu průsečíku se střednicovou rovinou, zbudou ze šesti stupňů volnosti pouze čtyři. Pseudonormála je však speciální tyč, která má příčný průřez o nulové ploše. Proto nemá smysl hovořit o pootočení této tyče okolo vlastní osy - tedy o pootočení  $\varphi_z$ . Zbývající tři stupně volnosti jsou posun pseudonormály ve směru osy  $z$ , který označíme  $w$ , a pootočení pseudonormály okolo souřadnicových os  $x$  a  $y$ , které označíme  $\varphi_x, \varphi_y$ . Kladná orientace těchto parametrů, které jsou funkcemi  $x, y$ , je na obr. 3.19. Z uvedeného vyplývá, že posun bodů pseudonormály (a tedy i bodů desky) je popsán vztahy

$$u(x, y) = z \varphi_y(x, y), \quad v(x, y) = -z \varphi_x(x, y), \quad w = w(x, y). \quad (3.103)$$

Pomocí (3.103) vyjádříme nenulové složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = z \kappa_x, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = z \kappa_y, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) = z \kappa_{xy}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

kde  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  jsou pseudokřivosti průhybové plochy. Nenulové složky tenzoru napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  se získají prostřednictvím fyzikálních rovnic.

Představme si desku rozřezanou paralelně se střednicovou rovinou na tenké vrstvičky. Podle třetího předpokladu ( $\sigma_z$  je velmi malé a tudíž se jeho vliv na deformaci zanedbává) je stav napětí v každé vrstvičce blízký rovinné napjatosti, která je charakterizována složkami napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

Matice tuhosti materiálu pro rovinnou napjatost je dána vztahem (3.41). Pomocí (3.104) můžeme psát (doplňili jsme vliv teplotních účinků)

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x - \varepsilon_0) + \nu(\varepsilon_y - \varepsilon_0)] \\
 &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) - \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0, \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_y - \varepsilon_0) + \nu(\varepsilon_x - \varepsilon_0)] \\
 &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \frac{E}{1-\nu} \varepsilon_0, \quad (3.105) \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \\
 \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Podobně jako v analýze prutů i v teorii desek mají základní význam integrální silové veličiny, tj. ohybové a kroutící momenty a posouvající síly. Jsou vztaženy na jednotku šířky kolmého řezu deskou a jsou proto nazývány měrnými silami nebo intenzitami vnitřních sil. Abychom tuto okolnost zdůraznili i formálně, budeme je značit malými písmeny.

Ohybové momenty  $m_x$ ,  $m_y$  a kroutící moment  $m_{xy}$  jsou definovány takto:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz, \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz, \quad m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz. \quad (3.106)$$

Podobně i posouvající síly

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \, dz, \quad q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \, dz. \quad (3.107)$$

Dosadíme z (3.105) do (3.106) a (3.107). Obdržíme odtud po integraci ve směru  $z$  vztah mezi intenzitami vnitřních sil a funkcemi  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  ve tvaru

$$\begin{aligned} m_x &= D \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) - \bar{m}_T, \\ m_y &= D \left( -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \bar{m}_T, \\ m_{xy} &= \frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \\ q_x &= k Gh \left( \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ q_y &= k Gh \left( -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.108)$$

kde

$$\bar{m}_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu} z \alpha T dz, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k = 5/6.$$

Rovnice pro  $q_x$ ,  $q_y$  jsou odvozeny za předpokladu, že zprůměrovaná smyková napětí po tloušťce desky  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  (srov. odst. 2.1.1) jsou energeticky ekvivalentní parabolickému průběhu těchto napětí.

Pro moment  $\bar{m}_T$  můžeme odvodit jednoduchý vzorec. Má-li být splněn základní geometrický předpoklad, že pseudonormála zůstane i po deformaci přímá, můžeme připustit pouze lineární průběh teploty po tloušťce desky. Označíme-li teplotu horního povrchu  $z = -\frac{h}{2}$  symbolem  $T_h$  a teplotu dolního povrchu  $z = \frac{h}{2}$  jako  $T_d$ , potom pro  $T$  platí

$$T = \frac{T_d + T_h}{2} + \frac{(T_d - T_h)}{h} z.$$

Protože první člen ve výrazu pro teplotu způsobuje pouze membránové síly, najdeme dosazením do (3.108)

$$\bar{m}_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu} z \alpha \frac{T_d - T_h}{h} z dz = \frac{Eh^2 \alpha}{12(1-\nu)} (T_d - T_h).$$

Desky se často vyskytují jako základové konstrukce. Je proto vhodné zahrnout do našich úvah i vliv pružného podloží. K modelování pruž-

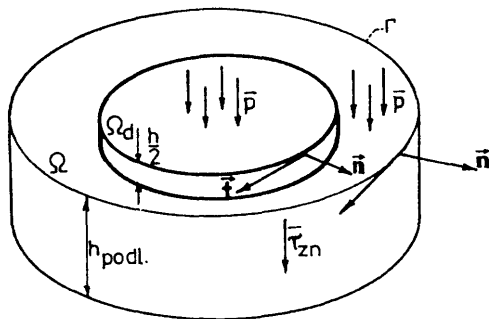


ného podloží použijeme Winklerův - Pasternakův model. Konstanty izotropního, homogenního podloží  $C_1, C_2$  se stanoví ze vzorců (2.26). Funkce  $\gamma_{xy} = z \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , které souvisejí se smykovými napětími v desce, nebudeme počítat z geometrických vztahů pomocí funkcí  $w, \varphi_x, \varphi_y$ , jež popisují přemístění pseudonormály. Budeme je považovat za další neznámé funkce a geometrické rovnice

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.109)$$

splníme v integrální formě tak, že je zavedeme jako vedlejší podmínky do funkcionálu energie.

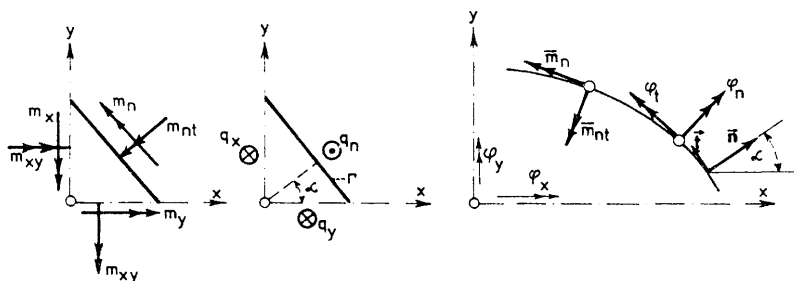
Sestavme nejprve výraz pro potenciální energii systému. Předpokládejme, že konstrukce desky je zatížena pouze spojitým zatížením o intenzitě  $\bar{p}$ . Kromě toho mohou být předepsány na hranici desky hodnoty ohybového momentu  $\bar{m}_n$ , krouticího momentu  $\bar{m}_{nt}$  a posouvající síly  $\bar{q}_n$ . Schéma systému deska - podloží je vyznačeno na obr. 3.20. Na dalším obrázku 3.21 jsou



Obr. 3.20: Deska na pružné vrstvě

vyznačeny kladně orientované intenzity vnitřních sil při pohledu na desku zdola, tj. proti ose  $z$ . Výraz pro potenciální energii systému můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} (m_x \kappa_x + m_y \kappa_y + m_{xy} \kappa_{xy} + q_x \gamma_{xz} + q_y \gamma_{yz}) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_d + \Omega} \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.110)$$



Obr. 3.21: Síly působící podél okraje desky

$$- \int_{\Omega_d + \Omega} \bar{p} w \, d\Omega - \int_{\Gamma_d} (\bar{m}_n \varphi_t - \bar{m}_{nt} \varphi_n + \bar{q}_n w) \, d\Gamma_d - \int_{\Gamma} \bar{q}_z w \, d\Gamma.$$

Po dosazení z (3.108) a po jednoduchých úpravách obdržíme

$$\Pi = \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + k G h \left[ \left( \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_d + \Omega} \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega_d + \Omega} \bar{p} w \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega_d} \bar{m}_T \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_d} (\bar{m}_n \varphi_t - \bar{m}_{nt} \varphi_n + \bar{q}_n w) \, d\Gamma_d \\ & - \int_{\Gamma} \bar{q}_z w \, d\Gamma, \end{aligned}$$

kde  $\bar{q}_z = \int_0^h \bar{\tau}_{zn} \psi \, dz$  je energeticky ekvivalentní výslednice smykových napětí na jednotku délky hranice pružného podloží.

Funkcionálu (3.111) využijeme pro řešení deskových konstrukcí MKP, avšak matici tuhosti z něj plynoucí vypočteme selektivní integrací. Zcela analogicky jako u nosníků bychom mohli dokázat, že v případě bilineární

aproximace  $\varphi_x, \varphi_y, w$  dává selektivní integrace stejné výsledky jako variační formulace, vycházející z obecnějšího variačního principu. Tuto formulaci, která vznikne rozšířením Lagrangeova principu o vedlejší podmínky, zajišťující přibližné splnění geometrických rovnic (3.109), uvedeme celou, neboť má obecnější platnost pro vyšší typy izoparametrických deskových prvků, které se často používají. Typickým představitelem je bikvadratický prvek s osmi uzlovými body. V důsledku nezávislosti funkcí  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  na funkcích  $\varphi_x, \varphi_y, w$  se změní některé z rovnic (3.108) tak, že

$$m_{xy} = \frac{1}{2}(1-\nu)D\kappa_{xy}, \quad q_x = kGh\gamma_{xz}, \quad q_y = kGh\gamma_{yz}. \quad (3.112)$$

Modifikovaný funkcionál má potom tvar

$$\begin{aligned} \Pi_m = & \quad (3.113) \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega_d} \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \kappa_{xy}^2 \right] \right. \\ & + kGh(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \left. \right\} d\Omega - \int_{\Omega_d} \left\{ \frac{1-\nu}{2} D\kappa_{xy} \left( \kappa_{xy} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right. \\ & + kGh \left[ \gamma_{xz} \left( \gamma_{xz} - \varphi_y - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma_{yz} \left( \gamma_{yz} + \varphi_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \left. \right\} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_d + \Omega} \left\{ C_1 w^2 + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega_d + \Omega} \bar{p} w d\Omega \\ & - \int_{\Omega_d} \bar{m}_T \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_d} (\bar{m}_n \varphi_t - \bar{m}_{nt} \varphi_n + \bar{q}_n w) d\Gamma_d \\ & - \int_{\Gamma} \bar{q}_z w d\Gamma. \end{aligned}$$

Abychom se přesvědčili, že podmínky stacionarity tohoto funkcionálu dávají všechny potřebné rovnice, vypočteme jeho variaci:

$$\delta \Pi_m = \quad (3.114)$$

$$\int_{\Omega_d} \left\{ D \left[ \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \nu \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) - \nu \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{1-\nu}{2} \kappa_{xy} \delta \kappa_{xy} \Big] \\
& \quad + k Gh (\gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \gamma_{yz} \delta \gamma_{yz}) \Big\} d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega_d} \left\{ \frac{1-\nu}{2} D \left( \kappa_{xy} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \delta \kappa_{xy} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1-\nu}{2} D \kappa_{xy} \left[ \delta \kappa_{xy} - \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + k Gh \left[ \left( \gamma_{xz} - \varphi_y - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \gamma_{xz} + \left( \gamma_{yz} + \varphi_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \gamma_{yz} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma_{xz} \left( \delta \gamma_{xz} - \delta \varphi_y - \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \gamma_{yz} \left( \delta \gamma_{yz} + \delta \varphi_x - \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \right] \right\} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega_d + \Omega} \left\{ C_1 w \delta w + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega_d + \Omega} \bar{p} \delta w d\Omega - \int_{\Omega_d} \bar{m}_T \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\
& \quad - \int_{\Gamma_d} (\bar{m}_n \delta \varphi_t - \bar{m}_{nt} \delta \varphi_n + \bar{q}_n \delta w) d\Gamma_d - \int_{\Gamma} \bar{q}_z \delta w d\Gamma.
\end{aligned}$$

Za integračními znaménky je třeba odstranit derivace ve variovaných funkcích. Toho lze dosáhnout pomocí Gaussovy věty.

Pro úpravu předchozího funkcionálu musíme znát dále transformační vztahy mezi parametry pootočení pseudonormály na hranici  $\Gamma$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
\varphi_x &= \varphi_n \cos \alpha - \varphi_t \sin \alpha, \\
\varphi_y &= \varphi_n \sin \alpha + \varphi_t \cos \alpha
\end{aligned}$$

a transformační vztahy pro hraniční síly na obr. 3.21

$$\begin{aligned}
m_n &= m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha, \\
m_{nt} &= \frac{m_y - m_x}{2} \sin 2\alpha + m_{xy} \cos 2\alpha, \\
q_n &= q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha,
\end{aligned}$$

kde  $\alpha$  je úhel, který svírá normála k hranici  $\Gamma$  s osou  $x$ .

S použitím fyzikálních rovnic (3.108) a (3.112) nakonec najdeme vyjádření variace funkcionálu  $\Pi_m$  tak, jak je uvedeno v tab. 3.5.

$$\begin{aligned}
& \delta \Pi_m = 0 \\
& = \int_{\Omega_d} \left\{ \left[ \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y \right] \delta \varphi_x \right. && \text{momentová podm.} \\
& + \left[ -\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + q_x \right] \delta \varphi_y && \text{momentová podm.} \\
& + \left[ -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + C_1 w - C_2 \Delta w - \bar{p} \right] \delta w && \text{silová podm. desky} \\
& + \left[ -\frac{1-\nu}{2} D \left( \kappa_{xy} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right] \delta \kappa_{xy} && \text{na pružném podloží} \\
& + \left[ k Gh \left( \gamma_{xz} - \varphi_y - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta \gamma_{xz} && \text{geometrické rovnice} \\
& + \left. \left[ k Gh \left( \gamma_{yz} + \varphi_x - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \delta \gamma_{yz} \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \{ C_1 w - C_2 \Delta w - \bar{p} \} \delta w d\Omega && \text{silová podmínka} \\
& + \int_{\Gamma_d} \{ [m_n - \bar{m}_n] \delta \varphi_t - [m_{nt} - \bar{m}_{nt}] \delta \varphi_n && \text{okrajové podmínky} \\
& + \left[ q_n + C_2 \left( \frac{\partial w^{(\Omega_d)}}{\partial n} - \frac{\partial w^{(\Omega)}}{\partial n} \right) - \bar{q}_n \right] \delta w \} d\Gamma_d && \text{na desce} \\
& + \int_{\Gamma} \left[ C_2 \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{q}_z \right] \delta w d\Gamma && \text{okrajová podmínka} \\
& && \text{na hranici podloží.}
\end{aligned}$$

Tabulka 3.5: Rovnice plynoucí z podmínky nulové variace energetického funkcionálu

### 3.6.2 Trojúhelníkový prvek DKT (Diskrete Kirchhoff Theory)

Formulace prvku DKT je založena na diskrétní Kirchhoffově teorii ohybu tenkých desek. Vychází se přitom z Mindlinovy teorie tlustých desek. Zavádějí se tudíž tři nezávislé funkce

- $w$  - průhyb
- $\varphi_x$  - pootočení okolo osy  $x$
- $\varphi_y$  - pootočení okolo osy  $y$ .

V příslušném energetickém funkcionálu se vyskytují nejvýše první derivace hledaných funkcí. Z toho vyplývá, že na aproximace funkcí  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  jsou kladeny pouze podmínky spojitosti  $C^0$ . Postup při konstrukci prvku DKT spočívá v zanedbání části energie, která přísluší posouvajícím silám. V diskrétních bodech na stranách prvku se následně zavedou požadavky Kirchhoffovy teorie desek (zachování normály po deformaci).

Důsledkem zavedení Kirchhoffových předpokladů je vazba mezi pootočeními a průhybem. Řešení získaná pomocí prvku DKT konvergují ke klasickému řešení tenké desky. Je pozoruhodné, že prvek byl navržen již v roce 1969 (viz [26]), avšak širšího použití se dočkal až za 10 let, kdy jej Bathe implementoval do systému ADINA (A Dynamic Incremental Nonlinear Analysis).

Experimenty ukazují, že pro tenké desky jsou deformace způsobené posouvajícími silami malé a tudíž energie  $E_s$  příslušná smyku je zanedbatelná ve srovnání s energií  $E_{oh}$ , příslušející ohybu. Model založený na funkcionálu (3.111) musí zjednodušení v sobě zahrnout.

V (3.111) se vyskytují pouze první derivace funkcí  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  a proto je snadné nalézt aproximační (interpolační) funkce, které splňují příslušné podmínky spojitosti. V tomto funkcionálu se však vyskytují nejen derivace průhybu  $w$ , ale i samotné funkce  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ . Je proto třeba nalézt vztah mezi funkcemi  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  a funkcí průhybu  $w$ . Přitom je třeba respektovat tyto požadavky:

- Trojúhelníkový prvek musí mít pouze 9 stupňů volnosti - tj. průhyb  $w$ , pootočení  $\varphi_x$  a  $\varphi_y$  ve třech uzlových bodech
- Vzhledem k tomu, že chceme získat klasické Kirchhoffovo řešení tenkých desek, vypočítají se hodnoty pootočení normál v uzlových bodech

z podmínek nulové smykové deformace, tj. ze vztahů

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.115)$$

Uvedené vztahy mohou být uplatněny i v dalších diskrétních bodech

- Při aplikaci podmínek (3.115) nesmí být narušena spojitost  $\varphi_x$  a  $\varphi_y$  mezi jednotlivými prvky.

Prvek DKT může být potom formulován následujícím způsobem:

- Pootočení  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  jsou aproximována pomocí kvadratických interpolačních funkcí, tj.

$$\varphi_x = \sum_{i=1}^6 N_i \varphi_{xi}, \quad \varphi_y = \sum_{i=1}^6 N_i \varphi_{yi}, \quad (3.116)$$

kde  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{yi}$  jsou hodnoty pootočení v uzlových bodech a ve středech stran. Interpolační funkce  $N_i$  byly uvedeny v čl. 3.2.1. Schéma prvku je na obr. 3.22, v němž se na desku díváme proti kladné ose  $z$  (zdola).

- Kromě uzlových bodů jsou podmínky Kirchhoffovy teorie desek aplikovány ve středech stran (body 4,5,6), kde

$$\varphi_{nk} = \frac{\partial w_k}{\partial s}. \quad (3.117)$$

- Průhyb  $w$  podél strany trojúhelníkového prvku je kubický polynom. Odtud

$$\frac{\partial w_k}{\partial s} = -\frac{3}{2l_k} w_i - \frac{1}{4} \frac{\partial w_i}{\partial s} + \frac{3}{2l_k} w_j - \frac{1}{4} \frac{\partial w_j}{\partial s},$$

kde  $k$  označuje bod ve středu strany a  $l_k$  je délka strany  $ij$  (proti vrcholu  $k$ ).

- Pootočení normály  $\varphi_{sk}$  okolo strany prvku se vypočte na základě předpokladu o lineárním průběhu  $\varphi_s$  podél této strany

$$\varphi_{sk} = \frac{1}{2}(\varphi_{si} + \varphi_{sj}).$$

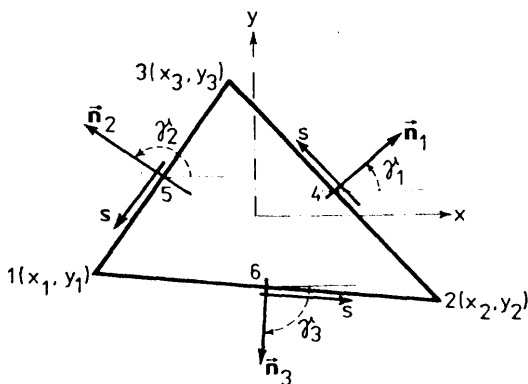
Z uvedeného plyne několik důležitých poznatků :

Protože se zanedbává energie odpovídající posouvajícím silám (druhý řádek v (3.111)), není nutné aproximovat  $w$  uvnitř prvku. Aproximace průhybů podél hran je nezbytná k diskrétnímu splnění Kirchhoffových předpokladů. Z kvadratické aproximace funkcí  $\partial w / \partial s$  a  $\varphi_n$ , které jsou ztotožněny ve třech bodech každé strany, vyplývá splnění Kirchhoffovy hypotézy po celém obvodu prvku. Konečně je zřejmé, že na hranici mezi prvky je plně zajištěna kompatibilita vyjádřená spojitostí funkcí  $w, \frac{\partial w}{\partial s}, \varphi_s, \varphi_n$ .

Nechť zobecnělé uzlové posuny jsou uspořádány do vektoru

$$\mathbf{r}^T = \{ w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3} \}. \quad (3.118)$$

Z obr. 3.22 plynou následující vztahy



Obr. 3.22: Deskový prvek DKT

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \varphi_s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}, \quad (3.119)$$

kde

$$c = \cos(x, n), \quad s = \sin(x, n).$$

Na základě vztahů (3.116) až (3.119) lze zapsat aproximaci pootočení  $\varphi_x, \varphi_y$  ve tvaru

$$\varphi_x = \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{r}, \quad \varphi_y = \mathbf{H}_y^T(\xi, \eta) \mathbf{r}, \quad (3.120)$$



kde interpolační funkce se vypočtou ze vzorců

$$\begin{aligned} H_{x1} &= -1.5(d_6 N_6 - d_5 N_5), & H_{y1} &= 1.5(a_6 N_6 - a_5 N_5), \\ H_{x2} &= N_1 - e_5 N_5 - e_6 N_6, & H_{y2} &= b_5 N_5 + b_6 N_6, \\ H_{x3} &= b_5 N_5 + b_6 N_6, & H_{y3} &= N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Funkce  $H_{x4}$ ,  $H_{x5}$ ,  $H_{x6}$ ,  $H_{y4}$ ,  $H_{y5}$  a  $H_{y6}$  se získají z (3.121) záměnou  $N_2$  za  $N_1$  a záměnou indexů 4 za 6 a 6 za 5. Obdobně funkce  $H_{x7}$ ,  $H_{x8}$ ,  $H_{x9}$ ,  $H_{y7}$ ,  $H_{y8}$  a  $H_{y9}$  se získají záměnou  $N_3$  za  $N_1$  a záměnou indexů 5 za 6 a 4 za 5. Funkce  $N_1$  až  $N_6$  byly uvedeny v části pojednávající o plošných souřadnicích. Pro ostatní koeficienty v (3.121) platí (nesčítat přes  $k$ )

$$\begin{aligned} l_k^2 a_k &= -x_{ij}, & l_k^2 d_k &= -y_{ij}, & l_k^2 c_k &= \frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2, \\ l_k^2 b_k &= \frac{3}{4} x_{ij} y_{ij}, & l_k^2 e_k &= \frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2, & l_k^2 &= x_{ij}^2 + y_{ij}^2, \\ x_{ij} &= x_i - x_j, & y_{ij} &= y_i - y_j, \end{aligned} \quad (3.122)$$

kde  $k = 4, 5, 6$  pro strany  $\overline{23}$ ,  $\overline{31}$ ,  $\overline{12}$ . Další postup je již standardní. Provedením příslušných derivací podle (3.104) lze odvodit vztahy pro prvky matice  $\mathbf{B}$ , která váže vektor křivostí  $\boldsymbol{\kappa}$  a vektor zobecněných uzlových posunů  $\mathbf{r}$ , tj.  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{r}$ . Matice tuhosti prvku se potom vypočte jako  $\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B} dA$ , kde matice  $\mathbf{D}_o$  je dána vzorcem

$$\mathbf{D}_o = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

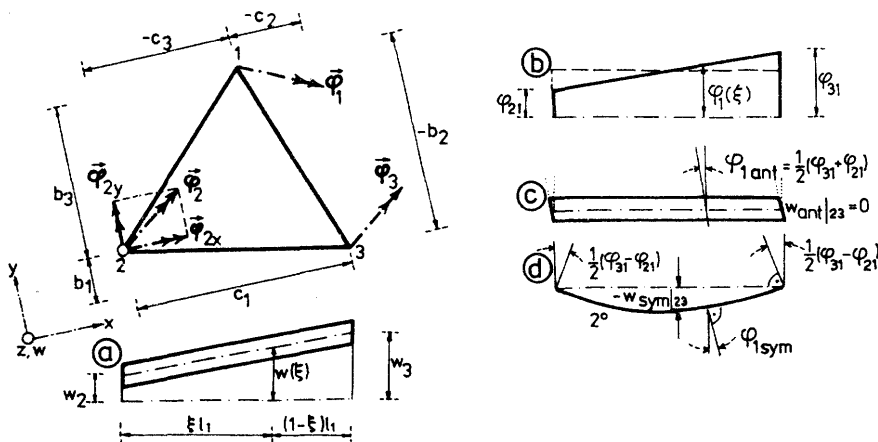
Podrobnosti k výpočtu matice  $\mathbf{B}$  lze nalézt v [8]. Matice  $\mathbf{D}_o$  je maticí tuhosti izotropního materiálu při rovinné napjatosti. O možnosti rozšíření na ortotropní materiál je pojednáno v čl. 1.2.

### 3.6.3 Deskový prvek CCT (Constant Curvature Triangle)

Prvek CCT, navržený P. Řeřichou [63], je jedním z nejjednodušších deskových prvků vůbec. K jeho přednostem patří především skutečnost, že poskytuje konstantní pole deformace po celé ploše prvku. Prvek je plně kompatibilní. Jeho odvození vychází z prutového prvku. Obdobně jako prvek DKT

má CCT 9 stupňů volnosti - svislý průhyb  $w_i$  a dvě pootočení  $\varphi_{xi}$ ,  $\varphi_{yi}$  v každém uzlovém bodě. Funkce  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  jsou nezávislé, takže se připouští zkosení průřezu. Jde tudíž o řešení založené na Mindlinových předpokladech.

Základním krokem při odvození prvku je konstrukce bázevých funkcí (obr. 3.23).



Obr. 3.23: Deskový prvek CCT

Předpokládejme, že průhyb  $w$  i obě pootočení  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  jsou aproximovány pomocí lineární interpolace

$$w = \sum_{i=1}^3 w_i L_i, \quad \varphi_x = \sum_{i=1}^3 \varphi_{xi} L_i, \quad \varphi_y = \sum_{i=1}^3 \varphi_{yi} L_i, \quad (3.123)$$

kde  $L_i$  jsou plošné souřadnice.

Průhyb popsáný vztahem (3.123) představuje přemístění roviny trojúhelníka, při němž normály k původní střednicové rovině zůstávají rovnoběžné s osou  $z$  (obr. 3.23a). Odtud lze vypočítat vztahy pro pseudokřivosti  $\kappa$ . Podle (3.22) a (3.104) můžeme psát

$$\kappa_x = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \varphi_{yi} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 \varphi_{yi} b_i,$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = -\sum_{i=1}^3 \varphi_{xi} \frac{\partial L_i}{\partial y} = -\frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 \varphi_{xi} c_i,$$

$$\begin{aligned}\kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \left( \varphi_{yi} \frac{\partial L_i}{\partial y} - \varphi_{xi} \frac{\partial L_i}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 (\varphi_{yi} c_i - \varphi_{xi} b_i).\end{aligned}$$

Sledujme pootočení pseudonormály procházející libovolným bodem hrany 23 kolem této hrany:

$$\varphi_1 = \vec{\varphi}(\xi) \cdot \vec{n}_1, \quad (3.124)$$

Průběh funkce  $\varphi_1 = \varphi_1(\xi)$  je patrný z obr. 3.23b, v němž  $\varphi_{21} = \vec{\varphi}_2 \cdot \vec{n}_1$ . Bezrozměrná souřadnice  $\xi$  se mění mezi body 23 od nuly do jedné. Vyjádřeme  $\varphi_1$  ve tvaru

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\varphi_{31} + \varphi_{21}}{2} + (\varphi_{31} - \varphi_{21}) \left( \xi - \frac{1}{2} \right). \quad (3.125)$$

Prvnímu členu odpovídá antisymetrická deformace okraje prvku s nulovými průhyby a s konstantním zkosením (obr. 3.23c). Druhému členu přísluší symetrická deformace (čistý ohyb), při níž zůstávají normály kolmé k deformované střednici (obr. 3.23d). Ohybovou deformaci  $w_{sym}|_{23}$  získáme integrací rovnice

$$\frac{1}{l_1} \frac{d w_{sym}}{d \xi} \Big|_{23} = (\varphi_{31} - \varphi_{21}) \left( \xi - \frac{1}{2} \right),$$

odkud

$$w_{sym}|_{23} = -\frac{l_1}{2} (\varphi_{31} - \varphi_{21}) (1 - \xi) \xi.$$

Obdobným způsobem se budou deformovat i zbývající okraje desky. Uvážíme-li, že na hraně 23 je  $L_2 = (1 - \xi)$  a  $L_3 = \xi$ , můžeme vyjádřit odpovídající ohybovou deformaci zajišťující spojitost průhybů na hranici mezi prvky ve tvaru

$$w_{sym}(L_i, L_j, L_k) = -\sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{2} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) L_j L_k. \quad (3.126)$$

Přesvědčme se, že křivosti odvozené z výrazu (3.126) jsou shodné s křivostmi vypočtenými podle (3.124). Nejprve určíme rotace normály ke střednicové rovině desky. Podle obr. 3.23 bude (kladný průhyb směřuje vzhůru)

$$\varphi_{x sym} = \frac{\partial w_{sym}}{\partial y} = -\sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{4A} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) (c_j L_k + c_k L_j),$$

(3.127)

$$\varphi_{y sym} = -\frac{\partial w_{sym}}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{4A} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) (b_j L_k + b_k L_j).$$

Odtud

$$\kappa_{x sym} = \frac{\partial \varphi_{y sym}}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{(2A)^2} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) b_j b_k,$$

$$\kappa_{y sym} = -\frac{\partial \varphi_{x sym}}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{(2A)^2} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) c_j c_k, \quad (3.128)$$

$$\kappa_{xy sym} = \frac{\partial \varphi_{y sym}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{x sym}}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{(2A)^2} (\varphi_{ki} - \varphi_{ji}) (b_j c_k + b_k c_j).$$

Průmět vektoru rotace  $\vec{\varphi}_k - \vec{\varphi}_j$  do směru  $\vec{n}_i$  vypočteme pomocí skalárního součinu

$$\varphi_{ki} - \varphi_{ji} = \vec{n}_i \cdot (\vec{\varphi}_k - \vec{\varphi}_j) = -\frac{1}{l_i} \{ b_i, c_i \} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{xk} - \varphi_{xj} \\ \varphi_{yk} - \varphi_{yj} \end{array} \right\}. \quad (3.129)$$

Po dosazení (3.129) do (3.128) snadno najdeme

$$\begin{aligned} \kappa_{x sym} &= -\frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^3 [(\varphi_{xk} - \varphi_{xj}) b_i + (\varphi_{yk} - \varphi_{yj}) c_i] b_j b_k \quad (3.130) \\ &= -\frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^3 [\varphi_{xk} (b_i b_j b_k - b_j b_k b_i) + \varphi_{yk} (c_i b_j b_k - c_j b_k b_i)] \\ &= \frac{1}{(2A)^2} \sum_{i=1}^3 \varphi_{yk} b_k (c_j b_i - c_i b_j) = \frac{1}{(2A)^2} \sum_{k=1}^3 \varphi_{yk} b_k 2A \\ &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \kappa_x. \end{aligned}$$

Obdobně lze ukázat, že

$$\kappa_{y sym} = \kappa_y, \quad \kappa_{xy sym} = \kappa_{xy}.$$

Známe-li aproximace  $w, w_{sym}, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}$ , můžeme vypočítat zkosení podle vzorců

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \varphi_y + \frac{\partial}{\partial x}(w + w_{sym}) = \frac{\partial w}{\partial x} + (\varphi_y - \varphi_{y\ sym}), \\ \gamma_{yz} &= -\varphi_x + \frac{\partial}{\partial y}(w + w_{sym}) = \frac{\partial w}{\partial y} - (\varphi_x - \varphi_{x\ sym}).\end{aligned}\quad (3.131)$$

Z (3.127) vyplývá, že obě funkce  $\varphi_{x\ sym}$  i  $\varphi_{y\ sym}$  se po prvku mění lineárně.

Použijeme-li při výpočtu příspěvku smykových zkosení  $(\varphi_x - \varphi_{x\ sym})$ ,  $(\varphi_y - \varphi_{y\ sym})$  jednobodovou integraci, nahradíme vlastně skutečný lineární průběh zkosení jeho průměrnou hodnotou. Tu jednoduše stanovíme tak, že vypočteme zkosení v bodě  $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$ .

Výpočet matice tuhosti v případě prvku CCT se tak redukuje na násobení matic, neboť jak  $\kappa$ , tak  $\gamma$  jsou vektory, které jsou po prvku konstantní

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \gamma = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + (\varphi_y - \varphi_{y\ sym})_c \\ \frac{\partial w}{\partial y} - (\varphi_x - \varphi_{x\ sym})_c \end{Bmatrix}.$$

### 3.6.4 Čtyřúhelníkový deskový prvek s pružným podkladem

Z tvaru funkcionálu (3.113) je zřejmé, že i zde je účelné použít oblíbenou izoparametrickou interpolaci. Již v úvodu jsme podotkli, že se omezíme na bilineární aproximaci. Aby použitý postup byl analogický rovinné úloze, vyjdeme z vyjádření (3.113) a použijeme redukovanou integraci pro vyčíslování těch integrálů, ve kterých vystupují smyková napětí, resp. smyková přetvoření. Pro aproximaci funkcí  $\varphi_x, \varphi_y, w$  platí

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i w_i, \quad \varphi_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi}, \quad \varphi_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi}. \quad (3.132)$$

Podobně jako při rovinné úloze sestavíme uzlové posuny do tří vektorů

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_w &= \{w_1, w_2, w_3, w_4\}^T, & \mathbf{r}_{\varphi_x} &= \{\varphi_{x1}, \varphi_{x2}, \varphi_{x3}, \varphi_{x4}\}^T, \\ \mathbf{r}_{\varphi_y} &= \{\varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \varphi_{y3}, \varphi_{y4}\}^T.\end{aligned}\quad (3.133)$$

Z tvaru funkcionálu je patrné, že matici tuhosti můžeme rozdělit na dvě - matici tuhosti desky a matici tuhosti podloží. V místech, kde je prvkem deska na podloží, obě matice sečteme.

Pseudokřivosti  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  a zkosení  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  seřadíme do vektoru

$$\boldsymbol{\kappa}^T = \{ \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \}. \quad (3.134)$$

Vyjádříme jednotlivé složky vektoru  $\boldsymbol{\kappa}$  v závislosti na zobecněných uzlových posunech

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{P} \mathbf{y}}{J} = \mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{X}, \\ \kappa_y &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = -\frac{\mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{J} = -\mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{Y}, \\ \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{J} - \frac{\mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{P} \mathbf{y}}{J} = \mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{X}, \\ \gamma_{xz} &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{N} + \frac{\mathbf{r}_w^T \mathbf{P} \mathbf{y}}{J} = \mathbf{r}_{\varphi_y}^T \mathbf{N} + \mathbf{r}_w^T \mathbf{X}, \\ \gamma_{yz} &= -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} = -\mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{N} - \frac{\mathbf{r}_w^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{J} = -\mathbf{r}_{\varphi_x}^T \mathbf{N} + \mathbf{r}_w^T \mathbf{Y}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Seřadíme všechny zobecnělé uzlové posuny do jediného vektoru

$$\mathbf{r}^T = \{ w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, w_4, \varphi_{x4}, \varphi_{y4} \}.$$

Vztah mezi  $\boldsymbol{\kappa}$  a  $\mathbf{r}$  vyjádříme následujícím způsobem

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{r}, \quad (3.136)$$

Výpočet matice  $\mathbf{B}$  následuje.

Při použití redukované integrace bude třeba vypočítat třetí, čtvrtý a pátý řádek matice  $\mathbf{B}$  pouze v bodě  $\xi = \eta = 0$ . Z toho důvodu použijeme již známé značení doplněné vztahem

$$N_{i+4} = N_i(\xi = 0, \eta = 0), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.137)$$

Matici  $\mathbf{B}$  lze potom zapsat takto :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 & X_4 \\ 0 & -Y_1 & 0 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & -Y_3 & 0 & 0 & -Y_4 & 0 \\ 0 & -X_5 & Y_5 & 0 & -X_6 & Y_6 & 0 & -X_7 & Y_7 & 0 & -X_8 & Y_8 \\ X_5 & 0 & N_5 & X_6 & 0 & N_6 & X_7 & 0 & N_7 & X_8 & 0 & N_8 \\ Y_5 & -N_5 & 0 & Y_6 & -N_6 & 0 & Y_7 & -N_7 & 0 & Y_8 & -N_8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matici  $\mathbf{B}$  rozdělíme na čtyři submatice

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & 0 & X_3 & 0 & 0 & X_4 \\ 0 & -Y_1 & 0 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & -Y_3 & 0 & 0 & -Y_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \{ 0 \quad -X_5 \quad Y_5 \quad 0 \quad -X_6 \quad Y_6 \quad 0 \quad -X_7 \quad Y_7 \quad 0 \quad -X_8 \quad Y_8 \},$$

$$\mathbf{B}_3 = \{ X_5 \quad 0 \quad N_5 \quad X_6 \quad 0 \quad N_6 \quad X_7 \quad 0 \quad N_7 \quad X_8 \quad 0 \quad N_8 \},$$

$$\mathbf{B}_4 = \{ Y_5 \quad -N_5 \quad 0 \quad Y_6 \quad -N_6 \quad 0 \quad Y_7 \quad -N_7 \quad 0 \quad Y_8 \quad -N_8 \quad 0 \}.$$

Obdobným způsobem rozdělíme i matici materiálové tuhosti

$$\mathbf{D}_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{Gh^3}{12}, \quad \mathbf{D}_3 = k Gh. \quad (3.138)$$

Pomocí zavedeného označení můžeme popsat matici tuhosti deskového prvku

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_3 (\mathbf{B}_3^T \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{B}_4)] J d\xi d\eta.$$

Vlastní vzorec pro výpočet matice tuhosti Gaussovou integrační formulí má tvar (integrace v  $2 \times 2$  bodech + v 1 bodě)

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\mathbf{B}_1^T(\xi_i, \eta_j) \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1(\xi_i, \eta_j) J(\xi_i, \eta_j) \alpha_i \alpha_j] \\ &+ [\mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_3 (\mathbf{B}_3^T \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{B}_4)] 4J(0,0). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Dále odvodíme potřebné vztahy pro výpočet matice tuhosti pružného podloží. K tomu potřebujeme znát derivace

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathbf{r}_w^T \mathbf{P} \mathbf{y}}{J} = \mathbf{r}_w^T \mathbf{X}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\mathbf{r}_w^T \mathbf{P} \mathbf{x}}{J} = \mathbf{r}_w^T \mathbf{Y}. \quad (3.140)$$

Pro funkci  $w$  platí

$$w = \mathbf{N} \mathbf{r}, \quad (3.141)$$

kde

$$\mathbf{N} = \{ N_1, 0, 0, N_2, 0, 0, N_3, 0, 0, N_4, 0, 0 \}.$$

Na základě těchto vztahů můžeme matici podloží vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{K}_p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}^T C_1 \mathbf{N} + \mathbf{B}_5^T C_2 \mathbf{B}_5] J d\xi d\eta. \quad (3.142)$$

Vektor  $\mathbf{B}_5$  má tvar

$$\mathbf{B}_5 = \{(X_1 + Y_1), 0, 0, (X_2 + Y_2), 0, 0, (X_3 + Y_3), 0, 0, (X_4 + Y_4), 0, 0\}.$$

Vlastní numerický výpočet matice tuhosti podloží se provede Gaussovou integrací v  $2 \times 2$  bodech podle vzorce

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\mathbf{N}^T(\xi_i, \eta_j) C_1 \mathbf{N}(\xi_i, \eta_j) + \mathbf{B}_5^T(\xi_i, \eta_j) C_2 \mathbf{B}_5(\xi_i, \eta_j)] J(\xi_i, \eta_j) \alpha_i \alpha_j.$$

Zbývá odvodit vztahy pro výpočet vektoru transformovaného zatížení. Při formulaci úlohy jsme zavedli tři druhy zatížení:

- spojitě zatížení, působící kolmo k rovině nebo podloží, charakterizované intenzitou zatížení  $\bar{p}$
- účinky teplotních změn, charakterizované ohřátím horního a spodního povrchu desky
- účinky liniového zatížení, působící na okraji desky nebo podloží.

O veličinách  $\bar{p}$  a  $\bar{m}_T$  budeme předpokládat, že se po prvku nemění. Příslušný vektor  $\mathbf{R}_p$  se vypočte následujícím způsobem

$$\mathbf{R}_p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{p} \mathbf{N}^T + \bar{m}_T \mathbf{B}_6^T] J d\xi d\eta. \quad (3.143)$$

Vektor

$$\mathbf{B}_6 = \{ 0, Y_1, X_1, 0, Y_2, X_2, 0, Y_3, X_3, 0, Y_4, X_4 \},$$



jak plyne z (3.108) a následujících vztahů v odst. 3.6.1.

Účinky liniového zatížení působícího na okraji desky se převedou na uzlové zatížení integrací podél okraje. Jako příklad uvedeme výpočet uzlových sil od zatížení  $f$ , které působí na hranici prvku mezi uzlovými body 1, 2. Příslušná rádková matice interpolující průhyb  $w$  má tvar

$$\mathbf{N}_{3,4} = \left\{ \frac{1}{2}(1 + \xi), 0, 0, \frac{1}{2}(1 - \xi), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

Budeme-li předpokládat, že  $\bar{f}$  má podél strany 1 – 2 konstantní hodnotu, potom

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p &= \int_{-1}^1 \bar{f} \mathbf{N}_{3,4}^T J d\xi & (3.144) \\ &= \left\{ \frac{\bar{f}l}{2}, 0, 0, \frac{\bar{f}l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}^T, \end{aligned}$$

kde  $l$  je délka strany 3 – 4.

Závěrem poznamenejme, že prvek je dále možné modifikovat stejným způsobem jako prvek pro rovinnou úlohu. Můžeme přidat pro všechny tři funkce  $w, \varphi_x, \varphi_y$  bublinové funkce, můžeme zavést nekompatibilní aproximační funkce. Účinnější modifikace ale spočívá v použití kvadratických funkcí pro aproximaci průhybu, jak je uvedeno v následujícím odstavci.

### 3.6.5 Modifikovaný čtyřúhelníkový deskový prvek

Prvek je opět založen na Mindlinově hypotéze. Je obdobou Řeřichova prvku CCT. Byl navržen Ibrahimbegovičem a Wilsonem [42]. Vychází se z řešení Timošenkova nosníku pomocí izoparametrického prvku s doplňujícími podmítkami (3.40). Ke vztahům (3.40) je třeba uvést příslušný výraz pro průhyb. Pootočení průřezu prutu při rovinném ohybu je aproximováno takto:

$$\varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2.$$

Aproximace průhybu je stejná, pouze je doplněna bublinovou funkcí (podrobnosti jsou uvedeny v desáté kapitole)

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \alpha N_c,$$

kde

$$N_c = 1 - \xi^2.$$

Pro křivost platí

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{l}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

a pro zkosení

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \varphi = \frac{w_2 - w_1}{l} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{l} + \xi \left[ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \frac{4}{l}\alpha \right].$$

V případě  $\alpha = 0$  jde o čistě izoparametrickou interpolaci, s níž souvisí vznik smykového ztuhnutí. Aby byla splněna doplňující podmínka (2.71), musí platit

$$\alpha = \frac{l}{8}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Z toho plyne, že aproximace průhybu má tvar

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \frac{l}{8} N_c (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Je zřejmé, že poslední člen je základem i Allmanova doplňku aproximačních funkcí při konstrukci membránového čtyřúhelníkového prvku s rotačními stupni volnosti (odst. 3.5.4).

Deskový čtyřúhelníkový prvek je analogií prutového řešení. Pootočení pseudonormály střednicové plochy desky je aproximováno pomocí obvyklých izoparametrických funkcí

$$\varphi_x = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{x_i}, \quad \varphi_y = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{y_i}.$$

Interpoláčnı́ funkce  $N_i = N_i(\xi, \eta)$  jsou dvourozměrné a jsou uvedeny v tab. 3.1 (silně orámovaná část). Průhyb je analogicky k (3.90) vyjádřen takto :

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i + \sum_{I=5}^8 N_I \frac{l_{JK}}{8} [(\varphi_{x_K} - \varphi_{x_J}) \cos \alpha_{JK} + (\varphi_{y_K} - \varphi_{y_J}) \sin \alpha_{JK}],$$

kde funkce  $N_I$  se vezmou z tab. 3.1 bez koeficientu 0.5,  $l_{JK}$  je délka strany  $JK$  a  $\alpha_{JK}$  je úhel, který svırá vnějšı́ normála strany  $JK$  s osou  $x$ ,

$$J = I - 4, \quad K = \text{mod}(J, 4) + 1.$$

Uspořádáme-li zobecnělé uzlové posuny do vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi^T &= \{\varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \varphi_{x4}, \varphi_{y4}\}, \\ \mathbf{r}_w^T &= \{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \end{aligned}$$

můžeme vyjádřit vektor křivosti

$$\kappa = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \mathbf{r}_\varphi, \quad \text{kde } \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & X_i \\ -Y_i & 0 \\ -X_i & Y_i \end{bmatrix}.$$

Pro zkosení obdobně platí

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4] \mathbf{r}_w + [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4] \mathbf{r}_\varphi,$$

kde

$$\mathbf{b}_i^T = \{X_i, Y_i\},$$

$$\mathbf{G}_I = \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{1}{8} \left( l_{IJ} \cos \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial x} - \right. & N_I - \frac{1}{8} \left( l_{IJ} \sin \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial x} - \right. \\ \left. \left. -l_{IK} \cos \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial x} \right) & \left. \left. -l_{IK} \sin \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial x} \right) \right. \\ \hline -N_I - \frac{1}{8} \left( l_{IJ} \cos \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial y} - \right. & -\frac{1}{8} \left( l_{IJ} \sin \alpha_{IJ} \frac{\partial N_L}{\partial y} - \right. \\ \left. \left. -l_{IK} \cos \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial y} \right) & \left. \left. -l_{IK} \sin \alpha_{IK} \frac{\partial N_M}{\partial y} \right) \right],$$

pro

$$I = 1, 2, 3, 4; \quad M = I + 4; \quad L = M - 1 + 4 \text{ aint}(1/I);$$

$$K = \text{mod}(M, 4) + 1; \quad J = L - 4.$$

V souvislosti s řešením tenkých desek a skořepin je třeba provést ještě určitou korekci v aproximaci zkosení, aby se vyloučilo smykové ztuhnutí. Doplňující podmínky typu (2.71) zajišťují konstantní zkosení pouze podél stran čtyřúhelníku. Uvnitř prvku však tato podmínka obecně splněna není. Modifikujeme proto výraz pro  $\gamma$  takto:

$$\gamma = \mathbf{b}^T \mathbf{r}_w + \mathbf{G} \mathbf{r}_\varphi + \gamma_c, \quad (3.145)$$

kde  $\gamma_c$  je zatím neznámá konstanta, na kterou budeme pohlížet jako na počáteční deformaci. První člen ve výrazu (3.145) může nabýt konstantní nebo nulové hodnoty, avšak druhý člen dává pro čistý ohyb obecně nenulovou hodnotu  $\gamma$ . Proto je třeba, aby

$$\mathbf{G} \mathbf{r}_\varphi + \gamma_c = 0.$$

Tuto podmínku není možné exaktně splnit v každém vnitřním bodě prvku, a proto se spokojíme se slabší doplňující podmínkou. Energetický funkcionál se doplní o člen

$$\int_{\Omega} \tau_c (\mathbf{G} \mathbf{r}_\varphi + \gamma_c) d\Omega,$$

který po provedení variace vzhledem k  $\tau_c$  vede k rovnici

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega \mathbf{r}_\varphi + \Omega \gamma_c = 0.$$

Odtud

$$\gamma_c = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega \mathbf{r}_\varphi.$$

Aproximace  $\gamma$  má potom tvar

$$\gamma = \mathbf{b}^T \mathbf{r}_w + \overline{\mathbf{G}} \mathbf{r}_\varphi, \quad \text{kde } \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega.$$

Pro matici tuhosti deskového prvku platí

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{b}^T, \overline{\mathbf{G}}]^T \mathbf{D}_s [\mathbf{b}^T, \overline{\mathbf{G}}] d\Omega,$$

kde  $\mathbf{D}_b$  je matice materiálové tuhosti v ohybu a v kroucení typu (3,3) a  $\mathbf{D}_s$  matice tuhosti průřezu o šířce 1 m ve smyku typu (2,2). Matice  $\mathbf{B}_b$  se vytvoří přeskupením prvních tří řádků matice  $\mathbf{B}$ , vystupující ve vzorci (3.136). V případě ortotropního materiálu platí :

$$\mathbf{D}_b = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = h \begin{bmatrix} k_x G_{xz} & 0 \\ 0 & k_y G_{yz} \end{bmatrix}.$$

Prvky materiálových matic jsou definovány vzorci (1.25). Lze pomocí nich vyjádřit i geometrickou ortotropii, vyplývající z rozdílného uspořádání konstrukce ve dvou vzájemně kolmých směrech.

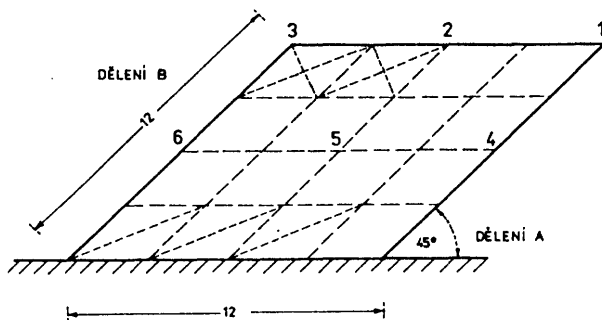
V [42] je uvedeno porovnání s jiným reprezentantem čtyřúhelníkových deskových prvků s 12 stupni volnosti - s prvkem označovaným jako T1, který navrhli Hughes a Tezduyar [35]. T1 je identický s Batheho a Dvorkinovým MITC4 [4]. Ukazuje se, že všechny zmíněné prvky mají podobné vlastnosti. Zde uvedený prvek logicky přináležejí k Řeřichovu trojúhelníkovému prvku.

### Příklad 3.1

Obecné porovnání deskových prvků lze provést velmi obtížně. Pro představu čtenáře o chování výše uvedených prvků uvedeme porovnání na jednom konkrétním příkladu. Zvolili jsme příklad z [5]. Jde o desku, která byla analyzována i experimentálně. Schema desky i s vyznačením dělení na prvky je na obr. 3.24.

#### Řešení:

Kromě prvků *DKT*, *CCT* a modifikovaného prvku (*MQ*) jsou ještě uvedeny výsledky získané pomocí prvku *HSM*, což je hybridní prvek pro tenké desky s lineární aproximací momentů po prvku a kubickou aproximací průhybu podél stran.



Obr. 3.24: Šikmá deska.  $E = 1.05 \times 10^7$ ,  $h = 0.125$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\bar{p} = 0.26066$

	bod desky					
	1	2	3	4	5	6
Experiment	0.297	0.204	0.121	0.129	0.056	0.022
DKT	0.293	0.196	0.114	0.118	0.055	0.024
CCT(B)	0.248	0.166	0.085	0.087	0.043	0.021
MQ	0.272	0.183	0.106	0.102	0.046	0.019
HSM	0.264	0.173	0.099	0.095	0.043	0.023
CCT(A)	0.149	0.121	0.096	0.041	0.036	0.017

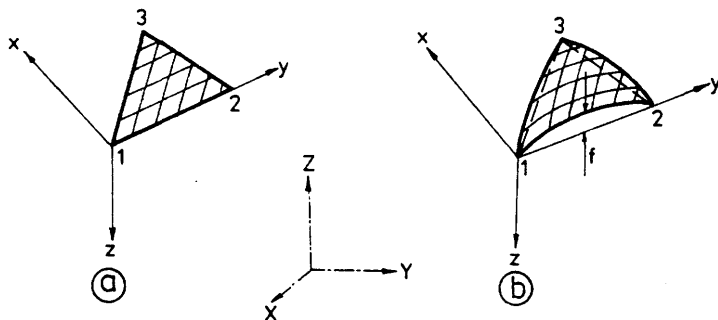
Tabulka 3.6: Hodnoty průhybu ve vybraných bodech

Vzhledem k tomu, že se jedná o tenkou desku ( $h/L = 0.0104$ ) je z tabulky 3.6 patrné, že nejlepší výsledky dávají prvky založené na Kirchhoffově teorii - *DKT*, *HSM*. Nicméně je rovněž patrné, že i prvky *CCT* a *MQ* poskytují výsledky s přijatelnou přesností. Je si třeba přitom uvědomit, že jde o prvky podstatně univerzálnější. Na příkladu prvku *CCT* je demonstrován vliv způsobu triangulace na přesnost výsledku.

## 3.7 Skořepinové prvky

### 3.7.1 Zakřivený trojúhelníkový prvek v lokálních souřadnicích

Pomocí prvku pro rovinnou úlohu (stěnu) a deskového prvku lze řešit i skořepiny. Základem výpočtu je matice tuhosti *stěnodeskového* prvku vyjádřená v lokální soustavě souřadnic  $x, y, z$  (obr. 3.25a).



Obr. 3.25: Skořepinový prvek

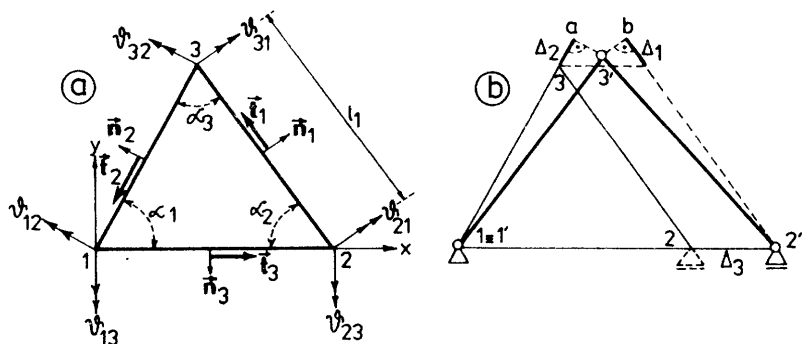
Sledující postup z čl. 2.3, budeme pracovat s vektorem parametrů ryzi deformace (nevystihuje přemístění prvku jako tuhého tělesa)

$$\hat{r}^T = \{ \Delta^T, \vartheta^T \}. \quad (3.146)$$

Vektor

$$\Delta^T = \{ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \} \quad (3.147)$$

vyjadřuje změny vzdáleností uzlů měřené ve směrech stran prvku (obr. 3.26a). Složky vektoru



Obr. 3.26: Dekompozice v poli posunů

$$\vartheta^T = \{\vartheta_{1x}, \vartheta_{1y}, \vartheta_{2x}, \vartheta_{2y}, \vartheta_{3x}, \vartheta_{3y}\} \quad (3.148)$$

jsou ryzími rotacemi normál, vztyčených ke střednicové ploše v uzlech prvku, a to kolem lokálních os  $x, y$ . Abychom se co nejvíce přiblížili postupu z čl. 2.3, vyjádříme nejprve pomocné průměty vektorů rotace  $\vartheta_i$ , vyznačené v obr. 3.26a :

$$\begin{aligned} \vartheta_{ij} &= \bar{\vartheta}_i \cdot \bar{n}_j = \vartheta_{ix} n_{jx} + \vartheta_{iy} n_{jy}, \\ &= \vartheta_{ix} t_{jy} - \vartheta_{iy} t_{jx}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Zde jsou  $(n_{jx}, n_{jy})$ , resp.  $(t_{jx}, t_{jy})$  složkami jednotkových vektorů orientovaných kolmo, resp. ve směru strany, ležící proti uzlu  $j$ .

Pomocí (3.149) odvodíme snadno zobecnění vzorce (2.93) ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \Delta - \Delta_b \\ &= \Delta - \hat{T} \vartheta, \end{aligned} \quad (3.150)$$

kde

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_1^1 l_1 t_{1y} & c_1^1 l_1 t_{1x} & -c_2^1 l_1 t_{1y} & c_2^1 l_1 t_{1x} \\ -c_2^2 l_2 t_{2y} & c_2^2 l_2 t_{2x} & 0 & 0 & -c_1^2 l_2 t_{2y} & c_1^2 l_2 t_{2x} \\ -c_1^3 l_3 t_{3y} & c_1^3 l_3 t_{3x} & -c_2^3 l_3 t_{3y} & c_2^3 l_3 t_{3x} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konstanty  $c_1^j, c_2^j$  se počítají pomocí (2.92) pro délku  $l_j$  a úhly  $\alpha_1^j, \alpha_2^j$ , které přísluší oblouku proti vrcholu  $j$ .

Vektoru ryzí deformace  $\hat{\mathbf{r}}$  přísluší zúžené matice stěnodeskového prvku (srov. (2.94))

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.151)$$

Matice  $\hat{\mathbf{K}}_1$  je typu (3, 3). Odráží vlastnosti stěnového prvku za předpokladu stavu konstantní deformace vyjádřeného třemi poměrnými protaženími ve směrech stran

$$\varepsilon_j = \frac{\Delta_j}{l_j}, \quad \text{pro } j = 1, 2, 3. \quad (3.152)$$

S využitím prvního řádku v transformační rovnici (1.30) lze sestavit maticevý vztah mezi prodloužením stran a kartézskými složkami tenzoru deformace ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 l_1 \\ \varepsilon_2 l_2 \\ \varepsilon_3 l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 t_{1x}^2 & l_1 t_{1y}^2 & l_1 t_{1x} t_{1y} \\ l_2 t_{2x}^2 & l_2 t_{2y}^2 & l_2 t_{2x} t_{2y} \\ l_3 t_{3x}^2 & l_3 t_{3y}^2 & l_3 t_{3x} t_{3y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.153)$$

neboli

$$\Delta = \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.154)$$

Matice  $\hat{\mathbf{K}}_1$  vplyne z rovnosti ekvivalentních výrazů pro potenciální energii deformace

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \Delta^T \hat{\mathbf{K}}_1 \Delta. \quad (3.155)$$

Spojením (3.154) a (3.155) vychází

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \Omega \mathbf{S}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}, \quad (3.156)$$

kde  $\Omega$  je objem prvku.

V odst. 3.5.4. jsme ukázali, že při výpočtu skořepin je vhodné uvažovat navíc rotační stupně volnosti, tj. pootočení materiálu kolem normál vztýčených k rovině prvku ve třech jeho vrcholech. Nebudeme zabýhat do podrobností, pouze podotkneme, že při konstrukci pole deformace lze s výhodou využít trojúhelníkových souřadnic a že matice  $\hat{\mathbf{K}}_1$  je v takovém případě typu (6, 6).

Matice  $\hat{\mathbf{K}}_2$  je typu (6, 6) a popisuje ohybové vlastnosti deskového prvku odpovídajícího vektoru uzlových rotací  $\boldsymbol{\vartheta}$ . Prozatím stačí, že známe její význam, formální matematické vyjádření není pro další úvahy třeba.



Máme-li v matici tuhosti stěnodeskového prvku  $\hat{K}_2$  zachytit vliv zakřivení skořepiny, můžeme se řídit postupem, vyjádřeným rovnicí (2.97). Oddělením membránových a ohybových účinků pomocí (3.150) vyplyne hledaný vztah

$$\hat{K}_f = \begin{bmatrix} \hat{K}_1, & -\hat{K}_1 \hat{T} \\ -\hat{T}^T \hat{K}_1, & (\hat{T}^T \hat{K}_1 \hat{T} + \hat{K}_2) \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Kompletní vektor zobecněných uzlových posunů v lokální soustavě souřadnic, který zahrnuje i stupně volnosti prvku jako tuhého tělesa, uspořádáme takto :

$$\mathbf{r}^T = \{ \mathbf{r}_1^T, \mathbf{r}_2^T \}, \quad (3.158)$$

$$\mathbf{r}_1^T = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \},$$

$$\mathbf{r}_2^T = \{ w_1, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}, w_2, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}, w_3, \varphi_{3x}, \varphi_{3y} \}.$$

Po rozšíření matice tuhosti musíme znát transformační vztah (srov. (2.60))

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T} \mathbf{r}, \quad (3.159)$$

neboli

$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix}.$$

Odvození matice  $\mathbf{T}_1$  je snadné. Stačí promítnout uzlové posuny  $u_i, v_i$  do směrů stran a vzít v úvahu, že protažení strany je dáno rozdílem velikosti průmětů v koncových uzlech :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -t_{2x} & -t_{2y} & t_{1x} & t_{1y} \\ t_{1x} & t_{1y} & 0 & 0 & -t_{3x} & -t_{3y} \\ -t_{1x} & -t_{1y} & t_{2x} & t_{2y} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Při odvození matice  $\mathbf{T}_2$  musíme vzít v úvahu, že (srov. obr. 2.8)

$$\vartheta_{ix} = \varphi_{ix} - \psi_x, \quad \vartheta_{iy} = \varphi_{iy} - \psi_y, \quad (3.160)$$

kde  $\psi_x, \psi_y$  jsou úhly, o které se pootočí prvek jako tuhé těleso kolem lokálních os  $x, y$ , přičemž

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0, \quad w = \sum_{i=1}^3 w_i L_i.$$

Plošné souřadnice  $L_i$  na trojúhelníku byly podrobně diskutovány v odst. 3.2.1. S využitím vztahů (3.22) a (3.23) můžeme psát

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 c_i w_i, \quad \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i w_i, \quad (3.161)$$

kde  $A$  je plošný obsah trojúhelníku,  $b_i = y_j - y_k$ ,  $c_i = x_k - x_j$ . Je tedy

$$T_2 = \begin{bmatrix} -c_1/2A & 1 & 0 & -c_2/2A & 0 & 0 & -c_3/2A & 0 & 0 \\ b_1/2A & 0 & 1 & b_2/2A & 0 & 0 & b_3/2A & 0 & 0 \\ -c_1/2A & 0 & 0 & -c_2/2A & 1 & 0 & -c_3/2A & 0 & 0 \\ b_1/2A & 0 & 0 & b_2/2A & 0 & 1 & b_3/2A & 0 & 0 \\ -c_1/2A & 0 & 0 & -c_2/2A & 0 & 0 & -c_3/2A & 1 & 0 \\ b_1/2A & 0 & 0 & b_2/2A & 0 & 0 & b_3/2A & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozšířená matice tuhosti skořepinového prvku v lokální soustavě souřadnic je typu (15, 15) a je vyjádřena vztahem (srov. (2.99))

$$\begin{aligned} K_f &= T^T \hat{K}_f T & (3.162) \\ &= \begin{bmatrix} K_1, & -T_1^T \hat{K}_1 \hat{T} T_2 \\ -T_2^T \hat{T}^T \hat{K}_1 T_1, & (-T_2^T \hat{T}^T \hat{K}_1 \hat{T} T_2 + K_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $K_1 = T_1^T \hat{K}_1 T_1$  je matice tuhosti stěnového prvku typu (6, 6) příslušející vektoru uzlových posunů  $r_1$  a  $K_2 = T_2^T \hat{K}_2 T_2$  je matice tuhosti deskového prvku typu (9, 9) příslušející vektoru uzlových posunů  $r_2$ . Z uvedeného je zřejmé, že matici  $\hat{K}_2$  není třeba sestavovat.

### 3.7.2 Transformace skořepinového prvku do globálních souřadnic

Z hlediska transformace je ideální, když lokální vektor  $r = r_l$  obsahuje v každém uzlu nejen tři složky posunu  $u_i, v_i, w_i$ , ale i tři složky rotace  $\varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$ . Tři rotace  $\varphi_{iz}$  ( $i=1,2,3$ ) mohou být zahrnuty jedině do vektoru

$$r_1 = \{u_1, v_1, \varphi_{1z}, u_2, v_2, \varphi_{2z}, u_3, v_3, \varphi_{3z}\}^T. \quad (3.163)$$

Prvek s těmito vlastnostmi jsme uvedli dříve v rámci modifikací. Uvedená úprava nemá na výpočet matice  $B$  větší vliv. Místo šesti řádků jich bude mít devět, rozšiřující tři řádky budou obsazeny pouze nulami.

Lokální matice tuhosti je v uvedeném případě typu (18, 18). Její řádky a sloupce mohou být přerovnány tak, aby byl vektor uzlových posunů uspořádán podle uzlů

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_l = \{u_1, v_1, w_1, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}, \varphi_{1z}, |\dots|\dots\}^T. \quad (3.164)$$

Vztah mezi lokálním a globálním vektorem zprostředkuje transformační matice  $\mathbf{A}$  (viz čl. 2.6)

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{A} \mathbf{r}_g. \quad (3.165)$$

Transformační matice je tvořena šesti diagonálními submaticemi  $\mathbf{A}^*$  typu (3, 3), jejichž prvky jsou vyjádřeny směrovými kosiny úhlů mezi lokálními osami  $x, y, z$  a globálními osami  $X, Y, Z$ :

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \cos \widehat{xX}, & \cos \widehat{xY}, & \cos \widehat{xZ} \\ \cos \widehat{yX}, & \cos \widehat{yY}, & \cos \widehat{yZ} \\ \cos \widehat{zX}, & \cos \widehat{zY}, & \cos \widehat{zZ} \end{bmatrix}. \quad (3.166)$$

Globální matice tuhosti je dána vzorcem

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K}_l \mathbf{A} = \mathbf{K}_g. \quad (3.167)$$

Při použití klasického stěnového prvku s maticí tuhosti  $\mathbf{K}_l$  typu (6, 6) nepřísluší stupňům volnosti  $\varphi_{iz}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tuhost. V důsledku toho bude mít rozšířená matice skořepinového prvku  $\mathbf{K}_l$  o rozměru (18, 18) tři diagonální pozice obsazeny nulami. Po transformaci do globální soustavy souřadnic podle vzorce (3.167) se na diagonálu matice  $\mathbf{K}_g$  zpravidla dostanou nenulové prvky, takže i takto ochuzený prvek může být prakticky využitelný.

## 3.8 Interakce konstrukcí s podloží

Vyšetřování interakce stavební konstrukce s podloží je jednou z významných aplikací stavební mechaniky v inženýrské praxi. Soustavně pozornosti se těší zejména u stěnových a kombinovaných konstrukcí pozemních staveb, jež jsou vlivem své tvarové rozmanitosti složitými prostorovými konstrukčními celky. Z této skutečnosti vyplývá potřeba vhodného zjednodušujícího modelu, který je s to uspokojivě vystihnout charakter spolupůsobení reálné konstrukce s okolním prostředím.

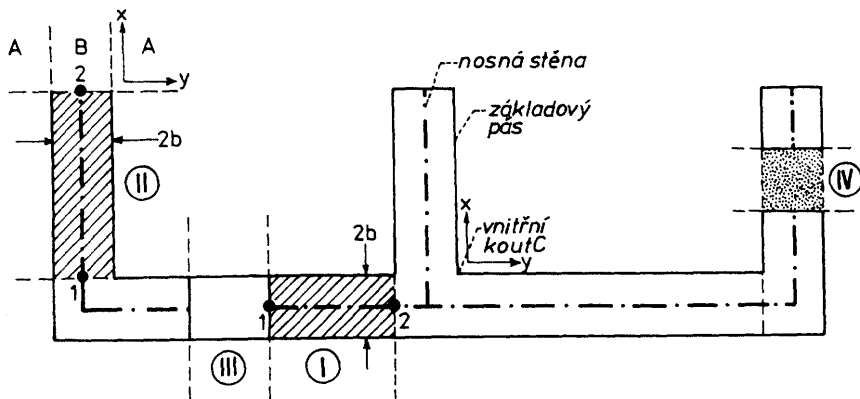
Základem *zjednodušeného modelu* prostorové stěnové konstrukce je tenkostěnný prutový prvek, který jsme popsali v čl. 3.4. Je vhodný pro modelování pravidelně uspořádaných konstrukcí, jaké se vyskytují např. v bytové

výstavbě. V integrovaných objektech se kombinují byty s občanskou vybaveností, což způsobuje značné konstrukční nepravidelnosti zejména v prvním nadzemním podlaží. V takovém případě je třeba kombinovat zjednodušený model (v pravidelné části stavby) s *podrobnějším modelem* založeným na řešení stěnodeskových konstrukcí pomocí MKP resp. MHP (v nepravidelné části stavby). Takové řešení je uplatněno v programu JADRO, který operuje v rámci subsystému KONSTRUKCE v systému SAPRO. Naznačené kombinaci se podrobněji věnujeme v osmé kapitole, kde ji též dokládáme jednoduchým ilustrativním příkladem.

Druhou složkou systému, o který se zajímáme při sledování interakce, jsou *základové konstrukce s podložím*. Poddajnými konstrukcemi - deskami na pružném podkladě jsme se zabývali v odst. 3.6.4. Nyní se budeme detailněji věnovat konstrukcím spočívajícím na dvouparametrickém podloží prostřednictvím *tuhých základových pásů*. Pozornost bude rovněž věnována vzájemnému ovlivňování pásů.

### 3.8.1 Neovlivňující se základové prvky

Jak bylo vyloženo ve druhé kapitole, dvouparametrický model respektuje smykovou tuhost podloží, jejímž důsledkem je vzájemné ovlivňování pásů. Je-li vzdálenost pásů dostatečně velká v porovnání s šířkou smykové kotliny, k ovlivňování pásů buď nedochází vůbec nebo jen lokálně (ve vnitřních koutech), jak je patrné z obr. 3.27.



Obr. 3.27: Základ vytvořený z pásů

V obrázku jsou vyznačeny čtyři základní typy základových pásů:

Přemístění tuhého prvku I je určeno svislými posuny koncových průřezů 1,2 a lineární aproximací posunů mezi těmito průřezy. Vliv okolního prostředí se vyjádří náhradními tuhostmi  $C_1^*$  a  $C_2^*$  podle vzorců (2.38). Snadno nahlédneme, že matice tuhosti podloží je vyjádřena vzorcem (2.109), v němž je třeba zaměnit materiálové konstanty  $C_3^*$  a  $C_4^*$  konstantami  $C_1^*$  a  $C_2^*$ , takže

$$K_I = \frac{bl}{3} C_1^* \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2b}{l} C_2^* \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

Matice tuhosti prvku II (tj. koncového prvku) se získá z matice  $K_I$  přičtením doplňkové matice

$$\Delta K_{II} = 2b\sqrt{C_1 C_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} C_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

vyjadřující smykovou tuhost přilehlých oblastí A,B vyznačených na obr. 3.27. Při odvození jsme vyšli z jednotkového posunu v uzlu 2 a k popisu deformovaného povrchu jsme použili aproximaci

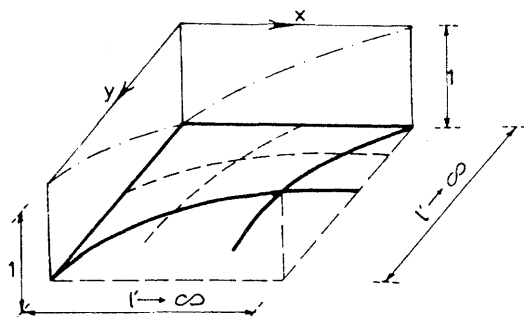
$$\begin{aligned} w_A(x, y) &= e^{-\sqrt{C_1/C_2}x} \cdot e^{-\sqrt{C_1/C_2}y}, & \text{v částech A} \\ w_B(x, y) &= e^{-\sqrt{C_1/C_2}x}, & \text{v části B} \end{aligned} \quad (3.170)$$

Prvek III se uplatní v místě přerušeni stěny. Vyjadřuje tuhost ohýbaného pásu na pružném podloží. Jeho matice tuhosti je součtem matice tuhosti vlastního pásu, kterou vypočteme při zanedbání kroucení ze vzorce (2.101), a matice tuhosti podloží podle (2.110).

Prvek IV vyjadřuje tuhost podloží v místě přerušenoého základového pásu. Numerické výpočty ukázaly, že z hlediska interakce konstrukce s podložím není podstatného rozdílu, počítáme-li matici tuhosti podle vzorce (2.110) nebo zjednodušeně pomocí (3.168). Další možnost výpočtu matice tuhosti vyplyne z následujícího odstavce 3.8.2.

Prozatím jsme předpokládali, že se rovnoběžné pásy vzájemně neovlivňují. Naopak ovlivňování podélných a příčných pásů nelze pominout. Korekturu ve *vnitřním koutu* provedeme za zjednodušeného předpokladu, že dochází pouze k rovnoměrnému zatlačení pásu bez naklonění základové spáry. Posun povrchu zeminy ve vnitřním koutu při jednotkovém zatlačení pásu je vyjádřen vzorcem

$$w_C(x, y) = e^{-\sqrt{C_1/C_2}x} + e^{-\sqrt{C_1/C_2}y} - e^{-\sqrt{C_1/C_2}x} e^{-\sqrt{C_1/C_2}y} \quad (3.171)$$



Obr. 3.28: Deformace povrchu zeminy ve vnitřním koutu

a je znázorněn v obr. 3.28 .

Korigující (zápornou) sílu ve vnitřním koutovém uzlu oblasti C vypočteme pomocí principu virtuálních posunů ze vzorce

$$\Delta R = \lim_{i' \rightarrow \infty} \int_0^{i'} \int_0^{i'} \left\{ C_1 w_C^2 + C_2 \left[ \left( \frac{\partial w_C}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_C}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - R_0. \quad (3.172)$$

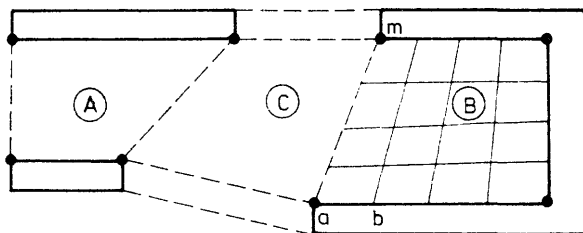
Síla  $R_0$  by vyšla ve vnitřním uzlu oblasti C, kdybychom neuvažovali ovlivňování křížujících se ortogonálních pásů a předpokládali, že se povrch zeminy v jejich okolí zdeformuje do dvou válcových ploch. Vzhledem k prvním dvěma členům aproximace (3.171) je síla  $R_0$  rovněž obsažena v dvojném integrálu výrazu (3.172). Oba členy se tudíž ruší a integrace zbývajících členů dává

$$\Delta R = -\frac{5}{4} C_2. \quad (3.173)$$

Uplatnění odvozené síly v podmínkách rovnováhy (v matici tuhosti základových konstrukcí) není třeba komentovat.

### 3.8.2 Interakce základových prvků

Vzorcem (2.32) je určena nutná minimální vzdálenost rovnoběžných pásů, při níž nedochází k vzájemné interakci vlivem smykové tuhosti podloží. Uvedenou podmínku zpravidla nelze splnit ve středních chodbových traktech stěnových systémů budov. Možné konfigurace základových pásů jsou vyznačeny v obr. 3.29.



Obr. 3.29: Interakce základových pásky

Smykovou tuhost polí A,B,C a jejich vliv na interakci lze vystihnout dvěma způsoby:

a) V klasické variantě považujeme každé pole za subkonstrukci, kterou pokryjeme izoparametrickými prvky. Vyhovují čtyřúhelníkové prvky s bilinéární aproximací svislých posunů (viz pole B). Po eliminaci vnitřních stupňů volnosti se získá kondenzovaná matice tuhosti pole, kterou je třeba transformovat tak, aby byly splněny podmínky spojitosti posunů na hranicích se základovými pásky. Transformační matice se získají z kinematických vztahů mezi svislými posuny uzlů  $a, b, \dots, m$ , (obr. 3.29) a parametry přetvoření vrchní stavby (srov. čl. 3.4), jež jsou prvotními neznámými v programu JADRO.

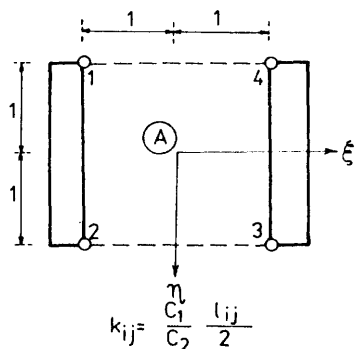
b) Druhá varianta umožňuje stanovit matici tuhosti polí A,B,C přímo pomocí speciální volby bázových funkcí, jež jsou odvozeny z diferenciální rovnice dvouparametrického modelu a respektují lineární průběh posunů na hranici s tuhými pásky. Tato varianta, které dáváme v programu JADRO přednost, využívá zobrazení na jednotkový prvek (obr. 3.30). Svislé posuny aproximujeme funkcí

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) w_i \\ &= \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Bázové funkce pro tři typy prvků z obr. 3.29 jsou uvedeny v následující tabulce 3.7.

### Příklad 3.3

Výstižnost popsaného modelu ukážeme na příkladě vyšetření napjatosti prostorové stěnové konstrukce na obr. 3.31, která je založena na pásech a

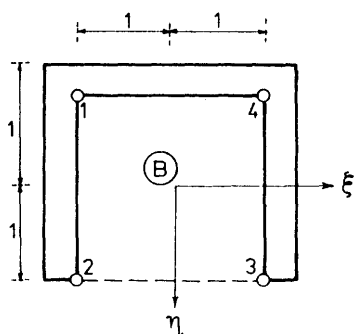


$$N_1 = \frac{\sinh k_{14}(1 - \xi)}{\sinh 2k_{14}} \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{\sinh k_{23}(1 - \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{\sinh k_{23}(1 + \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{\sinh k_{14}(1 + \xi)}{\sinh 2k_{14}} \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

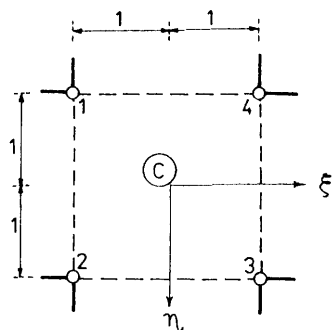


$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{\sinh k_{23}(1 - \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{\sinh k_{23}(1 + \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \frac{1}{2}(1 - \eta)$$



$$N_1 = \frac{\sinh k_{14}(1 - \xi)}{\sinh 2k_{14}} \frac{\sinh k_{12}(1 - \eta)}{\sinh 2k_{12}}$$

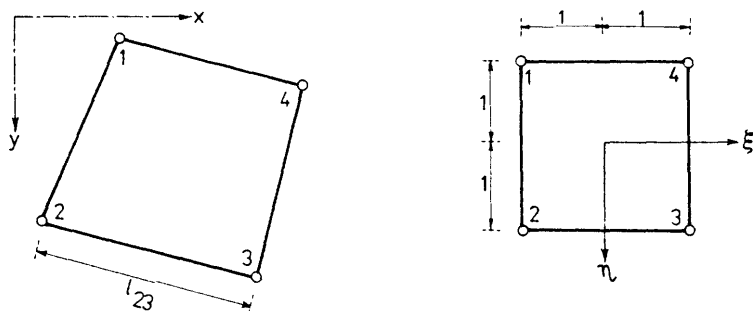
$$N_2 = \frac{\sinh k_{23}(1 - \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{\sinh k_{12}(1 + \eta)}{\sinh 2k_{12}}$$

$$N_3 = \frac{\sinh k_{23}(1 + \xi)}{\sinh 2k_{23}} \frac{\sinh k_{34}(1 + \eta)}{\sinh 2k_{34}}$$

$$N_4 = \frac{\sinh k_{14}(1 + \xi)}{\sinh 2k_{14}} \frac{\sinh k_{34}(1 - \eta)}{\sinh 2k_{34}}$$

Tabulka 3.7: Bázové funkce pro prvky podloží





Obr. 3.30: Základový prvek

zatížena jednak svisle, jednak vodorovně větrem ve směru osy  $Y$  a  $Z$ . V půdorysu jsou vyznačeny nejdůležitější typy základových prvků (III-průběžný pás, IV-přerušovaný pás) i "zeminových prvků" (A,B,C) k vystižení interakce mezi pásy.

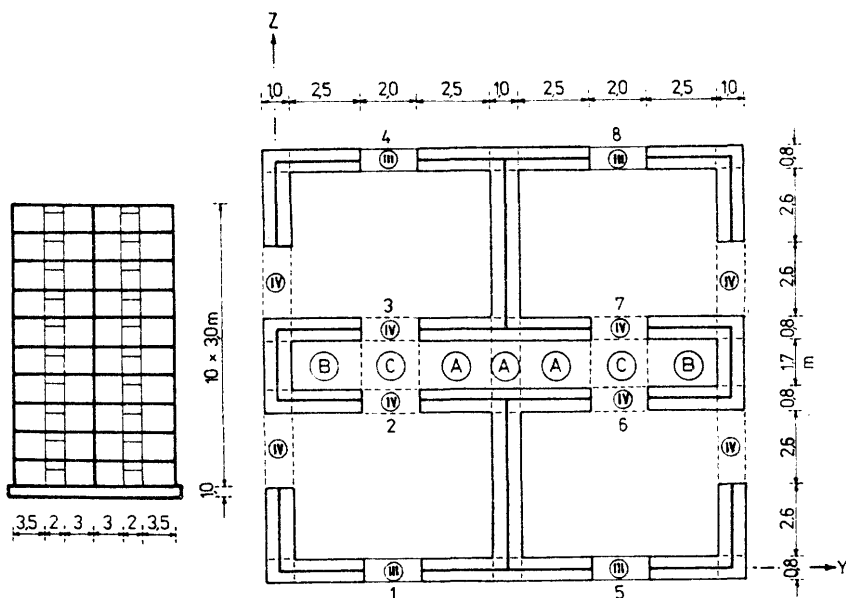
### Řešení:

Výpočet byl proveden ve třech variantách

- $\alpha$ ) Winklerův model:  $C_1 = 10 \text{ MNm}^{-3}$ ,  $C_2 = 0$ ,  
 $\beta$ ) Dvouparametrický model:  $C_1 = 10 \text{ MNm}^{-3}$ ,  $C_2 = 5 \text{ MNm}^{-1}$ ,  
 $\gamma$ ) Dvouparametrický model:  $C_1 = 10 \text{ MNm}^{-3}$ ,  $C_2 = 10 \text{ MNm}^{-1}$ .

Výsledky jsou uvedeny v následujících obrázcích. V obr. 3.32 jsou axonometricky vyznačeny průběhy normálových kontaktních napětí v základové spáře při svislém zatížení. Vzhledem k symetrii je vyznačena jedna čtvrtina konstrukce. Zvláštností dvouparametrického modelu je koncentrace napětí při koncových průřezech neprůběžných pásů, která se ve výpočtu projevuje jako soustředěná koncová (smyková) síla. Je to obdoba koncentrace napětí pod tuhým razníkem na pružném poloprostoru. V programu JADRO se tato skutečnost bere v úvahu při výpočtu napětí - koncové síly v uzlech jsou na prvku nahrazeny ekvivalentním lineárním průběhem spojitých kontaktních napětí. Koncentrace se částečně projevuje i při přechodu tuhého pásu do pásu poddajného (typ III), i když je podstatně méně výrazná, než při přerušení pásu (typ IV). Ještě výrazněji se typ zvoleného modelu podloží projeví při výpočtu posouvajících sil v nadpražích (obr. 3.33) umístěných v řadách otvorů 1,4,6,7.

Při vodorovném zatížení je vliv zvoleného modelu na poddajnost v konstrukci podstatně menší. Neuplatní se tak výrazně jako v předchozím příkladě ani při výpočtu kontaktních napětí ani při výpočtu posouvajících sil v nadpražích.

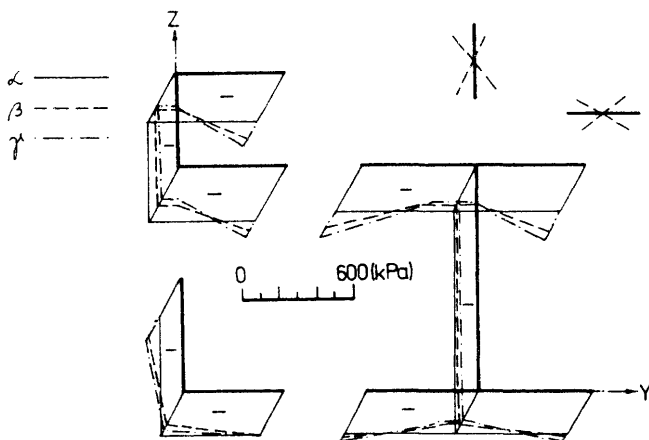


Obr. 3.31: Stěnová konstrukce založená na pásech

### 3.9 Patch test

Ačkoliv bylo dosaženo významného pokroku v matematických základech MKP, pro některé problémy a prvky dosud postrádáme důkazy konvergence. Patří mezi ně např. deskové prvky založené na Mindlinově teorii desek nebo prvky, u kterých při výpočtu matice tuhosti je použita selektivní nebo redukovaná integrace. V takových případech je rozhodující při posuzování konvergence *patch test*, zavedený Ironsem v [43].

Aby byla zajištěna konvergence řešení MKP k přesnému řešení příslušné soustavy diferenciálních rovnic, použitá aproximace musí splňovat podmínku *stability a konzistence*. Stabilita v lineární pružnosti je zajištěna, pokud použitá matice tuhosti má správnou hodnotu, což zamezuje vzniku falešných mechanismů. Konzistence je tradičně testována pomocí *patch testu*. V klasickém Ironsově *patch testu* se vytvoří jednoduchá soustava několika prvků (záplata - patch) - např. podle obr. 3.34. Záplata se ve vnějších uzlech zadají okrajové podmínky odpovídající známému řešení (stavu konstantní deformace). Hodnoty ve vnitřních uzlech se vypočtou pomocí testovaného

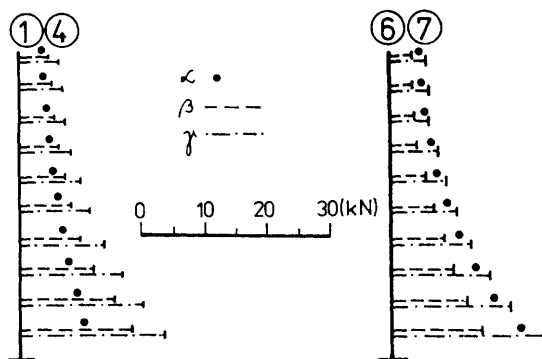


Obr. 3.32: Kontaktní napětí v základové spáře

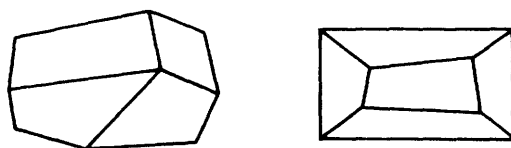
prvku algoritmem MKP. Klasický Ironsův test požaduje, aby byly vypočteny přesné hodnoty nejen posunů, ale i deformací, resp. napětí, a to pro libovolnou velikost a tvar prvků.

Na obr. 3.35 jsou uvedeny výsledky dvou *patch testů* pro rovinný izoparametrický prvek. Na obr. 3.35a odpovídají posuny bodů okraje záplaty stavu konstantního protažení a na obr. 3.35b stavu konstantního zkosení. V obou případech analýza záplaty MKP poskytla přesné hodnoty posunů i napětí ve všech vnitřních bodech.

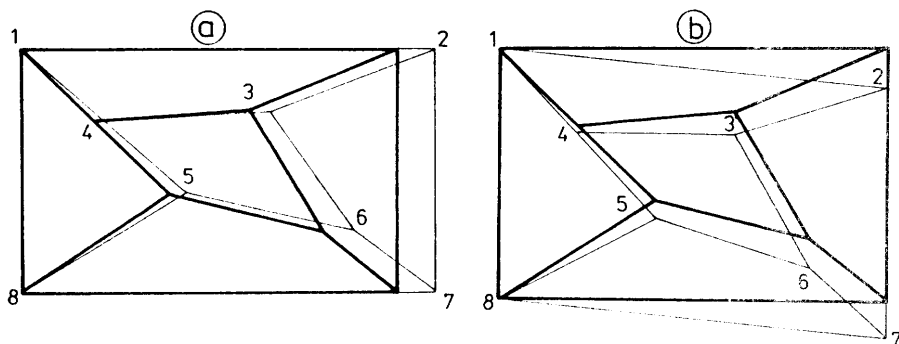
Nedávno byly otevřeny dvě otázky - je *patch test* nutnou podmínkou konvergence? Je postačující podmínkou? Praktické zkušenosti ukazují, že některé prvky nesplňují *patch test* a přesto konvergují ke správnému řešení. Jeden takový příklad je uveden v [71], jiný v [16]. Je proto snaha formulovat poněkud slabší podmínky konvergence. První pokus byl učiněn v [71] zavedením oslabeného *patch testu*, který požaduje, aby chyba byla  $0(h)$  nebo lepší, jestliže velikost záplaty  $h$  se zmenšuje. Schéma oslabeného *patch testu* je na obr. 3.36. Belytschko však v [16] ukázal, že takto formulovaný oslabený *patch test* splňují i prvky, které nekonvergují ke správnému řešení. Ve stejném článku je navržen jiný oslabený *patch test*, který nemění velikost záplaty, avšak postupně zjemňuje síť prvků podle obr. 3.37. Záplata má čtvercový tvar a bod  $A_9$  je umístěn mimo střed čtverce. Body  $A_5, A_6, A_7, A_8$  leží na středech stran čtverce. Body  $B_1$  až  $B_9$  se získají bilineárním mapováním čtverce  $A_1A_2A_3A_4$  na čtyřúhelník  $B_1B_2B_3B_4$ . Vznikne tak posloupnost dělení na



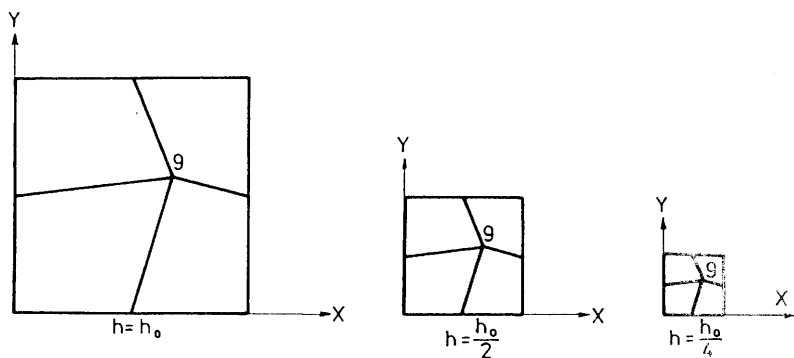
Obr. 3.33: Posouvající síly v nadpražích

Obr. 3.34: Záplata (*patch*)

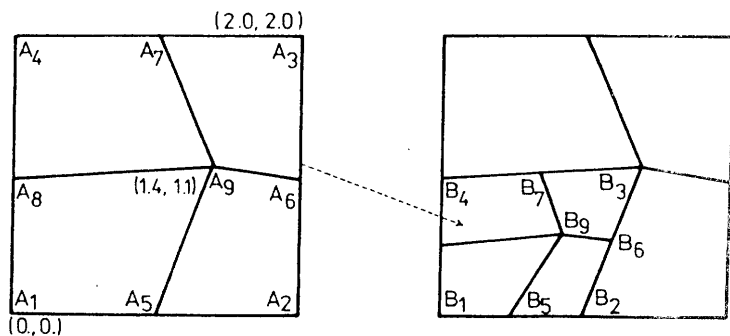
prvky podle obr. 3.38. Pokud se zjemňováním dělení čtverce konvergují získané výsledky ke správnému řešení, potom je zajištěna oslabená podmínka konzistence a testovaný prvek je použitelný k analýze úloh MKP. Jako příklad uvedme deskový izoparametrický prvek podle odst. 3.6.4, který obecně nesplňuje klasický *patch test*. Od určitého poměru *tloušťka/rozpětí* však splňuje oslabený *patch test* podle [16] a je tudíž použitelný pro analýzu desek spočívajících na pružném podloží, pokud nejsou příliš tenké (přibližně pro  $h/l > 0.05$ ).



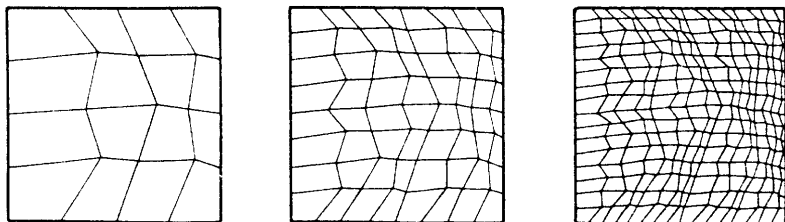
Obr. 3.35: a) Konstattní protažení, b) konstattní zkosení



Obr. 3.36: Oslabený patch test



Obr. 3.37: Bilineární mapování čtverce



Obr. 3.38: Posloupnost dělení na prvky

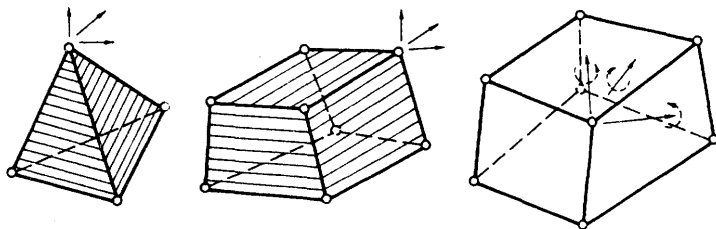
# Kapitola 4

## Tělesa

Analýza masivních těles byla dlouho opomíjená. Ne že by nebylo třeba analyzovat chování třírozměrných těles, nýbrž pro velkou náročnost na paměť a strojový čas. Dnes je situace zcela jiná. Výkon moderních pracovních stanic i jejich paměťová kapacita dovolují řešit i poměrně složitá trojrozměrná tělesa. Pokud jde o aplikaci MKP na analýzu těles, jedná se prakticky o rozšíření poznatků z řešení rovinných úloh na úlohy prostorové. V tomto pojetí se budeme zabývat i popisem prvků, které lze rozdělit do tří skupin

- čtyřstěny (s rovinnými i zakřivenými stěnami)
- cihly (s rovinnými i zakřivenými stěnami)
- prvky s rotačními stupni volnosti.

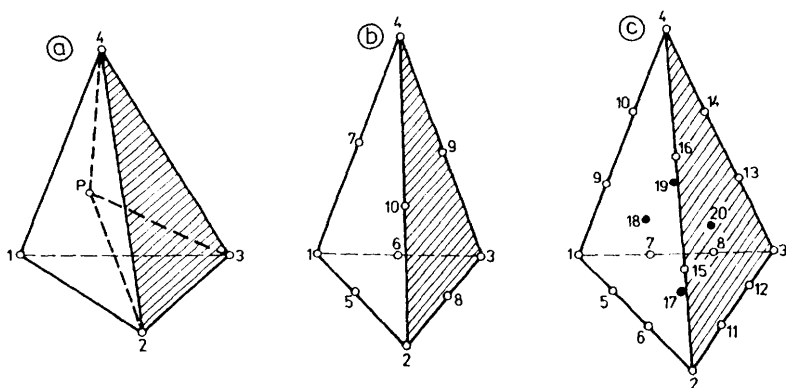
Nejjednodušší reprezentanti jednotlivých skupin jsou na obr. 4.1.



Obr. 4.1: Některé typy prostorových prvků

## 4.1 Čtyřstěny

Nejjednodušší čtyřstěn má 4 uzlové body. Ke každému uzlovému bodu přísluší 3 stupně volnosti - posuny  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ve směrech os  $(x, z, y)$  globální kartézské soustavy souřadnic. Prvek má tedy  $4 \times 3 = 12$  stupňů volnosti. Posuny uvnitř prvku jsou aproximovány lineárními funkcemi, z čehož plyne, že průběh napětí po celém prvku je konstantní. Interpolační funkce je výhodné vyjádřit v objemových souřadnicích. Definice objemových souřadnic je patrná z obr. 4.2a. Souřadnice  $L_1$  se vypočte jako



Obr. 4.2: Lineární, kvadratický a kubický čtyřstěn

$$L_1 = \frac{\text{Objem } P234}{\text{Objem } 1234}.$$

Čtyři souřadnice  $L_1, L_2, L_3, L_4$  jsou vázány vztahem  $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$ . Na čtyřstěnu lze vytvořit celou hierarchii prvků tím, že zvyšujeme stupeň aproximačních polynomů. Schéma prvků s kvadratickou a kubickou interpolací je na obr. 4.2b,c. Pro interpolační funkce platí:

4-uzlový prvek (lineární)

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad N_4 = L_4,$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i.$$



10-ti uzlový prvek (kvadratický)Pro vrcholy  $N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \dots$  atd.Pro středy stran  $N_5 = 4L_1L_2, \dots$  atd.20-ti uzlový prvek (kubický)Pro vrcholy  $N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1, \dots$  atd.Pro středy hran  $N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1), \dots$  atd.Pro středy stěn  $N_{18} = 27L_1L_2L_3, \dots$  atd.

Geometrie všech uvedených prvků je popsána vztahy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^4 N_i z_i. \quad (4.1)$$

Výhoda čtyřstěnu s rovinnými stěnami se projeví především při řešení lineárních úloh, neboť lze snadno získat potřebné matice (tuhosti, hmotnosti) v uzavřeném tvaru podle vzorce

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V. \quad (4.2)$$

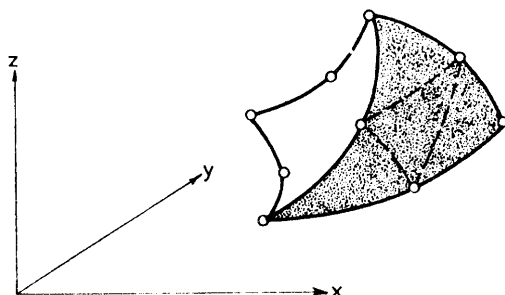
Na základě uvedených interpolačních funkcí lze zkonstruovat čtyřstěn se zakřivenými stěnami. Schéma kvadratického prvku je na obr. 4.3. Geometrie takového prvku je potom popsána vztahy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{10} N_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{10} N_i \mathbf{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^{10} N_i z_i. \quad (4.3)$$

K integraci již ale nelze použít vzorec (4.2), nýbrž k výpočtu matice tuhosti (hmotnosti apod.) je třeba aplikovat numerickou integraci.

## 4.2 Cihly

Cihly (bricks) jsou, stejně jako čtyřúhelníkové prvky v rovinné úloze, velmi populární. V komerčních programech se nejčastěji užívá lineární a kvadratický prvek. K formulaci interpolačních funkcí je výhodné zavést analogicky



Obr. 4.3: Křivočarý kvadratický čtyřstěn

jako ve dvourozměrné úloze izoparametrické souřadnice  $(\xi, \eta, \zeta)$ , které zobrazují skutečné prvky na krychli o hraně 2, jak je patrné z obr. 4.4. Interpolační funkce jsou potom definovány takto:

8-mi uzlový prvek (lineární)

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i).$$

20-ti uzlový prvek (kvadratický)

Pro vrcholy

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2).$$

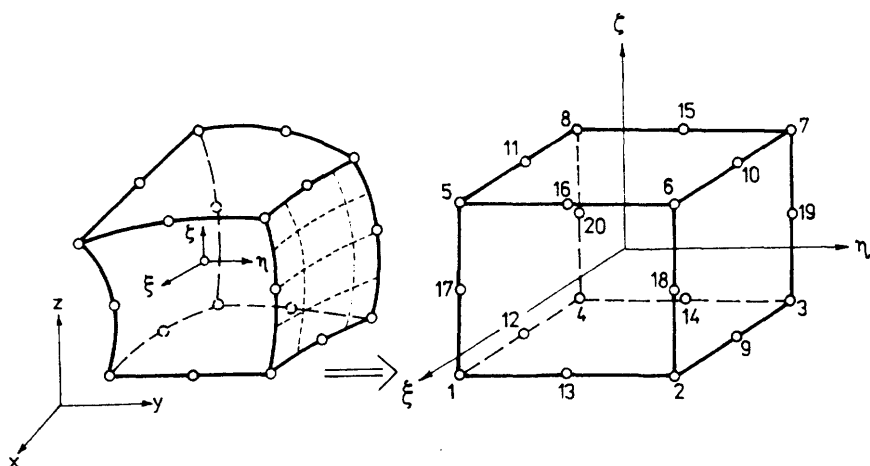
Pro středy stran

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad \text{pro } \xi_i = 0, \quad (4.4)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad \text{pro } \eta_i = 0, \quad (4.5)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad \text{pro } \zeta_i = 0. \quad (4.6)$$

Při výpočtu matice tuhosti je třeba znát derivace interpolačních funkcí podle souřadnic  $x, y, z$ , Jacobiho matici transformace mezi souřadnicovými



Obr. 4.4: Zobrazení křivočarého čtyřstěnu na krychli

soustavami  $(x, y, z)$  a  $(\xi, \eta, \zeta)$

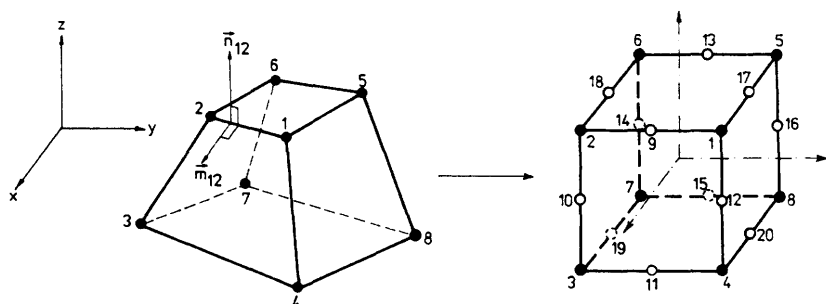
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

a determinant této matice, který se uplatní při transformaci elementárního objemu

$$dx dy dz = \det J d\xi d\eta d\zeta.$$

### 4.3 Cihla s rotačními stupni volnosti

Prvek navržený nedávno Ibrahimbegovičem a Wilsonem [42] je logickým pokračováním rovinného prvku s rotačními stupni volnosti, jak byl popsán v odst. 3.5.4. Variační princip, na kterém je založen, byl uveden rovněž v odst. 3.5.4. Schéma prvku je na obr. 4.5. Prvek je z geometrického hlediska totožný s lineární cihlou. V každém z osmi uzlů má však 6 stupňů volnosti. Vzhledem k tomu, že jde o zcela nový přístup k modelování trojrozměrných těles, je předčasné tento způsob hodnotit. Pokud se však osvědčí ,



Obr. 4.5: Prostorový prvek s rotačními stupni volnosti

je to naplnění snahy získat jedno, dvou a trojrozměrné prvky, které mají v každém uzlu stejné posuny a umožňují tak velmi jednoduché modelování konstrukčních systémů, složených z prutových, plošných a masivních prvků. Geometrie prvku je popsána vztahy typu (4.3). Interpolační funkce pro posuny jsou odvozeny z dvacetíuzlového prvku

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=9}^{20} N_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad (4.7)$$

kde  $\Delta \mathbf{u}_i$  jsou hierarchické posuny a  $N_i$  jsou dány vztahy (4.4) až (4.6) s tím, že (4.4) platí pro  $I = 17, 18, 19, 20$ , (4.5) pro  $I = 9, 11, 13, 15$  a (4.6) pro  $I = 10, 12, 14, 16$ . Postupem obdobným jako u rovinného prvku se hierarchické stupně volnosti vyjádří pomocí posunů a pootočení ve vrcholech prvku. Modifikace se nejnázne vysvětlí na formování nové interpolační funkce podél hrany 1-2. Zavedme zde lokální soustavu souřadnic, reprezentovanou vektory  $\vec{l}_{12}, \vec{m}_{12}, \vec{n}_{12}$ . Vektor  $\vec{l}_{12}$  leží na hraně 1-2 a vektory  $\vec{m}_{12}$  a  $\vec{n}_{12}$  v rovině kolmé k  $\vec{l}_{12}$  (viz obr. 4.5)<sup>1</sup>. Obecně lze tyto vektory definovat pro libovolnou hranu tvořenou vrcholy  $J$  a  $K$ . V maticové symbolice platí

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{JK}^T &= \{x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - z_j\}, \\ \mathbf{l}_{JK}^T \mathbf{m}_{JK} &= \mathbf{l}_{JK}^T \mathbf{n}_{JK} = \mathbf{m}_{JK}^T \mathbf{n}_{JK} = 0. \end{aligned}$$

Hierarchické posuny ve směru  $\vec{m}_{JK}$  a  $\vec{n}_{JK}$  (kolmo k hraně) se vyloučí stejně jako u rovinného prvku, hierarchický posun podél hrany (ve směru

<sup>1</sup>Vektor  $\vec{m}_{12}$  je rovnoběžný s s rovinou  $(x, y)$ .

$\bar{l}_{JK}$ ) se vyloučí z podmínky, že celkový posun ve směru  $\bar{l}_{JK}$  je aritmetickým průměrem posunů v uzlech  $J, K$ . Tato podmínka je konzistentní s požadavkem lineárního průběhu posunů ve směru hrany  $J, K$ . Po zavedení popsanych podmínek do (4.7) získáme pro interpolaci posunů vztah

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 N_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=9}^{20} N_i \frac{l_{JK}}{8} (\mathbf{n}_{JK} \mathbf{m}_{JK}^T - \mathbf{m}_{JK} \mathbf{n}_{JK}^T) (\omega_K - \omega_J), \quad (4.8)$$

kde

$$\omega_K^T = \{\omega_{xK}, \omega_{yK}, \omega_{zK}\}, \quad \omega_J^T = \{\omega_{xJ}, \omega_{yJ}, \omega_{zJ}\},$$

$l_{JK}$  je délka hrany  $J - K$ . Pootočení tuhého okolí  $\omega^T = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$  vnitřního bodu prvku je funkce a priori nezávislá na  $\mathbf{u}$  a je aproximována následujícím způsobem

$$\omega = \sum_{i=1}^8 N_i \omega_i.$$

Jak je zřejmé z obr. 4.5, má výsledný prvek 48 stupňů volnosti. Pokud matici tuhosti prvku budeme odvozovat z funkcionálu (3.87), dojdeme ke smíšenému modelu a je třeba zavést ještě aproximaci pro antisymetrickou část tenzoru napětí  $\boldsymbol{\tau}$ . S ohledem na to, že  $\boldsymbol{\tau}$  se vyskytuje ve funkcionálu (3.87) pouze ve funkčních hodnotách, není třeba zajišťovat žádnou spojitost na hranici mezi prvky, proto zavedme

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha},$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}. \quad (4.9)$$

Deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se vyjádří ze vztahu (4.8) takto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^8 (\mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{G}_i \omega_i),$$

kde

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\},$$

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Definujme pro každou hranu prvku transformační matici

$$\mathbf{T}_{IJ} = \frac{l_{IJ}}{8} (\mathbf{n}_{IJ} \mathbf{m}_{IJ}^T - \mathbf{m}_{IJ} \mathbf{n}_{IJ}^T),$$

pomocí které lze vyjádřit matici  $\mathbf{G}_i$

$$\mathbf{G}_i = \sum \mathbf{B}_J \mathbf{T}_{iJ}, \quad (4.11)$$

kde se sčítá přes všechny hrany, které se stýkají v uzlu  $i$ . Matice  $\mathbf{G}_i$ , tak jak je definována, by vedla k vytvoření prvku se *smykovým ztuhnutím*. Proto je třeba ji modifikovat obdobně, jak bylo ukázáno u deskového prvku.

Dále je třeba vypočítat

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^8 (\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i + \hat{\mathbf{F}}_i \boldsymbol{\omega}_i),$$

kde

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \sum \mathbf{A}_J \mathbf{T}_{iJ} \quad (\text{sčítá se stejně jako v (4.11)}).$$

Ve funkcionálu (3.87) se vyskytuje výraz  $\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}$ , pro jehož aproximaci po prvku platí

$$\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^8 [\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i + (\hat{\mathbf{F}}_i - \mathbf{N}_i \mathbf{I}) \boldsymbol{\omega}_i] = \sum_{i=1}^8 (\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{F}_i \boldsymbol{\omega}_i). \quad (4.13)$$

Po dosažení do funkcionálu (3.87) postupně z (4.10), (4.11), (4.9), (4.12) a (4.13) získáme matice

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \int_{\Omega} [\mathbf{B}_i, \mathbf{G}_i]^T \mathbf{D} [\mathbf{B}_j, \mathbf{G}_j] d\Omega, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H}^T = \sum_{i=1}^8 \int_{\Omega} \mathbf{S}^T [\mathbf{A}_i, \mathbf{F}_i] d\Omega, \quad \Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\Omega. \quad (4.15)$$

Pro izolovaný prvek lze pomocí uvedených matic získat vztah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\frac{1}{\gamma} \Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (4.16)$$

kde

$$\mathbf{r}^T = \{\mathbf{u}_1, \omega_1, \mathbf{u}_2, \omega_2, \dots, \mathbf{u}_8, \omega_8\}$$

a  $\mathbf{R}$  je vektor transformovaného zatížení. Vzhledem k tomu, že  $\alpha$  zahrnuje pouze vnitřní parametry, lze je vyloučit statickou kondenzací, dostaneme

$$\widehat{\mathbf{K}} \mathbf{r} = \mathbf{f}, \quad \text{kde } \widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \gamma \mathbf{H} \Omega^{-1} \mathbf{H}^T.$$

Procesu statické kondenzace se můžeme vyhnout, pokud vyjdeme z funkcionálu (3.89), který vede k posunovému modelu. Dosažením příslušných výrazů do (3.89) obdržíme vztah, který je poněkud odlišný od (4.16) a má tvar

$$[\mathbf{K} + \mathbf{P}] \mathbf{r} = \mathbf{f}, \quad (4.17)$$

kde

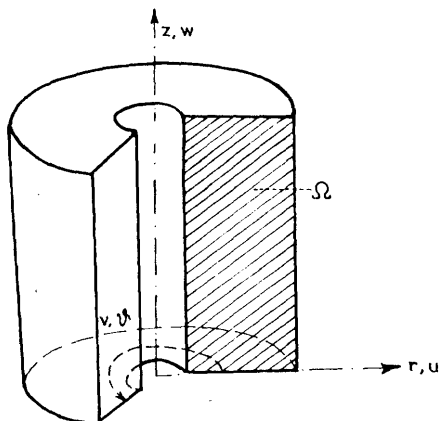
$$\mathbf{P} = \gamma \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \int_{\Omega} [\mathbf{A}_i, \widehat{\mathbf{F}}_i]^T [\mathbf{A}_j, \widehat{\mathbf{F}}_j] d\Omega. \quad (4.18)$$

Zatímco matice  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}$  v (4.14), (4.17) se vypočtou 14-ti bodovou integrací, navrženou v [44] Ironsem, matice  $\mathbf{P}$  se integruje v  $2 \times 2 \times 2$  bodech Gaussovou integrací. Parametr  $\gamma$  byl zaveden v čl. 3.5.4.

## 4.4 Rotačně souměrné kontinuum

V inženýrské praxi se poměrně často vyskytuje úloha analyzovat rotačně souměrné trojrozměrné těleso. Lze to provést způsobem, popsáním v předchozích odstavcích této kapitoly. Avšak v případě, že kromě geometrického tvaru jsou rotačně souměrně rozloženy i fyzikálně-mechanické vlastnosti

tělesa a působící zatížení, redukuje se trojrozměrná úloha na úlohu dvou-rozměrnou. Jako příklad poslouží tlustostěnná válcová nádoba podle obr. 4.6. Vyšrafovaná plocha představuje oblast řešení pro redukovanou dvou-



Obr. 4.6: Řez tlustostěnným válcem. Cylindrická soustava souřadnic

rozměrnou úlohu. K matematické formulaci využijeme soustavu souřadnic  $r, \vartheta, z$ , definovanou obr. 4.6. Odpovídající posuny označme  $u, v, w$ . V případě rotačně souměrného zatížení máme pouze čtyři nenulové složky tenzoru deformace  $\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\vartheta, \gamma_{rz}$ . Příslušné geometrické rovnice mají tvar

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\vartheta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}. \quad (4.19)$$

Fyzikální rovnice jsou definovány pomocí matice tuhosti materiálu. Pro



izotropní materiál platí

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Obdobně jako u rovinné úlohy jsou i zde velmi populární izoparametrické prvky. Pokud jde o výpočet matice tuhosti a vektoru transformovaného zatížení, platí obdobné vztahy až na to, že integrace se provádí na výřezu o úhlu 1 radián, takže např. pro matici tuhosti platí :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz.$$

Ačkoliv jde o dvourozměrnou úlohu, nelze ve většině případů použít nekompatibilní funkce.

## Kapitola 5

# Lineární dynamika a stabilita

Až dosud bylo pojednáno o analýze konstrukcí při zatíženích, která se mění tak pomalu, že není třeba vzít v úvahu vznikající setrvačné síly. V praxi však je řada zatížení, která způsobí *rozkmitání konstrukce*. Tato zatížení lze v zásadě rozdělit do několika skupin

- účinky rotujících strojů
- účinky pohybujícího se zatížení
- účinky nárazu letících předmětů
- účinky vzdušného proudu, především větru
- účinky zemětřesení
- účinky výbuchů.

K serióznímu posouzení účinků zmíněných zatížení je nezbytná dynamická analýza. Tu lze rozdělit na dvě základní úlohy

- řešení vlastního kmitání
- řešení vynuceného kmitání

Analogickou úlohou k řešení vlastního kmitání je problém *lineární stability*. Pro dané rozložení vnitřních sil se hledá takový koeficient  $\lambda$ , kterým je třeba přenásobit působící zatížení, abychom obdrželi zatížení kritické.

## 5.1 Základní pojmy a vztahy

### 5.1.1 Matice hmotnosti

V první kapitole byla na základě variačního principu odvozena pohybová rovnice (1.199) a vzorec pro výpočet matice hmotnosti (1.200). Ze vzorce je zřejmé, že struktura matice hmotnosti je obecně stejná jako matice tuhosti. Zvláště markantní je to u prutu, kde v případě uložení na pružném podkladu je matice tuhosti pružného podkladu až na násobný koeficient shodná s maticí hmotnosti prutu.

Pro matici hmotnosti klasického prutu s uvážením vlivu smykových sil na deformaci platí

$$\mathbf{M} = \frac{\mu l}{(1 + 2\kappa)^2} \mathbf{K}_a, \quad (5.1)$$

kde  $\mathbf{K}_a$  je matice určená vzorcem (2.110).

Takto získaná matice hmotnosti je *konzistentní maticí hmotnosti*. V mnoha případech však vystačíme s jednodušším modelem setrvačných vlastností prvku. Hmotnost prvku prostě soustředíme do uzlových bodů. Vzhledem k tomu, že u složitějších prvků (zvláště u prvků složitějšího tvaru) je rozdělení hmotností do uzlů komplikovanější, používá se následující postup - vypočítá se konzistentní matice hmotnosti a členy mimo hlavní diagonálu se zanedbají. Tím ovšem není zachována celková hmotnost prvku. Proto je třeba všechny prvky diagonalizované matice přenásobit koeficientem <sup>1</sup>

$$\alpha = \delta \frac{M}{\sum m_{ii}}.$$

$M$  zde značí celkovou hmotnost prvku a  $m_{ii}$  jsou diagonální prvky matice hmotnosti, které přísluší pouze posunům uzlů. Uvedený postup je zvláště výhodný v souvislosti s izoparametrickými prvky. Součinitel  $\delta = 1$  pro jednorozměrný prvek,  $\delta = 2$  pro dvourozměrný prvek a  $\delta = 3$  pro trojrozměrný prvek.

### 5.1.2 Matice počátečních napětí

Hledání kritického zatížení je úlohou lineární stability, v níž sestavujeme podmínky rovnováhy na deformované konstrukci. Proto vnější zatížení doplníme o účinek *ekvivalentních sil*, které jsou důsledkem deformovaného tvaru

<sup>1</sup>Pokud prvek má jako uzlové parametry kromě posunů i pootočení, korekce se týká pouze hmotností příslušných k posunům.

konstrukce. Matice počátečních napětí pak slouží k transformaci ekvivalentních sil do uzlů prvku. Obecnější definice matice počátečních napětí je uvedena v deváté kapitole, pojednávající o řešení nelineárních úloh. Pro lepší pochopení tohoto problému se přidržíme prutového prvku na obr. 5.1.

Spojité ekvivalentní zatížení  $f_{ekv}$  odvodíme z podmínky ekvivalence sil působících na diferenciální element délky  $\Delta x$  deformovaného prutu:

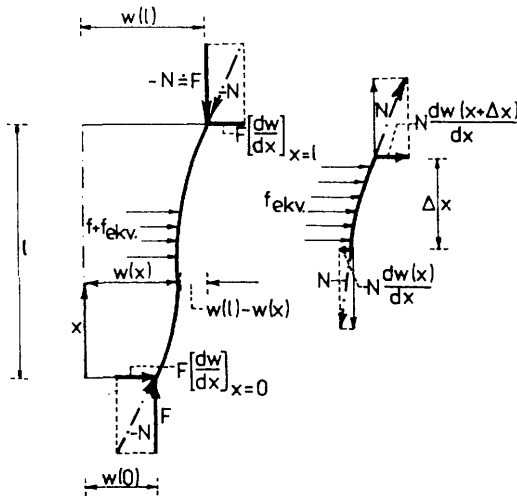
$$f_{ekv}\Delta x + N \left[ \frac{dw(x + \Delta x)}{dx} - \frac{dw(x)}{dx} \right] = 0.$$

Odtud limitním přechodem

$$f_{ekv} = -N \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Předpokládáme, že  $N > 0$  je tahem.

Ke spojitému zatížení přísluší navíc podle obr. 5.1 vodorovné síly  $F \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0}$  a  $-F \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=l}$ , které jsou důsledkem šikmé orientace normálové síly  $N$ .



Obr. 5.1: Ekvivalence sil na deformovaném prutu

K matici počátečních napětí dojdeme z rovnosti virtuálních prací podle

obr. 5.1. Platí

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{r} = F \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} \delta w(0) - F \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=l} \delta w(l) - \int_0^l \delta w N \frac{d^2 w}{dx^2} dx.$$

Integrací per partes a s uvážením, že  $(-N) \approx F$  dostaneme vztah

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{r} = \int_0^l \frac{d}{dx} (\delta w) N \frac{dw}{dx} dx.$$

Odtud po zavedení příslušné aproximace průhybu obdržíme

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_0^l \frac{d \mathbf{N}^T}{dx} N \frac{d \mathbf{N}}{dx} dx.$$

Obdobně jako v případě matice hmotnosti, lze pro klasický prutový prvek vyjádřit matici počátečních napětí prostřednictvím matice  $\mathbf{K}_b$  ze vztahu (2.110).

$$\mathbf{K}_\sigma = \frac{N}{(1 + \kappa)^2} \mathbf{K}_b.$$

Analogicky lze odvodit matici počátečních napětí pro desku ze vztahu

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{r} = & \int_\Omega \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) N_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right] d\Omega. \end{aligned}$$

### 5.1.3 Pohybová rovnice

Matice hmotnosti udává rozložení celkové hmotnosti do jednotlivých stupňů volnosti, matice počátečních napětí popisuje vliv statických osových resp. membránových sil na tuhost konstrukce z hlediska teorie II. řádu. Při kmitání však vznikají i disipativní síly. Protože znalosti o nich jsou chabé, zavádí se jejich vliv do podmínky dynamické rovnováhy obvykle formou tzv. viskózního útlumu -  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}$ . Matice  $\mathbf{C}$  se nazývá maticí útlumu. Podrobněji o jejím vyjádření je pojednáno v odst. 5.3.1.

Zohledníme-li disipativní síly a vliv počátečních napětí, lze pohybovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma)\mathbf{r} = \mathbf{R}. \quad (5.2)$$

### 5.1.4 Lineární stabilita

Vyšetřování stability konstrukcí je problémem obecně nelineárním. Úplné řešení úlohy je možné získat pouze aplikací metod nelineární mechaniky. Tento stručný odstavec je věnován otázce lineární stability takových konstrukcí, jakými jsou prutové a do značné míry i deskové konstrukce. Jde v podstatě o hledání kritického zatížení. Formulace úlohy je jednoduchá, vyjeme-li z podmínky rovnováhy na deformované konstrukci. Oproti klasické lineární mechanice v podmínce rovnováhy přibude člen s maticí počátečních napětí. Dříve než přistoupíme k čistě stabilní úloze, ponecháme v podmínce rovnováhy i setrvačné síly. Vlastní kmitání konstrukce s počátečním napětím (o kterém předpokládáme, že se během kmitání nemění a že je rovnovážné) je popsáno rovnicí

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

kde  $\omega$  je vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání a  $\mathbf{y}$  je vlastní tvar kmitání. Podrobnosti k těmto veličinám jsou uvedeny v následujícím odstavci 5.1.5. Tato homogenní soustava rovnic popisuje vlastní kmitání konstrukce s uvažováním vlivu osových (resp. membránových) statických sil.

Uvažujme nyní proporcionální zatěžování  $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}_0$ , kde  $\mathbf{R}_0$  vyjadřuje rozložení zatížení po konstrukci a  $\lambda$  je parametr. Jestliže zatížení  $\mathbf{R}_0$  odpovídá matici  $\mathbf{K}_\sigma$ , potom zatížení  $\mathbf{R}$  přísluší matici  $\lambda \mathbf{K}_\sigma$ . Za daného rozložení vnějších sil může být při určité hodnotě parametru  $\lambda$  vlastní frekvence nulová. Potom se jedná o případ lineární stability, popsany rovnicí

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Abychom dosáhli formální shody s následující rovnicí vlastního kmitání (5.7), položíme v (5.3)  $\lambda \mathbf{K}_\sigma = -\lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma$ , tj.

$$(\mathbf{K} - \lambda \bar{\mathbf{K}}_\sigma) \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

K řešení úlohy (5.4) můžeme použít kteroukoliv z metod popsanych v čl. 5.2. Z (5.4) lze vypočítat  $n$  vlastních čísel  $\lambda_i$ . Z praktického hlediska má však největší význam  $\lambda_1$ , tj. nejnižší vlastní číslo odpovídající nejnižší hodnotě kritického zatížení.

### 5.1.5 Vlastní kmitání lineárních soustav

Kmitání způsobené vnějším zatížením je popsáno nehomogenní diferencíální rovnicí (5.2), ke které přísluší buď homogenní nebo nehomogenní okrajové

podmínky. Kmitání vyvolané pohybem některých bodů konstrukce se řídí homogenní rovnicí (5.2), okrajové podmínky jsou však nehomogenní. Konečně vlastnímu kmitání odpovídá homogenní rovnice (5.2) s homogenními okrajovými podmínkami. Velký význam při řešení úloh lineární dynamiky má homogenní diferenciální rovnice (5.2) s homogenními okrajovými podmínkami a s vynechaným členem  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}$ . Z hlediska mechaniky konstrukcí jde o úlohu vlastního netlumeného kmitání. Rovnice (5.2) se zjednoduší na tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Řešení rovnice (5.5) hledejme ve tvaru

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{y} \sin \omega t. \quad (5.6)$$

Výpočtem  $\ddot{\mathbf{r}}$  a dosazením do (5.5) obdržíme základní rovnici vlastního netlumeného kmitání

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (5.7)$$

Z matematického hlediska představuje rovnice (5.7) obecný problém vlastních čísel pro matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$ . Je známo, že rovnice (5.7) má netriviální řešení, pokud

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (5.8)$$

Je-li řád matic  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$   $n$ , potom z podmínky (5.8) lze vypočítat  $n$  vlastních frekvencí  $\omega_i$  a  $n$  vlastních tvarů  $\mathbf{y}_i$ . Vlastní frekvence budeme řadit podle velikosti  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$  ( $\omega_i \geq 0$ ). Sestavíme-li vektory  $\mathbf{y}_i$  do matice  $\mathbf{Y}$  ( $\mathbf{y}_i$  tvoří sloupce matice  $\mathbf{Y}$ ) a kvadráty vlastních frekvencí do diagonální matice  $\Omega^2$ , můžeme všechna řešení rovnice (5.7) zahrnout do jediné maticové rovnice

$$\mathbf{K}\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{Y}\Omega^2. \quad (5.9)$$

Matice  $\mathbf{K}$  je vždy pásová. Matice hmotnosti může být podle způsobu aproximace setrvačných sil buď pásová (konzistentní matice hmotnosti) nebo diagonální (soustředěné hmotnosti). Konzistentní matice  $\mathbf{M}$  je vždy pozitivně definitní. Diagonální matice hmotnosti je pozitivně definitní pouze v případě, že  $m_{ii} > 0$  pro všechna  $i$  od 1 do  $n$ . Jestliže některý prvek  $m_{ii} = 0$ , potom je diagonální matice  $\mathbf{M}$  pozitivně semidefinitní.

Jestliže  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  jsou pozitivně definitní, jsou všechna vlastní čísla kladná. Jestliže  $\mathbf{M}$  je diagonální s  $m$  prvky na diagonále rovnými nule ( $\mathbf{M}$  je pozitivně semidefinitní),  $m$  vlastních čísel roste nade všechny meze.

### 5.1.6 Ortogonalita vlastních tvarů

Předpokládáme, že všechna  $\omega_i > 0$ . Pro  $i$ -tý vlastní tvar platí

$$-\omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{y}_i + \mathbf{K} \mathbf{y}_i = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Obdobně pro  $j$ -tý vlastní tvar

$$-\omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{y}_j + \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Vynásobíme rovnici (5.11) zleva vektorem  $-\mathbf{y}_j^T$  a podobně rovnici (5.10) zleva vektorem  $\mathbf{y}_i^T$ . Obdržíme

$$\omega_i^2 \mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j^T \mathbf{K} \mathbf{y}_i = \mathbf{0}, \quad -\omega_j^2 \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j + \mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Vzhledem k symetrii matic  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$  platí

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{y}_j^T \mathbf{K} \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j. \quad (5.13)$$

Sečteme-li rovnice (5.12) a uvážíme přitom vztahy (5.13), vyjde

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

Předpokládejme, že  $\omega_i \neq \omega_j$  pro  $i \neq j$ . Potom z (5.14) vyplývá, že

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = \mathbf{0} \quad \text{pro } i \neq j \quad (5.15)$$

a že tedy vlastní vektory jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti.

Vynásobíme první rovnici (5.12) činitelem  $1/\omega_i^2$ , druhou rovnici (5.12)  $1/\omega_j^2$  a poté obě rovnice sečteme. Po úpravě obdržíme vztah

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

Vlastní vektory jsou tedy ortogonální též vzhledem k matici tuhosti.

Vlastní tvary budeme normovat vzhledem k matici hmotnosti<sup>2</sup>. Požadujeme tudíž, aby

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.17)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Výhoda vlastních tvarů normovaných vzhledem k matici hmotnosti se projeví zvláště při řešení odezvy konstrukce rozvojem do vlastních tvarů kmitání.

<sup>3</sup>Podmínkou (5.5) je vektor  $\mathbf{y}_i$  určen nejen směrem, ale i velikostí. Není určen pouze smyslem. Podmínku (5.17) totiž splňuje i vektor  $-\mathbf{y}_i$ .



Přechod od nenormovaných vlastních vektorů  $\mathbf{y}_i$  k normovaným je dán jednoduchým vztahem

$$\mathbf{y}_{i,\text{norm}} = \frac{\mathbf{y}_i}{(\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_i)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.18)$$

Pokud budeme dále pracovat s vlastními tvary, budeme vždy předpokládat, že splňují vztah (5.17), tj. že jsou ortonormální vzhledem k matici hmotnosti  $\mathbf{M}$ , stručněji  $\mathbf{M}$ -ortonormální. Můžeme proto nadále označení *norm* vynechat. Dosadíme-li (5.17) do (5.12), obdržíme závislost

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.19)$$

Podmínky (5.17) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I}, \quad (5.20)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice. Podobně soustavě (5.19) je ekvivalentní zápis

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{\Omega}^2. \quad (5.21)$$

### 5.1.7 Rayleighův kvocient

Důležitou veličinou jak v teorii vlastních čísel, tak v mnoha metodách praktického výpočtu vlastních frekvencí a vlastních tvarů je Rayleighův kvocient, označovaný zpravidla  $\rho$ . Je to skalární veličina, definovaná vztahem

$$\rho(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}}, \quad (5.22)$$

kde  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  je libovolný vektor. Lze dokázat, že

$$\omega_1^2 \leq \rho(\mathbf{y}) \leq \omega_n^2, \quad (5.23)$$

přičemž platí

$$\omega_1^2 = \rho(\mathbf{y}_1).$$

Znamená to, že ze všech možných vektorů  $\mathbf{y}$  je prvním vlastním vektorem ten, který minimalizuje Rayleighův kvocient. Toto tvrzení se nazývá *Rayleighův princip*.

Rayleighův princip lze rozšířit na vyšší tvary. Platí  $\omega_i^2 = \rho(\mathbf{y}_i)$ .

### 5.1.8 Spektrální rozklad matice tuhosti

Máme-li k dispozici vlastní tvary  $\mathbf{y}_i$  a vlastní frekvence  $\omega_i^2$ , potom

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T. \quad (5.24)$$

O správnosti tohoto tvrzení se lze snadno přesvědčit. Řešme statickou úlohu  $\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R}$  rozvojem do vlastních tvarů kmitání. Potom

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i q_i. \quad (5.25)$$

Po dosazení (5.25) do  $\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R}$  a po vynásobení vzniklé rovnice zleva  $\mathbf{y}_j^T$  obdržíme

$$\omega_i^2 q_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{R} \Rightarrow q_i = \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{y}_i^T \mathbf{R}. \quad (5.26)$$

Při úpravě byla využita ortogonalita vlastních tvarů ( $\mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \omega_i^2 \delta_{ij}$ ).

Řešení rovnice  $\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{R}$  lze rovněž vyjádřit pomocí inverzní matice  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}. \quad (5.27)$$

Za  $\mathbf{r}$  dosadíme z (5.25), kam předtím dosadíme za  $q_i$  z (5.26). Obdržíme

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \right) \mathbf{R} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}, \quad (5.28)$$

čímž byla potvrzena správnost (5.24) pro libovolné  $\mathbf{R}$ <sup>4</sup>.

## 5.2 Metody řešení vlastního kmitání

### 5.2.1 Přehled metod

Úloha spočívající v nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů u matic je poměrně stará. přehled metod řešení je uveden např. v [28]. Převážná část metod je však určena k řešení tzv. standardního problému vlastních čísel

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}. \quad (5.29)$$

<sup>4</sup>Spektrální rozklad nemá bezprostřední aplikaci v dynamice konstrukcí. Je však účinným nástrojem pro analýzu vlastností izolovaných prvků. Zvláště se uplatní při testování, zda prvek nemá tvary deformace, kterým nepřísluší žádná energie ( free energy mode).

Jak je patrné z předcházejícího výkladu, vlastní kmitání konstrukcí i lineární stabilita vedou při použití MKP k obecnému problému vlastních čísel (5.7). Proto je třeba před použitím klasických metod nejprve obecný problém (5.7) převést na standardní. To lze snadno provést v případě, že  $\mathbf{M}$  je diagonální se všemi prvky různými od nuly. V případě, že matice  $\mathbf{M}$  není diagonální (konzistentní matice hmotnosti), je přechod na standardní problém (5.29) komplikovanější a náročný na numerickou přesnost. Podrobnosti lze nalézt např. v [22]. Jelikož se domníváme, že při řešení úloh vlastního kmitání konstrukcí MKP je výhodnější přímé řešení obecného problému vlastních čísel, nebudeme metody převodu na standardní problém uvádět. Z klasických metod řešení obecného problému je velice vhodná (především z hlediska algoritmizace) Jacobiova metoda rotací. Zvláštní pozornost při použití MKP je třeba věnovat příznivé okolnosti - pásovému uspořádání matic  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$ , která umožňuje sestavovat algoritmy úsporné jak ve spotřebě strojového času, tak v nárocích na vnitřní paměť počítače.

### 5.2.2 Statická kondenzace

V dynamice je možné ke snížení počtu stupňů volnosti použít kondenzace obdobně jako ve staticce. Abychom mohli uplatnit statickou kondenzaci při výpočtu vlastního kmitání, musíme nejdříve přisoudit hmotnost vyšetřované konstrukce pouze několika vybraným stupňům volnosti. V podstatě jde o soustředění hmotnosti do vybraných uzlů matematického modelu. Pro efektivní využití metody musí být počet vybraných stupňů volnosti velmi nízký, musí ale dobře vystihnout rozložení hmotnosti po konstrukci, aby frekvence a tvary vlastního kmitání, které nás zajímají, byly vypočteny s dostatečnou přesností. Postup je potom následující - stupně volnosti diskrétního modelu, který vznikl po nahrazení skutečné konstrukce konečnými prvky, rozdělíme na stupně volnosti hmotné, které označíme  $\mathbf{y}_a$ , a na nehmotné, které označíme  $\mathbf{y}_b$ . Matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  rozdělíme na submatice podle příslušnosti k  $\mathbf{y}_a$  nebo  $\mathbf{y}_b$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_a \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_a^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_a \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix}. \quad (5.30)$$

Rovnice (5.30) představuje dvě maticové rovnice:

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{y}_a + \mathbf{K}_{ab}\mathbf{y}_b = \Omega_a^2\mathbf{M}_a\mathbf{y}_a, \quad \mathbf{K}_{ba}\mathbf{y}_a + \mathbf{K}_{bb}\mathbf{y}_b = \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

Z druhé rovnice (5.31) můžeme vyjádřit  $\mathbf{y}_b$  v závislosti na  $\mathbf{y}_a$  ve tvaru

$$\mathbf{y}_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba} \mathbf{y}_a. \quad (5.32)$$

Dosadíme-li (5.32) do první rovnice (5.31), obdržíme redukovanou úlohu vlastního kmitání

$$\mathbf{K}_a \mathbf{y}_a = \Omega_a^2 \mathbf{M}_a \mathbf{y}_a, \quad \text{kde } \mathbf{K}_a = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ab} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}. \quad (5.33)$$

Ze vzorce (5.33) je zřejmé, proč jsme již na začátku výkladu zdůrazňovali, že počet vybraných stupňů volnosti, do kterých soustředíme hmotnost, musí být nízký. Matice  $\mathbf{K}_a$  bude obecně plná, i když matice  $\mathbf{K}$  konstrukce bude pásová. Aby výpočet redukované úlohy (5.33) bylo možné efektivně provést, je třeba, aby se matice  $\mathbf{K}_a$  vešla celá do vnitřní paměti. Užití této metody je na místě u konstrukcí s velkými osamělými hmotnostmi. Tím je určen přirozený výběr hmotných stupňů volnosti<sup>5</sup>.

### 5.2.3 Rayleighova-Ritzova metoda

Metoda statické kondenzace je metodou, která je založena na inženýrské intuici a zkušenosti. V současném stadiu vývoje numerických metod mechaniky je statická kondenzace takřka výhradně nahrazována metodou Raleighovou-Ritzovou, která v sobě statickou kondenzaci zahrnuje jako speciální případ. Při aplikaci MKP pro řešení vlastního kmitání konstrukcí získáme diskrétní soustavu, která má stovky i tisíce stupňů volnosti. Z předcházejícího výkladu víme, že diskrétní soustava má právě tolik vlastních frekvencí a vlastních tvarů, kolik má stupňů volnosti. Jak uvidíme v dalších odstavcích, z hlediska řešení odezvy konstrukce na dané zatížení nebo na daný pohyb některých bodů potřebujeme znát pouze několik frekvencí a tvarů, a to zpravidla nejnížší vlastní frekvence a jim příslušné vlastní tvary (výjimku tvoří ustálené harmonické kmitání a některé případy stochastického zatížení, kde potřebujeme znát vlastní frekvence a tvary v okolí budících frekvencí). Rayleighova-Ritzova metoda právě umožňuje nalézt přibližně prvních  $p$  vlastních frekvencí a tvarů.

Metoda vychází z Rayleighova principu. Jde o stanovení minima Rayleighova kvocientu Ritzovou metodou. Vektory, které minimalizují  $\rho$ , budeme hledat na množině všech možných lineárních kombinací zvolených (lineárně nezávislých) vektorů  $\boldsymbol{\psi}_i$ . Z koeficientů lineární kombinace  $c_i$  sestavíme vektor  $\mathbf{c}$ . Vektory  $\boldsymbol{\psi}_i$  sestavíme do matice  $\boldsymbol{\Psi}$  obdobně jako vlastní

<sup>5</sup>Při numerické realizaci výpočtu prvků matice  $\mathbf{K}_a$  se nepostupuje podle (5.33), nýbrž se použije Gaussovy eliminace, čímž odpadne inverze matice  $\mathbf{K}_{bb}$ .

tvary, tzn. že jednotlivé vektory  $\psi_i$  budou tvořit sloupce matice  $\Psi$ . Rovněž matice  $\Psi$  bude typu  $(n, p)$ . Vektory  $\varphi$ , na kterých budeme hledat minimum Rayleighova kvocientu, lze zapsat ve tvaru

$$\varphi = \Psi \mathbf{c}. \quad (5.34)$$

Dosaďme (5.34) do (5.22), pak

$$\rho(\varphi) = \frac{\mathbf{c}^T \Psi^T \mathbf{K} \Psi \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \Psi^T \mathbf{M} \Psi \mathbf{c}}. \quad (5.35)$$

Jmenovatel i čítec ve zlomku výrazu (5.35) jsou skalární veličiny. Jak je obvyklé v Ritzově metodě, považujeme zatím neurčené koeficienty  $\mathbf{c}$  za proměnné. Je tudíž  $\rho(\varphi)$  funkcí  $c_i$ , tj.

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi(\mathbf{c})) = \rho(\mathbf{c}). \quad (5.36)$$

Nutnou podmínkou, aby Rayleighův kvocient nabyl minimální hodnoty je, aby první parciální derivace podle koeficientů  $c_i$  se rovnaly nule:

$$\frac{\partial \rho(\varphi(\mathbf{c}))}{\partial c_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (5.37)$$

Abychom nemuseli výraz (5.35) rozepisovat pomocí sumací, zavedme vektor  $\partial \rho(\varphi) / \partial \mathbf{c}$ , jehož jednotlivé složky jsou derivace  $\partial \rho(\varphi) / \partial c_i$ . Kromě toho označme  $\tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi$  a  $\tilde{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi$ . Výraz (5.35) můžeme uvést na tvar

$$\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{c} = \rho \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{c}. \quad (5.38)$$

S vektory  $\mathbf{c}$  lze zacházet z funkčního hlediska jako s proměnnými. Derivujeme (5.38) podle  $\mathbf{c}$ :

$$2\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{c} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{c}} (\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{c}) + 2\rho \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{c}. \quad (5.39)$$

Protože  $\partial \rho / \partial \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , dostáváme z (5.39) podmínku pro  $\mathbf{c}$  ve formě soustavy homogenních lineárních rovnic

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{c} = \rho \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{c}. \quad (5.40)$$

To znamená, že jsme Ritzovou metodou zredukovali původní problém vlastních čísel s  $n$  stupni volnosti na řešení problému vlastních čísel s  $p$  stupni

volnosti. Redukce je provedena přirozeně za cenu určité přibližnosti. Vlastní čísla rovnice (5.40)  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  jsou aproximacemi kvadrátů vlastních frekvencí, a to horními aproximacemi, tj.

$$\omega_1^2 \leq \rho_1; \quad \omega_2^2 \leq \rho_2; \quad \dots; \quad \omega_p^2 \leq \rho_p. \quad (5.41)$$

Pomocí vlastních tvarů úlohy (5.40) můžeme vypočítat aproximace vlastních tvarů rovnice (5.7)

$$\mathbf{y}_i \approx \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{c}_i. \quad (5.42)$$

Poznamenejme, že pokud vlastní tvary  $\mathbf{c}_i$  budou normované vzhledem k matici  $\tilde{\mathbf{M}}$ , budou  $\boldsymbol{\varphi}_i$  normované vzhledem k  $\mathbf{M}$ .

Rayleighova-Ritzova metoda je metodou přibližnou. Kdybychom však za bázi  $\boldsymbol{\varphi}_i$  zvolili správný vlastní tvar, řekněme  $\mathbf{y}_j$ , potom Rayleighova-Ritzova metoda jej nalezne jakožto nejlepší možnou aproximaci a bude platit  $\omega_j^2 = \rho_j$ .

Vyšší frekvence a tvary vlastního kmitání budou Rayleighovou-Ritzovou metodou určeny s podstatně menší přesností, než nejnižší frekvence a jim odpovídající tvary kmitání.

#### 5.2.4 Kombinace statické kondenzace a Rayleighovy-Ritzovy metody

V předcházejícím odstavci bylo konstatováno, že Rayleighova-Ritzova metoda nahradila metodu statické kondenzace. Ukážeme si, že statická kondenzace poskytuje možnost v kombinaci s Rayleighovou-Ritzovou metodou formulovat konzistentní postup pro kondenzaci matice hmotnosti. Vyjděme přitom z rovnice (5.32). Pomocí ní lze napsat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_a \\ \mathbf{y}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba} \end{bmatrix} \mathbf{y}_a = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{y}_a, \quad (5.43)$$

tedy vztah analogický k (5.34). Tuto transformaci lze zapsat pro celou konstrukci, pro subkonstrukci nebo pro izolovaný prvek. Na základě (5.43) provedme transformaci matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  ze soustavy zobecněných souřadnic  $\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b$  do soustavy zobecněných souřadnic  $\mathbf{y}_a$ . Obdržíme

$$\mathbf{K}^* = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}, \quad \mathbf{M}^* = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Psi}. \quad (5.44)$$

Dosazením z (5.43) do prvního vztahu (5.44) se lze snadno přesvědčit, že  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_a$  ( $\mathbf{K}_a$  z rovnice (5.33)).

Pro numerickou realizaci kondenzace je výhodnější následující postup :

1. Kondenzace matice tuhosti se provede eliminačním postupem (Gaussovou eliminací). V transformaci (5.43) se součin  $-K_{bb}^{-1}K_{ba}$  nahradí Gaussovými násobiteli.
2. Kondenzace se bude provádět postupně po jednotlivých neznámých. Proto postačuje formulovat algoritmus kondenzace jediného stupně volnosti. V takovém případě lze transformační matici zapsat takto:

$$\Psi = \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{t}^T \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

kde  $\mathbf{t}$  je vektor tvořený Gaussovými násobiteli, které jsou potřebné k nulování jediného sloupce.

Po dosazení (5.45) do druhého vztahu (5.44) získáme

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{aa} + \mathbf{t} \mathbf{M}_{ba} + \mathbf{M}_{ab} \mathbf{t}^T + \mathbf{t} \mathbf{M}_{bb} \mathbf{t}^T. \quad (5.46)$$

$M_{bb}$  je při kondenzaci jediného stupně volnosti skalár. Popsaný postup bývá nazýván *Guyanovou redukcí*. Poněvadž algoritmus kondenzace matice hmotnosti je prakticky velmi užitečný, je dále uveden podprogram na současnou kondenzaci matice tuhosti a hmotnosti. Stupně volnosti, které mají být kondenzovány, musí být uvedeny jako poslední.

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

C

C TEST

C CLAMPED BEAM

C RIGHT ROTATION CONDENSED

C

DIMENSION S(4,4), H(4,4)

DATA S/12, -6, -12, -6,

\* -6, 4, 6, 2,

\* -12, 6, 12, 6,

\* -6, 2, 6, 4/,

\* H/156, -22, 54, 13,

\* -22, 4, -13, -3,

\* 54, -13, 156, 22,

\* 13, -3, 22, 4/

C

CALL CONDENSE(S,H,4,1)

C

WRITE(\*,100) ((S(I,J),J=1,4),I=1,4)

```

WRITE(*,100) ((H(I,J),J=1,4),I=1,4)
100 FORMAT(4F7.1)
C
STOP
END
C
SUBROUTINE CONDENS(S,H,N,M)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION S(N,N),H(N,N)
C
C SUBROUTINE FOR CONSISTENT CONDENSATION OF MASS
C OR INITIAL STRESS MATRICES
C (CONDENSED DOFS HAVE TO BE PLACED AT THE LAST
C POSITIONS OF NODAL DISPLACEMENT VECTOR)
C
C S(N,N) - STIFFNESS MATRIX
C H(N,N) - MASS OR INITIAL STRESS MATRIX
C N      - ORDER OF MATRICES
C M      - NUMBER OF CONDENSED DOFS
C
C PROGRAMED BY Z.BITNAR
C JULY 1992
C
C STIFFNESS MATRIX CONDENSATION
C
DO 10 K=1,M
L = N-K
MM = L+1
DO 20 II=1,L
C = -S(II,MM)/S(MM,MM)
DO 30 J=1,L
30 S(II,J) = S(II,J) + C*S(MM,J)
CONTINUE
20 S(II,MM) = C
C
C MASS MATRIX CONDENSATION
C
DO 40 II=1,L
DO 40 J=1,L
40 H(II,J) = H(II,J) + S(II,MM)*H(MM,J)
*           + H(II,MM)*S(J,MM)
*           + H(MM,MM)*S(II,MM)*S(J,MM)

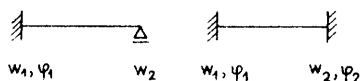
```



C  
10 CONTINUE  
C  
RETURN  
END

### Příklad 5.1

Vypočtěme konzistentní matici hmotnosti jednostranně vetknutého prutu podle obr. (5.2) kondenzací matice hmotnosti oboustranně vetknutého prutu.



Obr. 5.2: Jednostranně a oboustranně vetknutý prut

#### Řešení:

Pro jednoduchost zvolme  $\rho \cdot A \cdot l = 420$ ,  $EJ/l^3 = 1$ ,  $l = 1$ . Matice tuhosti a hmotnosti mají potom tvar ( $\mathbf{r}^T = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}$ )

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 156 & -22 & 54 & 13 \\ -22 & 4 & -13 & -3 \\ 54 & -13 & 156 & 22 \\ 13 & -3 & 22 & 4 \end{bmatrix}.$$

Prvky vektoru  $\mathbf{t}$  se získají obvyklým způsobem z podmínky, že koncový moment na oboustranně vetknutém nosníku  $M_{21} = 0$ . Odtud

$$\varphi_2 = \frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{3}{2}w_2 \rightarrow \mathbf{t}^T = \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\},$$

$$\mathbf{t} \mathbf{M}_{ba} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \{ 13, -3, 22 \} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 39 & -9 & 66 \\ -13 & 3 & -22 \\ -39 & 9 & -66 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{ab} \mathbf{t}^T = (\mathbf{t} \mathbf{M}_{ba})^T,$$

$${}^t M_{bb} {}^t T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right\} 4 \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -3 & -9 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & 3 & 9 \end{bmatrix},$$

$$M^* = \begin{bmatrix} 204 & -36 & 58.5 \\ -36 & 8 & -16.5 \\ 58.5 & -16.5 & 99 \end{bmatrix}.$$

Poznamenejme, že v procesu kondenzace se uplatní i vliv smyku na deformaci nosníku. Uvedený algoritmus tuto okolnost plně respektuje, jestliže vliv smyku je zahrnut v matici tuhosti.

## 5.2.5 Inverzní iterace

Tento odstavec je věnován iterační metodě, založené na původní Stodolově myšlence. Jde o metodu přesnou, a to v tom smyslu, že opakováním iteračního cyklu se můžeme s libovolnou přesností (omezenou však přesností použitého počítače) přiblížit ke správnému řešení. Uvedeme dále poměrně podrobný výklad inverzní iterace, neboť metoda sama je stále často používána a kromě toho je součástí většiny nejnovějších postupů řešení úlohy vlastního kmitání konstrukcí.

Inverzní iterace představuje zobecnění Stodolovy metody postupných aproximací. Zvolíme počáteční aproximaci vlastního tvaru, kterou označíme  $\mathbf{x}_1$ . Inverzní iterace vychází ze vztahu

$$K \mathbf{y} = \omega^2 M \mathbf{y}, \quad (5.47)$$

kteřý je splněn za předpokladu, že  $\mathbf{y}$  je některým vlastním tvarem kmitání a  $\omega$  jemu příslušnou vlastní frekvencí. Protože tvar vlastního kmitání ani vlastní frekvenci neznáme, zvolili jsme určitou aproximaci vlastního tvaru, kterou označíme  $\mathbf{x}_1$ . Vypočteme amplitudu setrvačných sil  $\mathbf{S}$  (až na koeficient  $\omega^2$ , který však nemá na tvar vliv, neboť se jím násobí všechny složky vektoru setrvačných sil):

$$\mathbf{S} = M \mathbf{x}_1. \quad (5.48)$$

Těmito silami zatížíme vyšetřovanou konstrukci. Vektor posunů který představuje novou aproximaci  $\mathbf{y}_1$ , vypočteme z rovnice

$$K \mathbf{x}_2 = M \mathbf{x}_1. \quad (5.49)$$

V dalším kroku určíme amplitudy setrvačných sil od posunů  $\mathbf{x}_2$  a těmi opět zatížíme konstrukci. Postup opakujeme tak dlouho, až se  $\mathbf{x}_k$  a  $\mathbf{x}_{k+1}$  tvarem od sebe příliš neliší. Tím získáme s potřebnou přesností vlastní tvar kmitání. Pokud  $\mathbf{x}_1$  nebude kolmý k prvnímu vlastnímu tvaru  $\mathbf{y}_1$ , tzn.  $\mathbf{x}_1^T \mathbf{M} \mathbf{y}_1 \neq 0$ , potom  $\mathbf{x}_{k+1} \rightarrow \mathbf{y}_1$ . Přibližnou hodnotu kvadrátu vlastní kruhové frekvence vypočteme z Rayleighova kvocientu

$$\omega_1^2 \approx \rho(\mathbf{x}_{k+1}) = \frac{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{k+1}}. \quad (5.50)$$

Uvedený postup je principiálně správný, avšak ve většině praktických případů neproveditelný. Kdybychom totiž počítali ve vztahu (5.49) přímo s  $\mathbf{x}_2$ , dostali bychom při "rozumném" dělení vyšetřované konstrukce na prvky složky vektoru  $\mathbf{x}_{k+1}$  (po  $k$ -té iteraci) jako velmi malá čísla, která již není možno zobrazit v počítači (i když tvar kmitání by byl teoreticky správný). Abychom se takovým numerickým těžkostem vyhnuli, je třeba provést nějakým způsobem normování. Přepíšeme rovnici (5.49) pro  $k$ -tou iteraci ve tvaru

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{M} \mathbf{x}_k. \quad (5.51)$$

Vektor  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  můžeme normovat např. tak, že všechny prvky  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  dělíme největším prvkem vektoru  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ . Protože ale nejpohodlněji se pracuje s vlastními vektory normovanými vzhledem k matici hmotnosti  $\mathbf{M}$ , položíme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.52)$$

Vzorce (5.51) a (5.52) popisují iterační cyklus při inverzní iteraci. V každém cyklu můžeme ještě vypočítávat podle (5.50) hodnotu Rayleighova kvocientu, který představuje aproximaci kvadrátu vlastní frekvence. To proto, že podle vlastní frekvence se nejlépe posuzuje dosažená přesnost aproximace. Chceme-li, aby hodnota vlastní frekvence byla určena s přesností na  $s$  cifer, musí platit

$$\frac{|\rho(\mathbf{x}_{k+1}) - \rho(\mathbf{x}_k)|}{\rho(\mathbf{x}_{k+1})} \leq 10^{-2s}. \quad (5.53)$$

Bathe a Wilson v [7] navrhli následující algoritmus inverzní iterace, který snižuje na minimum potřebný počet aritmetických operací: jako počáteční

aproximaci volíme vektor  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1$ . Iterační cyklus je popsán vzorci

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{z}_k \\ \widehat{\mathbf{z}}_{k+1} &= \mathbf{M}\widehat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \rho(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) &= \frac{\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{z}_k}{\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \widehat{\mathbf{z}}_{k+1}} \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \frac{\widehat{\mathbf{z}}_{k+1}}{(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}^T \widehat{\mathbf{z}}_{k+1})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Uvedeným postupem se  $\mathbf{z}_{k+1} \rightarrow \mathbf{M}\mathbf{y}_1$  a  $\rho(\widehat{\mathbf{x}}_{k+1}) \rightarrow \omega_1^2$ , předpokládáme-li, že  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{z}_1 \neq 0$ .

## 5.2.6 Grammova-Schmidtova ortogonalizace

Abychom pomocí inverzní iterace mohli vypočítat i druhý a vyšší tvary kmitání, je třeba, aby počáteční vektor byl ortogonální ke všem nižším vlastním vektorům. Jak toho docílit, si ukážeme na příkladě výpočtu druhého vlastního tvaru. Při libovolné volbě  $\mathbf{x}_0$  nebude obecně splněno, že  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\mathbf{x}_0 = 0$ . Proto je třeba z  $\mathbf{x}_0$  odstranit první vlastní tvar kmitání. Modifikovaný počáteční vektor lze pak zapsat takto :

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - c_1 \mathbf{y}_1. \quad (5.55)$$

Koeficient  $c_1$  se stanoví z podmínky, že  $\bar{\mathbf{x}}_0$  je ortogonální k  $\mathbf{y}_1$ , tj. že  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_0 = 0$ . Přenásobme (5.55) zleva  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{M}$ . Potom

$$\mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\mathbf{x}_0 - c_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\mathbf{y}_1 = 0. \quad (5.56)$$

Poněvadž  $\mathbf{y}_1$  je ortonormální ( $\mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\mathbf{y}_1 = 1$ ), plyne odtud

$$c_1 = \mathbf{y}_1^T \mathbf{M}\mathbf{x}_0. \quad (5.57)$$

Uvedený postup lze snadno zobecnit. Máme-li vypočítáno prvních  $m$  vlastních tvarů, potom počáteční aproximaci  $\mathbf{x}_0$  pro výpočet  $(m+1)$ -ního vlastního tvaru je nutné "očistit" od prvních  $m$  vlastních tvarů. Platí

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{kde} \quad c_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{M}\mathbf{x}_0. \quad (5.58)$$

Popsaný postup se označuje jako *Grammova-Schmidtova ortogonalizace*<sup>6</sup>.

### 5.2.7 Inverzní iterace s posunutím

Inverzní iterací můžeme vypočítat vyšší tvar kmitání i bez předchozí znalosti nižších tvarů kmitání. K tomu účelu využijeme posunutí. Řešíme tudíž úlohu

$$(\mathbf{K} - \gamma^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{y}.$$

Lze dokázat (viz [19]), že inverzní iterace v takovém případě konverguje k tomu vlastnímu tvaru, který přísluší vlastní frekvenci  $\omega_j$ , ležící nejbližše ke  $\gamma$ .

### 5.2.8 Jacobiho metoda rotací

Metody uvedené v předcházejících odstavcích jsou určeny především pro řešení rozsáhlých soustav, kdy nás zajímá pouze několik, z inženýrského hlediska důležitých, vlastních tvarů a frekvencí. Existují však případy, kdy potřebujeme znát úplné řešení úlohy - tj. všechny vlastní tvary a frekvence. Nejčastějším takovým případem je řešení redukované úlohy v Rayleighově-Ritzově metodě (5.40). Abychom dodrželi zásadu, že se vyhneme transformaci obecného problému vlastních čísel (5.40) na standardní problém vlastních čísel, vyložíme jednu z nejstarších metod - metodu Jacobiho rotací.

Původní iterační proces navrhl Jacobi již roku 1846. Používání metody se však rozšířilo až s moderní výpočetní technikou, zvláště proto, že metoda má jednoduchý algoritmus, a snadno se tudíž programuje. Z inženýrského hlediska je výhodná i proto, že přímo řeší obecný problém vlastních čísel. Vzhledem k tomu, že Jacobiho metoda je použita v mnoha programech, pojednáme o ní dosti podrobně.

Uvažujme nejprve standardní problém vlastních čísel

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (5.59)$$

Předpokládejme, že  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní,  $\lambda$  je obdobně jako  $\omega^2$  vlastní číslo. Jacobiho metoda, jak již bylo výše uvedeno, je metoda iterační. Základní myšlenka spočívá v transformaci matice  $\mathbf{A}$  na matici diagonální. Přesněji řečeno na matici skoro diagonální, neboť při numerické realizaci

<sup>6</sup>V [19] je ukázáno, že s ohledem na omezenou přesnost výpočtu nestačí provést "očistu" pouze pro počáteční aproximaci. Doporučuje se provádět ortogonalizaci v každém iteračním kroku.



sloupců podle známých transformačních vzorců (prvky matice  $\mathbf{A}_k$  budeme značit  $a_{ij}^{(k)}$ ):

$$\begin{aligned} a_{ii}^{(k+1)} &= c^2 a_{ii}^{(k)} + s^2 a_{jj}^{(k)} + 2cs a_{ij}^{(k)} = \frac{a_{ii}^{(k)} + a_{jj}^{(k)} + d}{2}, \\ a_{jj}^{(k+1)} &= s^2 a_{ii}^{(k)} + c^2 a_{jj}^{(k)} - 2cs a_{ij}^{(k)} = \frac{a_{ii}^{(k)} a_{jj}^{(k)} - a_{ij}^{(k)} a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k+1)}}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Pro  $i$ -tý řádek a sloupec vyjde

$$a_{ii}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k+1)} = ca_{ii}^{(k)} + s a_{ij}^{(k)} \quad (l = 1, 2, \dots, p). \quad (5.63)$$

Pro  $j$ -tý řádek a sloupec dostaneme podobně

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k+1)} = ca_{ij}^{(k)} - s a_{ii}^{(k)} \quad (l = 1, 2, \dots, p), \quad (5.64)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{d + a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}{2d}} \quad s = \sqrt{\frac{d - a_{ii}^{(k)} + a_{jj}^{(k)}}{2d}} \quad (5.65)$$

$$d = \sqrt{\left(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}\right)^2 + 4a_{ij}^{(k)} a_{ij}^{(k)}}.$$

Již na začátku tohoto článku jsme uvedli, že vlastní čísla budou aproximována diagonálními prvky matice  $\mathbf{A}$ . Vlastní vektory získáme ze součinu transformačních matic

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_k. \quad (5.66)$$

Zatím jsme popsali podstatu transformace (5.61). Nezmínili jsme se ale o tom, jakým způsobem vybereme dvojici indexů  $(i, j)$ . Jacobi navrhl výběr podle největšího nediagonálního prvku. Takový postup je z hlediska výpočtu na počítači nevhodný, neboť samo vyhledání největšího nediagonálního prvku by mohlo zabrat více strojového času než vlastní transformace. Hledaly se proto jiné způsoby výběru dvojice indexů  $(i, j)$ , které jsou v souvislosti s počítačem vhodnější. Zkušenosti z praktických výpočtů ukázaly, že nejvhodnější jsou cyklické procesy. Při tomto způsobu volíme dvojice indexů  $(i, j)$  nulovaného mimodiagonálního prvku cyklicky podle předem zvoleného

pořádku. Zpravidla se postupuje po řádcích nebo po sloupcích. Nevýhoda takto formulovaných cyklických procesů spočívá v tom, že se nulují i malé nediagonální prvky, i když se v matici ještě vyskytují prvky velké. Tento nedostatek odstraňují cyklické procesy se závory, které dále popíšeme.

Uvažujme posloupnost čísel  $b_1, b_2, \dots$  monotónně klesajících k nule. Dvojice indexů  $(i, j)$  vybíráme opět cyklicky podle předem zvoleného systému - např. po řádcích. Dříve však, než provedeme transformaci (5.61), zjistíme, zda prvek  $a_{ij}^{(k)}$  není menší než  $b_1$ . Jestliže je menší, transformaci neprovádíme. Když jsou všechny nediagonální prvky menší než  $b_1$ , sníží se závora z  $b_1$  na  $b_2$  a postup se opakuje. Konvergence cyklického procesu se závory je kvadratická stejně jako u původního Jacobiho výběru podle nediagonálního prvku s největší absolutní hodnotou. Kvadratická konvergence znamená, že jsou-li všechny nediagonální prvky menší než  $\varepsilon$ , jsou diagonální prvky určeny s chybou menší než  $\varepsilon^2$ . Cyklické procesy se závory představují i zjednodušení programování, neboť zavedení závora zajišťuje, že veličina  $d$  v (5.65) je různá od nuly a nevzniknou tudíž potíže při výpočtu veličin  $c$  a  $s$ .

Uvedli jsme prakticky důležité poznatky o Jacobiho metodě, zatím ale pouze pro standardní problém vlastních čísel. V úlohách dynamiky konstrukcí se však vždy setkáváme s obecným problémem typu (5.40). Výhoda Jacobiho metody spočívá v tom, že ji po určitém rozšíření lze upravit pro přímé řešení obecného problému. Základní myšlenka je odvozena z analogie s maticemi typu  $(2, 2)$ . Mějme matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Bez obtíží lze nalézt matici  $\mathbf{C}$  takovou, že matice  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$  a  $\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}$  jsou diagonální. Stačí vzít

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1, & \alpha \\ \beta, & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

při

$$\alpha = \frac{a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}}{h}, \quad \beta = \frac{a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}}{h}, \quad (5.68)$$

kde  $h$  je kořen kvadratické rovnice <sup>7</sup>

$$h^2 - (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})h + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12}) = 0. \quad (5.69)$$

Analogicky lze pro matice vyšších řádů nalézt transformační matici  $\mathbf{T}$  ve

<sup>7</sup> Jestliže  $h = 0$ , potom  $\alpha = 0$  a  $\beta = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ .





stanovit závoru pro součet  $|\widehat{k}_{ij}| + |\widehat{m}_{ij}|$ . Bathe a Wilson doporučují použít pro každou z matic  $\widehat{K}$  a  $\widehat{M}$  zvlášť závoru a "vzdálenost" od závory měřit hodnotami

$$\frac{\widehat{k}_{ij}}{\sqrt{\widehat{k}_{ii}\widehat{k}_{jj}}} \quad \text{a} \quad \frac{\widehat{m}_{ij}}{\sqrt{\widehat{m}_{ii}\widehat{m}_{jj}}},$$

tedy veličinami, které udávají míru vazby mezi stupni volnosti  $i$  a  $j$ .

### 5.2.9 Metoda iterace podprostoru

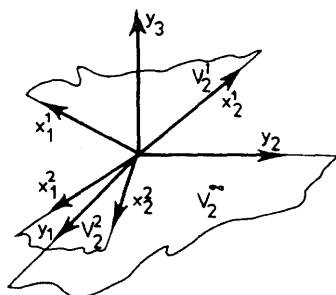
Velmi účinné algoritmy jsou založeny na myšlence provádět inverzní iteraci s několika vektory najednou. V literatuře lze nalézt různé varianty této tzv. simultánní iterace [45]. Vyložíme zde jednu z nich - metodu iterace podprostoru, která se zdá být nejbližší inženýrskému pojetí.

Základní myšlenka spočívá v účinném spojení inverzní iterace a metody Rayleighovy-Ritzovy. V odst. 5.2.5 jsme konstatovali, že inverzní iterace popsaná vzorcí (5.54) konverguje při jakémkoli počátečním vektoru  $\mathbf{x}_1$  (nesmí pouze být ortogonální k  $\mathbf{y}_1$ ) k prvnímu vlastnímu tvaru. Nabízí se otázka, zda podobným způsobem konverguje i libovolný počáteční podprostor, jehož báze je tvořena  $q$  zvolenými aproximacemi vlastních tvarů. Na první pohled by se zdálo, že to není možné, neboť matice bázových vektorů  $\mathbf{X}_k$  (typu  $(n, q)$ ) podprostoru, který označíme  $V_q^k$ , na niž aplikujeme rekurentní vzorec

$$\mathbf{KX}_{k+1} = \mathbf{MX}_k, \quad (5.72)$$

bude nutně konvergovat k matici složené z  $q$ -krát opakovaného prvního vlastního tvaru úlohy (5.9). Přesto lze dokázat, že podprostor příslušný matici  $\mathbf{X}_k$  konverguje k podprostoru  $V_q^\infty$ , jehož bázi tvoří prvních  $q$  vlastních tvarů  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q$ . K vysvětlení nejlépe poslouží geometrická představa. Prostor  $V_n$  nechť je prostorem všech tříšlzkových vektorů (obyčejný třírozměrný prostor). Rovnice (5.9) v něm určuje tři ortogonální (obecně ne geometricky kolmé) vlastní vektory. Zvolíme  $q = 2$ . Potom první dva vlastní vektory příslušné dvěma nejnižším vlastním frekvencím určují rovinu, která v tomto případě představuje podprostor  $V_2^\infty$  - viz obr. 5.3. Vezměme dva libovolné lineárně nezávislé vektory  $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1$ , které zvolíme za bázi prostoru  $V_2^1$ . Při iteraci podle (5.72) se oba vektory přemísťují tak, že po dostatečném počtu kroků jsou jejich směry libovolně málo odlišné od směru prvního vlastního vektoru. Po každém konečném počtu iterací vektory  $\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k$  určují podprostor  $V_2^k$ , který s rostoucím  $k$  se libovolně přesně blíží k  $V_2^\infty$ . Řečeno

lapidárně, rovina určená vektory  $\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k$  se blíží k rovině určené bází  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ . Tím se vysvětluje zdánlivě paradoxní tvrzení, že  $V_q^k$  konverguje k  $V_q^\infty$ . Zároveň je z uvedené geometrické představy zřejmé, že pokud vektor  $\mathbf{y}_2$  má být s libovolnou přesností určen lineární kombinací vektorů  $\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k$ , je třeba neomezené přesnosti výpočtu.



Obr. 5.3: Iterace podprostoru

Zůstávající při názorné geometrické představě, snadno dojdeme k účinné kombinaci simultánní inverzní iterace a Rayleighovy-Ritzovy metody. Rayleighova-Ritzova metoda v geometrické představě znamená, že v rovině  $V_q^k$  najdeme takové dva vzájemně kolmé vektory, které jsou ve smyslu minima Rayleighova kvocientu nejbližší k vektorům  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ . Jestliže tedy po každém kroku inverzní iterace vyhledáme Rayleighovou-Ritzovou metodou v  $V_q^k$  nové ortogonální báze vektory, zabráníme tím splývání vektorů  $\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k$  a odstraníme zmíněné potíže s přesností výpočtu. Předpokládejme, že jsme  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  zvolili jakožto lineární kombinaci  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ . Takové vektory  $\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k$  leží v podprostoru  $V_q^\infty$ . Rayleighova-Ritzova metoda v jediném kroku najde správné řešení a výpočet po první iteraci končí. Rychlost konvergence všech požadovaných tvarů (budiž jejich počet  $p$ ) je možno jednoduše zvýšit tím, že iterujeme podprostor s rozměrem  $q > p$ . V [6] se na základě zkušenosti navrhuje používat  $q = \min(2p, p + 8)$ . Důsledkem uvedeného zrychlení konvergence je vyšší počet aritmetických operací během jedné iterace.

Sumárně jsou operace jednoho kroku metody iterace podprostoru (přechodu od  $V_q^k$  k  $V_q^{k+1}$ ) uvedeny v tabulce 5.1. Zbývá důležitá otázka v souvislosti s iterací podprostoru - volba počátečních vektorů  $\mathbf{X}_1$ , která značně ovlivňuje dobu trvání výpočtu. V [6] je navržen algoritmus výběru vektorů  $\mathbf{X}_1$ . Jako první vektor se volí vektor s jednotkovým zobecněným posunem ve směru všech hmotných stupňů volnosti. Další ( $q - 1$ ) vektorů má

---

A. Počáteční výpočty (provádějí se pouze jednou)

- a) Triangulace (faktorizace) matice  $K$
  - b) Volba počátečních vektorů  $Z_0$  ( $Z_0 = MX_0$ )
- 

B. Iterace podprostoru

- a)  $K\bar{X}_{k+1} = Z_k$                       ( $K\bar{X}_{k+1} = MX_k$ )
  - b) Výpočet matic  $\tilde{M}_k, \tilde{K}_k$   
 $\tilde{K}_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Z_k$                       ( $\tilde{K} = \bar{X}_{k+1}^T K \bar{X}_{k+1}$ )  
 $\bar{Z}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1}$
  - c) Řešení redukováného problému vlastních čísel  
 $\tilde{K}_{k+1} Q_{k+1} = \Omega_{k+1}^2 \tilde{M}_{k+1} Q_{k+1}$   
 $\tilde{M}_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Z}_{k+1}$                       ( $\tilde{M} = \bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1}$ )
  - d) Výpočet nových vektorů  $Z$   
 $Z_{k+1} = \bar{Z}_{k+1} Q_{k+1}$
  - e) Opakování od bodu B. a)
- 

C. Sturmova kontrola

---

Tabulka 5.1: Algoritmus metody iterace podprostoru

nulovou složku ve směru toho zobecněného posunu, kde je postupně největší podíl  $m_{ii}/k_{ii}$  ( $m_{ii}$ ,  $k_{ii}$  jsou diagonální prvky matice hmotnosti a matice tuhosti). Uvedený algoritmus zaručuje, že matice  $\tilde{M}$  v Rayleighově-Ritzově metodě bude pozitivně definitní.

### 5.2.10 Lanczosova metoda

Metoda byla prvně publikována v roce 1950 jako prostředek k řešení několika nejnižších (nebo nejvyšších) vlastních čísel a příslušných vlastních vektorů matic. Podrobnější teoretický rozbor metody lze nalézt např. v [33]. Zde se zaměříme na použití metody pro řešení zobecněného problému vlastních čísel, jak se vyskytuje v úlohách dynamiky konstrukcí. Jde tedy o řešení homogenní soustavy rovnic (5.7). Postup spočívá v konstrukci  $M$  orto-

gonálních vektorů, tzv. *Lanczosových vektorů*, které jsou následně využity jako báze vektory v Rayleighově-Ritzově metodě. Jde o obdobu inverzní iterace. Zvolí se počáteční vektor  $\mathbf{x}_0$  a generuje se posloupnost vektorů  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_0$ ,  $(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^2\mathbf{x}_0$ , ...  $(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^j\mathbf{x}_0$ . Tyto vektory jsou nazývány Krylova posloupnost. Pro  $j \rightarrow \infty$  tato posloupnost konverguje k prvnímu vlastnímu tvaru kmitání. Lanczosův postup se liší od inverzní iterace tím, že využívá všech vektorů Krylovovy posloupnosti k určení několika nejnižších vlastních tvarů. Vektory Krylovovy posloupnosti jsou následně užity k redukci původního problému vlastních čísel (5.7) Rayleighovou-Ritzovou metodou. Aby řešení redukovaného problému v Rayleighově-Ritzově metodě bylo co nejjednodušší, zavedl Lanczos v každém kroku konstrukce Krylovovy posloupnosti Grammovu-Schmidtovu ortogonalizaci. Tyto vektory jsou nazývány Lanczosovy vektory. Jak bude ukázáno později, Rayleighova-Ritzova metoda s  $\mathbf{M}$ -ortonormální bází<sup>8</sup> vede na standardní problém vlastních čísel s tridiagonální maticí.

### Konstrukce Lanczosových vektorů

Předpokládejme, že známe prvních  $j$  Lanczosových vektorů  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_j$ . Zmíněné vektory splňují podmínku  $\mathbf{g}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$ , kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta, tj. jsou ortonormální. Nyní se vypočte pomocný vektor

$$\bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{g}_j, \quad (5.73)$$

kteřý nebude obecně ortogonální k  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_j$ , nýbrž bude v sobě obsahovat kromě ortogonálního vektoru  $\mathbf{z}_j$  i příspěvky všech předcházejících vektorů  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_j$ . To lze matematicky zapsat takto :

$$\bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{z}_j + \alpha_j \mathbf{g}_j + \beta_j \mathbf{g}_{j-1} + \gamma_j \mathbf{g}_{j-2} + \dots \quad (5.74)$$

V dalším bude ukázáno, že všechny koeficienty v řadě (5.74), počínaje  $\gamma_j$ , jsou nulové. Dále odvodíme vztahy pro výpočet koeficientů  $\alpha_j, \beta_j$  a ukážeme, že  $(j+1)$ -vý Lanczosův vektor lze vyjádřit takto :

$$\mathbf{z}_j = \beta_{j+1} \mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{g}_j - \alpha_j \mathbf{g}_j - \beta_j \mathbf{g}_{j-1}. \quad (5.75)$$

Z (5.75) je patrné, že vektor  $\bar{\mathbf{z}}_j$  bude ortogonální ke všem předcházejícím Lanczosovým vektorům, pokud bude ortogonální k posledním dvěma  $(\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_{j-1})$ . Poněvadž odvození tohoto faktu poskytuje současně návod, jak

<sup>8</sup> Jedná se o bázi vektorů normovaných vzhledem k matici hmotnosti  $\mathbf{M}$ .

vypočítat koeficienty  $\alpha_j, \beta_j$ , bude dále podrobně popsáno. K určení konstant  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  využijeme podmínek ortogonality. Vynásobíme (5.74) zleva výrazem  $\mathbf{g}_j^T \mathbf{M}$ , takže

$$\mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{z}_j + \alpha_j \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j + \beta_j \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-1} + \gamma_j \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-2} + \dots \quad (5.76)$$

První člen na pravé straně je nulový. Vyplyvá to z definice  $\mathbf{z}_j$  (je ortogonální ke všem předcházejícím Lanczosovým vektorům). Třetí a všechny další členy jsou rovněž nulové s ohledem na ortogonalitu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \dots \mathbf{g}_j$  a druhý člen je vzhledem k  $\mathbf{M}$ -ortonormalitě roven  $\alpha_j$ . Z toho pro  $\alpha_j$  plyne

$$\alpha_j = \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{z}}_j = \bar{\mathbf{z}}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j. \quad (5.77)$$

Výraz pro  $\beta_j$  může být odvozen podobně, jestliže se (5.74) přenásobí zleva  $\mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{M}$ . V tomto případě na pravé straně vymizí v důsledku ortogonality všechny členy kromě třetího. Odtud  $\beta_j = \mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{z}}_j$ . Za  $\bar{\mathbf{z}}_j$  lze dosadit z (5.73), což vede k výrazu  $\beta_j = \mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{g}_j$ . Z (5.73) vyplývá, že  $\bar{\mathbf{z}}_{j-1}^T = \mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1}$ . Odtud

$$\beta_j = \bar{\mathbf{z}}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j. \quad (5.78)$$

Konečně  $\bar{\mathbf{z}}_{j-1}^T$  lze rozvinout podle (5.74) a dosadit do (5.78). Potom

$$\beta_j = \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-1} + \alpha_{j-1} \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-1} + \beta_{j-1} \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-2} + \dots \quad (5.79)$$

Je zřejmé, že všechny členy na pravé straně kromě prvního jsou nulové. Poněvadž

$$\mathbf{g}_j = \frac{\mathbf{z}_{j-1}}{\sqrt{\mathbf{z}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-1}}}, \quad (5.80)$$

obdržíme po dosazení do (5.79) a po jednoduchých úpravách modifikovaný výraz pro  $\beta_j$  (srov. s (5.78))

$$\beta_j = \frac{\mathbf{z}_{j-1}^T}{\sqrt{\mathbf{z}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-1}}} \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-1} = \sqrt{\mathbf{z}_{j-1}^T \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-1}}. \quad (5.81)$$

Numerické experimenty ukázaly, že vzorec (5.81) je vhodnější než (5.78). Lanczosovy vektory jsou uspokojivě normalizovány, i když  $\mathbf{g}_{j+1}^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-1}$  není přesně rovno nule.

Stejným způsobem lze ukázat, že  $\gamma_j = \mathbf{g}_{j-2}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{z}}_j$  a odvodit vztah analogický k (5.79)

$$\gamma_j = \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{z}_{j-2} + \alpha_{j-2} \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-2} + \beta_{j-2} \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-3} + \gamma_{j-2} \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j-4} + \dots$$

Je zřejmé, že v důsledku ortogonality je  $\gamma_j = 0$ . Lze dokázat, že všechny další členy v rozvoji (5.74) jsou nulové. Z toho vyplývá, že v procesu ortogonalizace Lanczosových vektorů postačuje provádět ortogonalizaci pouze k posledním dvěma vektorům, což bylo třeba dokázat.

Algoritmus Lanczosovy metody je sumárně uveden v tabulce (5.2) Algoritmus vyžaduje kromě paměti pro  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  ještě místo pro  $\mathbf{g}_{j-1}$ ,  $\mathbf{g}_j$ ,  $\mathbf{R}_j$

A. Volba libovolného vektoru  $\mathbf{z}_0$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$$

$$\beta_1 = \sqrt{\mathbf{z}_0^T \mathbf{M} \mathbf{z}_0}$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{z}_0}{\beta_1}$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M} \mathbf{g}_1$$

B. Pro  $j = 1, 2, \dots$

$$1. \quad \bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_j$$

$$2. \quad \hat{\mathbf{z}}_j = \bar{\mathbf{z}}_j - \beta_j \mathbf{g}_{j-1}$$

$$3. \quad \alpha_j = \mathbf{g}_j^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{z}}_j = \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{z}}_j$$

$$4. \quad \mathbf{z}_j = \hat{\mathbf{z}}_j - \alpha_j \mathbf{g}_j$$

$$5. \quad \bar{\mathbf{R}}_j = \mathbf{M} \mathbf{z}_j$$

$$6. \quad \beta_{j+1} = \sqrt{\mathbf{z}_j^T \mathbf{M} \mathbf{z}_j} = \sqrt{\bar{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{z}_j}$$

$$7. \quad \mathbf{g}_{j+1} = \frac{\mathbf{z}_j}{\beta_{j+1}}$$

Pokud počet Lanczosových vektorů je postačující, generace zde končí. Jinak následuje

$$8. \quad \mathbf{R}_j = \frac{\bar{\mathbf{R}}_j}{\beta_{j+1}} \quad \text{a návrat k bodu B.1.}$$

Tabulka 5.2: Algoritmus Lanczosovy metody

## Redukce stupňů volnosti

Po  $m$  Lanczosových krocích můžeme posloupnost (5.75) zapsat takto

$$\begin{aligned} K^{-1} M g_1 & - \alpha_1 g_1 & - \beta_1 g_2 & & & = O \\ K^{-1} M g_2 & - \beta_2 g_1 & - \alpha_2 g_2 & - \beta_3 g_3 & & = O \\ & \vdots & & & & \\ K^{-1} M g_{m-1} & \cdots & - \beta_{m-1} g_{m-2} & - \alpha_{m-1} g_{m-1} & - \beta_m g_m & = O \\ K^{-1} M g_m & \cdots & & - \beta_m g_{m-1} & - \alpha_m g_m & = z_m. \end{aligned}$$

Stručnější maticový zápis má tvar

$$K^{-1} M G_m - G_m T_m = [O, O, \dots, O, z_m] = z_m e_m^T, \quad (5.82)$$

kde  $e_m^T = [0, 0, \dots, 1]$  a  $G_m$  je matice typu  $(m, m)$ , jejíž sloupce jsou tvořeny Lanczosovými vektory  $g_i$ .  $T_m$  je třídiagonální čtvercová matice

$$T_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & & & & & \\ & & \beta_4 & . & . & & & & \\ & & & & . & . & . & & \\ & & & & & . & . & & \\ & & & & & & \beta_m & & \\ & & & & & & \beta_m & \alpha_m & \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Po vynásobení (5.82) zleva  $G_m^T M$  a uvážení, že  $G_m^T M z_m e_m^T = O$ , vychází

$$G_m^T M K^{-1} M G_m = T_m. \quad (5.84)$$

Vztah (5.84) využijeme dále pro redukci stupňů volnosti při řešení úlohy nalezení nejnižších vlastních frekvencí a vlastních tvarů. Provedeme transformaci v rovnici (5.7). Z původních stupňů volnosti  $y$  přejdeme k zobecněným souřadnicím  $c$  na základě vztahu

$$y = G_m c, \quad (5.85)$$

kde  $c$  je vektor koeficientů lineární kombinace Lanczosových vektorů. Po dosazení do (5.7) a po vynásobení zleva  $G_m^T M K^{-1} M G_m$  obdržíme

$$G_m^T M G_m c - \omega^2 G_m^T M K^{-1} M G_m c = O.$$



S využitím (5.84) a s ohledem na  $\mathbf{M}$ -ortogonalitu  $\mathbf{G}_m$  dospějeme k redukovánému problému vlastních čísel

$$\left( \mathbf{T}_m - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (5.86)$$

Řešením se získá  $m$  vlastních čísel  $\frac{1}{({}^{(m)}\omega_i^2)}$  a  $m$  vlastních vektorů  $({}^{(m)}\mathbf{c}_i)$ .

### Kritérium konvergence

Řešením redukováného problému vlastních čísel (5.86) získáme přibližné hodnoty vlastních frekvencí  $({}^{(m)}\omega_i)$ . S rostoucím  $m$  se  $({}^{(m)}\omega_i)$  blíží ke správným hodnotám. Aby bylo možné vypočítat určitý počet vlastních frekvencí s požadovanou přesností, je třeba mít k dispozici spolehlivý odhad chyby získaného přibližného řešení. Jak již bylo uvedeno, často se při řešení úlohy vlastního kmitání k posouzení dosažené přesnosti používá vzorec (5.53). V [33] je však ukázáno, že v některých případech zmíněné kritérium selhává a navrhuje se spolehlivější odhad přesnosti, založený na vztahu (odhad přesnosti  $i$ -té vlastní frekvence po  $m$  krocích)

$$|\omega_i - ({}^{(m)}\omega_i)| \leq \|({}^{(m)}\mathbf{s}_i)\|_M = \sqrt{({}^{(m)}\mathbf{s}_i^T \mathbf{M} ({}^{(m)}\mathbf{s}_i)}, \quad (5.87)$$

kde  $\mathbf{s}_i$  je residuum, příslušné  $({}^{(m)}\omega_i)$  a  $({}^{(m)}\mathbf{y}_i)$ :

$$({}^{(m)}\mathbf{s}_i) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} ({}^{(m)}\mathbf{y}_i) - \frac{1}{({}^{(m)}\omega_i^2)} ({}^{(m)}\mathbf{y}_i). \quad (5.88)$$

Výrazy (5.87) a (5.88) lze dále upravit pomocí transformace (5.85). Přenásobíme (5.82) vlastním vektorem  $({}^{(m)}\mathbf{c}_i)$  redukováného problému (5.86). Obdržíme

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{G}_m ({}^{(m)}\mathbf{c}_i) - \mathbf{G}_m \mathbf{T}_m ({}^{(m)}\mathbf{c}_i) = \mathbf{z}_m \mathbf{e}_m^T ({}^{(m)}\mathbf{c}_i). \quad (5.89)$$

Z (5.86) vyplývá, že  $\mathbf{T}_m ({}^{(m)}\mathbf{c}_i) = \frac{1}{({}^{(m)}\omega_i^2)} ({}^{(m)}\mathbf{c}_i)$ . Odtud po dosazení z (5.85) obdržíme jednoduchý vztah pro výpočet rezidua  $({}^{(m)}\mathbf{s}_i)$ . Platí

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{y}_i^{(m)} - \frac{1}{({}^{(m)}\omega_i^2)} \mathbf{y}_i^{(m)} = \mathbf{z}_m \mathbf{e}_m^T ({}^{(m)}\mathbf{c}_i) = ({}^{(m)}\mathbf{s}_i). \quad (5.90)$$

Je zřejmé, že je jednodušší počítat normu rezidua  $({}^{(m)}\mathbf{s}_i)$  z výrazu na pravé straně rovnice (5.90) než přímo z (5.88). Současně je vhodné vzít v úvahu, že

$\mathbf{e}_m^T(m) \mathbf{c}_i$  je skalární součin vektorů, a že jeho hodnota je rovna poslednímu prvku  $i$ -tého normovaného vlastního vektoru matice  $\mathbf{T}_m$ , který označíme  $\zeta_i$ . Pro normu rezidua tudíž platí

$$\|{}^{(m)}\mathbf{s}_i\|_M = \|{}^{(m)}\mathbf{y}_i \mathbf{e}_m^T(m) \mathbf{c}_i\|_M = \|{}^{(m)}\mathbf{y}_i\|_M |\mathbf{e}_m^T(m) \mathbf{c}_i| = \beta_{m+1} |\zeta_i|, \quad (5.91)$$

kde  $\beta_{m+1}$  je hodnota, která se vypočítává v průběhu Lanczosova algoritmu. Označme  ${}^{(m)}\rho_i$  normu vektoru rezidua  ${}^{(m)}\mathbf{s}_i$ . Potom platí

$${}^{(m)}\rho_i = \beta_{m+1} |\zeta_i| < tol, \quad (5.92)$$

kde  $tol$  je předepsaná tolerance.

### Ztráta ortogonality

Odvozený algoritmus Lanczosovy metody teoreticky vyžaduje provádět v každém kroku ortogonalizaci pouze vůči předcházejícím dvěma Lanczosovým vektorům. Omezená přesnost numerického procesu na počítači však má za následek generaci Lanczosových vektorů, které nejsou vzájemně ortogonální. Ztráta ortogonality může být identifikována pomocí matice

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{G}_m^T \mathbf{M} \mathbf{G}_m, \quad (5.93)$$

kde  $ij$ -tý prvek matice  $\mathbf{H}_m$  je  $\eta_{ij} = \mathbf{g}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j$ . V absolutně přesné aritmetice by  $\mathbf{H}_m$  byla jednotkovou maticí. V prostředí aritmetiky s konečnou přesností požadujeme, aby  $|\eta_{ij}|$  byla pro  $i \neq j$  na úrovni tzv. *jednotkové zaokrouhlovací chyby*  $\epsilon$ <sup>9</sup>. Pro výpočet sloupců matice  $\mathbf{H}_m$  lze odvodit rekurentní vzorec, analogický vzorcí (5.75) pro generaci Lanczosových vektorů. Platí (podrobnosti v [33], [65])

$$\beta_{j+1} \mathbf{h}_{j+1} \cong \mathbf{T}_{j-1} \mathbf{h}_j - \alpha_j \mathbf{h}_j - \beta_j \mathbf{h}_{j-1}. \quad (5.94)$$

Jiný způsob kontroly ztráty ortogonality byl navržen Paigem a je uveden např. v [33]. Místo vzájemné ortogonality mezi Lanczosovými vektory se testuje ortogonalita nově vypočteného Lanczosova vektoru k již vypočteným vlastním tvarům, tedy součiny

$${}^{(j)}\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j+1} = {}^{(j)}\mathbf{c}_i^T \mathbf{G}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j+1} = {}^{(j)}\mathbf{c}_i^T \mathbf{h}_{j+1}. \quad (5.95)$$

<sup>9</sup> Jednotková zaokrouhlovací chyba je definována pomocí čísla  $\epsilon$ , nejmenšího čísla v počítači, které splňuje vztah

$$1 + \epsilon > 1.$$

V přesné aritmetice je hodnota tohoto výrazu rovna nule. Paige však ukázal, že v prostředí počítačové aritmetiky je

$${}^{(j)}\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_{j+1} = \frac{\gamma_{ji} \|\mathbf{T}_j\| \epsilon}{\beta_{j+1} |\zeta_i|}, \quad (5.96)$$

kde  $(j)$  značí, že se jedná o veličiny v  $j$ -tém kroku Lanczosovy metody,  $\gamma_{ji}$  je číslo přibližně rovné jedné. Z (5.96) je zřejmé, že náhlý pokles hodnoty  $\beta_{j+1} |\zeta_i|$  má za následek výraznou ztrátu ortogonality. Poněvadž však výraz  $\beta_{j+1} |\zeta_i|$  je měřítkem přesnosti výpočtu vlastního čísla (5.91), je patrné, že *konvergence k vlastní frekvenci vede ke ztrátě ortogonality*.

Teoreticky platí, že pokud jsou dva po sobě jdoucí Lanczosovy vektory ortogonální k nějakému vlastnímu vektoru  $\mathbf{y}_i$ , potom všechny dále generované Lanczosovy vektory budou rovněž ortogonální k těmto vlastnímu vektoru. Toto tvrzení však neplatí při numerické realizaci. V důsledku omezené přesnosti výpočtu nastává jev, na který bylo upozorněno v souvislosti s inverzní iterací<sup>10</sup>. Ztrátu ortogonality je proto třeba kontrolovat v každém kroku. K tomu účelu je třeba nalézt málo pracný, ale účinný odhad veličiny  $\tau_j = {}^{(j)}\mathbf{y}_j^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j$ . To lze učinit opět prostřednictvím (5.82), odkud lze odvodit rekurentní vzorec

$$\tau_{j+1} \approx \frac{\left( \frac{1}{{}^{(j)}\omega_i^2} - \alpha_j \right) \tau_j - \beta_j \tau_{j-1}}{\beta_{j+1}}. \quad (5.97)$$

Hodnotu  $\tau_{j+1}$  je třeba vypočítat pro všechny zkonvergované vlastní tvary.

### Obnovení ortogonality

Nejjednodušším způsobem zajištění ortogonality nově vypočteného vektoru  $\mathbf{g}_{j+1}$  je odstranění podílu všech předcházejících Lanczosových vektorů Grammovou-Schmidtovou ortogonalizací. Takový postup se označuje jako *plná reortogonalizace*. Pokud se požaduje výpočet pouze několika vlastních tvarů a frekvencí (počet Lanczosových kroků je menší než poloviční šířka pásu matice tuhosti  $\mathbf{K}$ ), potom lze uvedený postup úspěšně aplikovat. Plná reortogonalizace splňuje podmínku přesnosti

$$|\mathbf{g}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j| < n \epsilon \quad \text{pro všechna } i \neq j. \quad (5.98)$$

<sup>10</sup> Při výkladu Grammovy-Schmidtovy ortogonalizace bylo uvedeno, že při výpočtu vyšších vlastních tvarů metodou inverzní iterace teoreticky postačuje odstranit nižší vlastní tvary z počáteční aproximace. V [19] je však ukázáno, že vlivem nepřesné aritmetiky by v takovém případě inverzní iterace konvergovala k prvnímu vlastnímu tvaru.

Ukázalo se však, že takto vysoká přesnost zachování ortogonalit není nezbytná. Zvláště při výpočtu značného počtu vlastních tvarů a frekvencí je plná reortogonalizace náročná na spotřebu strojového času. Parlett v [59] zavádí tzv. *selektivní reortogonalizaci*, u které je požadavek na zachování ortogonalit oslaben. Požaduje se, aby

$$|\mathbf{g}_i^T \mathbf{M} \mathbf{g}_j| < \sqrt{n\epsilon} \quad \text{pro všechna } i \neq j. \quad (5.99)$$

To umožňuje neprovádět reortogonalizaci vůči všem předcházejícím Lanczosovým vektorům, nýbrž pouze k těm, které nesplňují podmínku (5.99). Existují prakticky dva postupy, kterými lze proces selektivní reortogonalizace realizovat:

#### 1) Ortogonalizace vůči vypočteným vlastním vektorům

V procesu řešení se pro všechny již vypočtené vlastní frekvence ze vzorce (5.97) počítávají hodnoty  $\tau_j$ . Jakmile  $|\tau_j| > \sqrt{\epsilon}$ , je třeba provést reortogonalizaci a indikovaný vlastní tvar  $\mathbf{y}_j$  je třeba z nově vypočteného vektoru  $\mathbf{g}_{j+1}$  odstranit.

#### 2) Ortogonalizace vůči předcházejícím Lanczosovým vektorům

Měřtkem ztráty ortogonalit jsou prvky vektoru  $\mathbf{h}_{j+1}$ . Jakmile absolutní hodnota některého prvku vektoru  $\mathbf{h}_{j+1}$  je větší než  $\sqrt{\epsilon}$ , je třeba obnovit ortogonalitu mezi  $\mathbf{g}_{j+1}$  a  $\mathbf{g}_k$ .

Hughes v [33] doporučuje strategii, která je kombinací obou výše uvedených způsobů selektivní reortogonalizace. Při výběru postupu 1) nebo 2) se posuzuje skutečnost, zda ke ztrátě ortogonalit došlo z důvodu

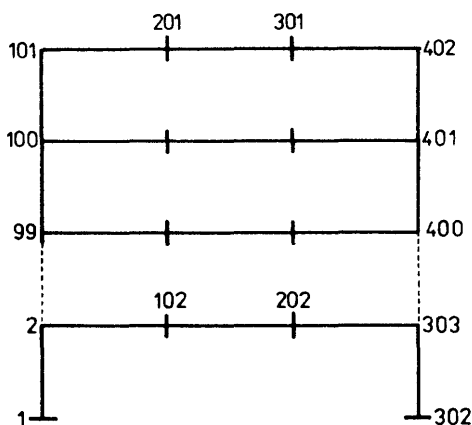
a) konvergence k vlastní frekvenci

b) infiltrace zkonvergovaných vlastních tvarů do Lanczosových vektorů.

V případě ad a) se doporučuje použít postup reortogonalizace podle bodu 2) v případě ad b) podle bodu 1) <sup>11</sup>.

Na příkladu rámové konstrukce z obr. 5.4 jsme porovnávali Lanczosovu metodu a metodu iterace podprostoru. Byl proveden výpočet prvních 30–ti vlastních tvarů. Úloha má 1200 stupňů volnosti a poloviční sířku pásu 306. V Lanczosově metodě byla použita plná reortogonalizace. Ukázalo se, že rychlejší je v tomto případě metoda iterace podprostoru. Výpočet na pracovní stanici *IBM RS/6000 model 320* trval 55 vteřin.

<sup>11</sup>Na tomto místě je třeba poznamenat, že výpočty koeficientů  $\tau_i$ ,  $\eta_{ij}$  vyžadují přibližně polovinu strojového času, který je potřebný k provedení odpovídající ortogonalizace v procesu plné reortogonalizace. Z toho vyplývá, že efektivnost selektivní reortogonalizace se projevuje až při řešení velmi rozsáhlých úloh.



Obr. 5.4: Rámová konstrukce s očíslováním uzlů

### 5.2.11 Aplikace Lanczosovy metody na řešení vlastního tlumeného kmitání

Základní pohybová rovnice pro tlumené vlastní kmitání má tvar

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (5.100)$$

Řešení této homogenní diferenciální rovnice hledíme ve tvaru  $\mathbf{r}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{y}$ . Po dosazení do (5.100) obdržíme charakteristickou rovnici

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (5.101)$$

kde  $\lambda$  a  $\mathbf{y}$  jsou vlastní číslo a vlastní vektor soustavy, přičemž  $\lambda$  i prvky vektoru  $\mathbf{y}$  jsou obecně komplexní čísla. Tento kvadratický problém vlastních čísel může být převeden na lineární zdvojnásobením řádu soustavy (5.101). Obdržíme

$$\lambda \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{B} \mathbf{w}, \quad (5.102)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \lambda \mathbf{y} \end{Bmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou symetrické, ne však pozitivně definitní,  $\lambda$  je vlastní číslo - obecně komplexní. Imaginární část  $\lambda$  představuje vlastní kruhovou frekvenci tlumeného kmitání, reálná část je mírou útlumu příslušného vlastního tvaru.

Pro řešení (5.102) lze aplikovat Lanczosovu metodu s modifikací, která byla formulována v [37]. Spočívá v tom, že Krylovova posloupnost se získá aplikací vztahu

$$\bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g}_j. \quad (5.103)$$

Ortogonalizaci vektoru  $\bar{\mathbf{z}}_j$  lze provést analogickým způsobem jako v čl. 5.2.10. Pro  $\alpha_j$  a  $\beta_j$  platí

$$\alpha_j = \delta_j \mathbf{g}_j^T \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g}_j, \quad \beta_j = \delta_{j-1} \mathbf{g}_{j-1}^T \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{g}_j. \quad (5.104)$$

Nový Lanczosův vektor  $\mathbf{g}_{j+1}$  se vypočte ze vzorce

$$\mathbf{g}_{j+1} = \frac{\mathbf{z}_j}{\gamma_j}, \quad (5.105)$$

kde

$$\gamma_j = \sqrt{|\mathbf{z}_j^T \mathbf{A} \mathbf{z}_j|}, \quad \delta_j = \text{sign}(\mathbf{z}_j^T \mathbf{A} \mathbf{z}_j).$$

### 5.3 Vynucené kmitání lineárních soustav

K dynamickému výpočtu potřebujeme znát v podstatě stejné údaje o konstrukci (až na charakteristiky útlumu, neboť hmotnost je úměrná tíze), jako k výpočtu statickému. Totéž nelze říci o zatížení, které pro statický výpočet je dáno působištem, směrem a velikostí, kdežto pro dynamický výpočet je třeba určit navíc časový průběh. Časový průběh zdůrazňujeme proto, že právě v něm tkví podstatný rozdíl mezi statickým a dynamickým zatížením. Dvě zatížení působící ve stejném místě téže konstrukce, mající stejný směr a velikost, avšak lišící se časovým průběhem, mohou způsobit namáhání konstrukce, která se od sebe i několikanásobně liší. Jsou známy příklady ze stavební praxe, kdy podcenění účinků dynamického zatížení vedlo k haváriím konstrukce.

V této kapitole vyložíme některé metody řešení odezvy konstrukcí na dynamické zatížení. Jak plyne z názvu kapitoly, bude pozornost věnována pouze řešení takových konstrukcí, jejichž chování lze popsat lineární rovnicí (5.2). Pod pojmem vynucené kmitání budeme dále rozumět jak kmitání ustálené, tak přechodové stavy, kdy je třeba sledovat vlnový charakter děje.

V čase proměnné zatížení konstrukcí (dynamické zatížení) můžeme dělit podle různých hledisek na

- zatížení  $\left\{ \begin{array}{l} \text{silami} \\ \text{přetvořením - je předepsán pohyb některých} \\ \text{bodů konstrukce} \end{array} \right.$
- zatížení  $\left\{ \begin{array}{l} \text{periodické, z něhož prakticky nejdůležitější} \\ \text{je zatížení harmonické} \\ \text{neperiodické} \end{array} \right.$
- zatížení  $\left\{ \begin{array}{l} \text{deterministické} \\ \text{stochastické (nejčastěji stacionární)}. \end{array} \right.$

Vynuceného kmitání může být v zásadě řešeno dvěma způsoby:

- a) rozvojem do vlastních tvarů kmitání  
 b) přímou integrací pohybové rovnice (5.2).

Oba postupy při použití stejné metody integrace a s využitím všech  $n$  vlastních tvarů dávají teoreticky stejné výsledky. Prakticky však při užití rozvoje do vlastních tvarů kmitání používáme pouze několika prvních tvarů a uvedené dva postupy dávají výsledky odlišné. Výhody a nevýhody obou postupů budou uvedeny v dalších odstavcích.

### 5.3.1 Řešení odezvy konstrukce na neperiodické zatížení rozvojem do vlastních tvarů kmitání

Metoda rozvoje do vlastních tvarů kmitání je velmi často používanou metodou pro řešení odezvy konstrukcí na obecné neperiodické zatížení, a to jak pro případ zatížení silami, tak po určité úpravě i pro zatížení způsobené pohybem částí konstrukce. Princip metody spočívá v tom, že hledáme řešení rovnice (5.2) ve tvaru lineární kombinace vlastních tvarů kmitání. Koeficienty lineární kombinace označíme  $q_i$  a sestavíme je do vektoru  $\mathbf{q}$ . Vzhledem k tomu, že vektor  $\mathbf{r}$  (resp. jeho složky) je funkcí času, je třeba, aby i součin  $\mathbf{Y}\mathbf{q}$  byl funkcí času. Položíme tedy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{q}(t). \quad (5.106)$$

Závislost na čase nebudeme pro zjednodušení zápisu explicitně vyznačovat. Dosadíme-li (5.106) do (5.2), vyjde (matici počátečních napětí neuvažujeme)

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = \mathbf{R}. \quad (5.107)$$

Vynásobíme nyní (5.107) zleva maticí  $\mathbf{Y}^T$ :

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = \mathbf{Y}^T\mathbf{R}. \quad (5.108)$$

Jelikož vlastní tvary jsou ortogonální ve smyslu (5.20) a (5.21), můžeme (5.108) převést na tvar

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \mathbf{R}. \quad (5.109)$$

Rovnice (5.109) podobně jako (5.2) představuje v obecném případě simultánní soustavu  $n$  diferenciálních rovnic druhého řádu. K rovnici (5.109) je třeba uvést ještě příslušné počáteční podmínky. Označme vektor počátečních posunů uzlových bodů příslušný k rovnici (5.2)  $\mathbf{r}_0$  a vektor rychlosti posunů uzlových bodů  $\dot{\mathbf{r}}_0$ . Tyto vektory přirozeně nejsou funkcí času. Obdobně jako vektor  $\mathbf{r}$  je vyjádříme jako lineární kombinaci vlastních vektorů. Koefficienty lineární kombinace označíme  $q_{i0}$ ,  $\dot{q}_{i0}$  a sestavíme do vektoru  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$ . Platí

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{Y} \mathbf{q}_0 \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{Y} \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (5.110)$$

Abychom mohli vypočítat vektor  $\mathbf{q}_0$ , vynásobíme první rovnici (5.110) zleva součinem  $\mathbf{Y}^T \mathbf{M}$ , takže

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{r}_0 = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \mathbf{q}_0. \quad (5.111)$$

S využitím (5.20) můžeme psát

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{r}_0 \quad \text{a podobně} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (5.112)$$

### Speciální tvary matice útlumu

Útlum konstrukce má značný vliv na odezvu konstrukce hlavně při vyšetřování účinků zemětřesení nebo rozběhu točivých strojů. Pro taková zatížení je charakteristické, že jsou širokofrekvenční a mohou tudíž způsobit řadu rezonancí vyšetřované konstrukce. Existence útlumu v konstrukci značně redukuje účinky uvedených zatížení. Obdobná situace je v případech ustáleného harmonického zatížení, kdy výchylky při rezonanci jsou prakticky funkcí velikosti útlumu. Zavedení útlumu do výpočtu není jednoduchá záležitost. A to především z toho důvodu, že máme zatím omezené znalosti o mechanismu tlumení v konstrukcích. Chybí seriózní experimentální podklady. Za této situace je proto přirozené, že způsob zavedení útlumu do pohybové rovnice (5.2) je vždy kompromisem mezi konzistentní fyzikální formulací obsahující obtížné stanovitelné konstanty a požadavkem matematické jednoduchosti. Požadavek matematické jednoduchosti vystupuje do popředí zvláště v souvislosti s metodou rozvoje do vlastních tvarů kmitání. Jestliže se nám totiž podaří, aby matice  $\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$  byla diagonální, potom se



soustava (5.109) rozpadne na  $n$  nezávislých diferenciálních rovnic, čímž se její řešení podstatně zjednoduší. Pokud rovnici (5.2) řešíme přímou integrací (odst. 5.3.3), nepřináší jednoduchost matic  $\mathbf{C}$  tolik výhod a je proto účelné užít alespoň v některých případech k jejímu sestavení konzistentní formulace. Stejně je tomu při přímém řešení ustáleného harmonického kmitání (čl. 5.4), kdy zavedení konzistentní matice útlumu nepřináší žádné potíže. O konzistentní formulaci bylo stručně pojednáno v odst. 1.6.4. Podrobněji se této otázce nebudeme věnovat, neboť jde o speciální problém přesahující rámec monografie. Nejjednodušším (a při konkrétních praktických výpočtech nejčastěji používaným) předpokladem pro sestavení matice  $\mathbf{C}$  je předpoklad tzv. *proporcionálního útlumu*, pro který platí

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} = 2\mathbf{\Omega}_b, \quad (5.113)$$

kde  $\mathbf{\Omega}_b$  je diagonální matice, jejíž prvky  $\omega_b$ , jsou dány vztahem

$$\omega_b = \xi_i \omega_i, \quad (5.114)$$

kde  $\xi_i$  je koeficient poměrného útlumu  $i$ -tého vlastního tvaru,  $\omega_i$  je  $i$ -tá vlastní frekvence.

V případě proporcionálního útlumu jsou tvary vlastního kmitání ortogonální i vzhledem k matici útlumu  $\mathbf{C}$ . Jak již bylo výše uvedeno, rozpadne se simultánní soustava  $n$  diferenciálních rovnic (5.109) na  $n$  rovnic nezávislých (kanonický tvar)

$$\ddot{q}_i + 2\omega_b \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.115)$$

kde  $f_i$  jsou prvky vektoru

$$\mathbf{f} = \mathbf{Y} \mathbf{R}^T. \quad (5.116)$$

Každá z rovnic (5.115) je pohybovou rovnicí soustavy s jedním stupněm volnosti. Symbol  $\omega_b$ , nazveme frekvencí útlumu. Tato formulace je velmi jednoduchá, předpokládá však znalost koeficientů poměrného útlumu  $\xi_i$  pro všechny vlastní frekvence, což je požadavek prakticky nesplnitelný. Proto je třeba přibrat určitou hypotézu, která umožní stanovit všechna  $\xi_i$  na základě pouze několika málo konstant. Takovou hypotézou je útlum Rayleighův, často užívaný při řešení praktických úloh. Matice útlumu  $\mathbf{C}$  je dána jako lineární kombinace matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  a matice tuhosti  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (5.117)$$

kde  $\alpha \mathbf{M}$  je útlum úměrný rychlosti posunů,  
 $\beta \mathbf{K}$  je útlum úměrný rychlosti deformace.

Pro řešení odezvy konstrukcí na harmonické buzení se ukázalo, že velmi blízko skutečnosti je předpoklad frekvenčně nezávislého útlumu.

### Řešení kmitání způsobeného přetvořením konstrukce

Již v úvodu bylo řečeno, že konstrukce může být zatížena buď v čase proměnnými silami, nebo v čase proměnným vynuceným přetvořením konstrukce. Pro řešení konstrukce zatížené vnějšími silami při homogenních okrajových podmínkách je možné přímo použít postup, popsany rovnicemi (5.106) až (5.112), neboť úloha (5.2) je v takovém případě definována na stejném prostoru jako úloha (5.9). Pro řešení odezvy na zatížení pohybem podpor není možné přímo užít metody rozvoje do vlastních tvarů kmitání, protože ve všech vlastních tvarech jsou posuny podpor nulové. Příkladem takového zatížení je především zatížení seismické. Seismické zatížení je vyvoláno buď zemětřesením nebo seismickými účinky technických zdrojů (buchary, výbuchy ap.). Definiční obor úlohy (5.2) je v případě zatížení pohybem podpor širší. K rozšíření užijeme známého obratu z matematiky, kdy řešení se hledá ve tvaru součtu dvou řešení

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{r}^v. \quad (5.118)$$

Zde  $\mathbf{r}^*$  je jakékoliv řešení, které vyhovuje předepsaným nenulovým okrajovým podmínkám (ty respektují posuny podpor) a podmínkám spojitosti, avšak nesplňuje podmínku rovnováhy (5.2). Naopak  $\mathbf{r}^v$  je řešení s nulovými okrajovými podmínkami, které uvádí celou soustavu do rovnováhy, což znamená, že musí být stanoveno tak, aby vektor  $\mathbf{r}$  z (5.118) splňoval (5.2). Z tohoto požadavku pro  $\mathbf{r}^v$  plyne rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^v + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}^v + \mathbf{K}\mathbf{r}^v = \mathbf{R} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^* - \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}^* - \mathbf{K}\mathbf{r}^*. \quad (5.119)$$

Možnosti volby pro vektor  $\mathbf{r}^*$  jsou dosti široké. V deformační variantě MKP lze například položit všechny zobecnělé posuny uzlových bodů rovné nule kromě těch, které jsou předepsány (zatížení přetvořením). Taková volba  $\mathbf{r}^*$  není vhodná vzhledem k tomu, že je citlivá na numerickou přesnost výpočtu [64]. Ve většině případů zatížení konstrukce pohybem podpor můžeme předpokládat, že časový průběh posunů všech podpor je stejný, tj.

$$\mathbf{r}^*(t) = \mathbf{r}^s \eta(t). \quad (5.120)$$

Funkce  $\eta(t)$  udává časový průběh posunu podpor. Vektor  $\mathbf{r}^s$  volíme tak, aby

$$\mathbf{K}\mathbf{r}^s = \mathbf{0}. \quad (5.121)$$

Potom  $r^s$  vyjadřuje statické přetvoření řešené konstrukce způsobené statickým posunem podpor.

Rovnici (5.119) vyřešíme rozvojem do vlastních tvarů. Pro  $r^v$  platí

$$r^v = Yq^v. \quad (5.122)$$

Dosadíme (5.122) do (5.119) a vynásobíme rovnici (5.119) zleva  $Y^T$ . Vychází

$$\begin{aligned} Y^T M Y \ddot{q}^v + Y^T C Y \dot{q}^v + Y^T K Y q^v \\ = Y^T R - Y^T M \ddot{r}^* - Y^T C \dot{r}^* - Y^T K r^*. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Dále uplatníme v (5.123) podmínky (5.20) a (5.21). Výraz  $Y^T C \dot{r}^*$  jakožto útlum aperiodické složky pohybu zanedbáme. Konečně výraz  $Y^T K r^*$  nabývá vzhledem k (5.121) nulové hodnoty. Rovnici (5.123) uvedeme s využitím (5.119) na tvar

$$\ddot{q}^v + Y^T C Y \dot{q}^v + \Omega^2 q^v = Y^T R - Y^T M r^s \ddot{\eta}(t). \quad (5.124)$$

Rovnicí (5.120) jsme zavedli omezující podmínku pro posuny podpor. Výjimečně by se mohl vyskytnout případ, že časový průběh posunů jednotlivých podpor je různý. V takovém případě využijeme principu superpozice. Zvlášť vypočítáme časový průběh odezvy na vnější zatížení a na pohyb každé podpory a výsledky sečteme.

### Řešení se zanedbáním útlumu

Neopohledíme-li při výpočtu vynuceného kmitání k vlivu útlumu, rozpadne se soustava (5.109) vždy na  $n$  nezávislých rovnic typu

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.125)$$

Každá z nich představuje pohybovou rovnici soustavy s jedním stupněm volnosti (hmotnost se rovná jedné, tuhost pružiny  $\omega_i^2$ ). Počáteční podmínky jsou dány vztahy (5.112). Řešení rovnic (5.125) můžeme získat buď některou z metod numerické integrace uvedených v odstavci 5.3.3 nebo pomocí Duhamelova integrálu

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau + a_i \sin \omega_i t + b_i \cos \omega_i t. \quad (5.126)$$

Integrační konstanty  $a_i$ ,  $b_i$  určíme z počátečních podmínek. Duhamelův integrál pro neperiodické zatížení zpravidla počítáme numericky, a to ze dvou

důvodů. Bud' se nepodaří pro danou funkci  $f_i = f_i(\tau)$  integrál vypočítat v uzavřeném tvaru nebo funkce  $f_i$  je zadána tabulkou. Abychom získali úplné řešení rovnice (5.2), musíme v rozvoji (5.106) užít všech  $n$  vlastních tvarů. To znamená vyřešit  $n$  rovnic (5.125). Použijeme-li stejnou metodu integrace, není v uvedeném případě rozdíl mezi rozvojem do vlastních tvarů a přímou integrací rovnice (5.2). Předpokládáme ale, že oba použité algoritmy budou dávat stejnou numerickou chybu.

Proč tedy vůbec používáme metodu rozvoje do vlastních tvarů? Důvodem je skutečnost, že v řadě úloh postačuje rozvoj do několika desítek (i méně) vlastních tvarů. Tak je tomu především u konstrukcí prutových a stěnodeskových. O nezbytném počtu vlastních tvarů v rozvoji (5.106) však rozhoduje nejen typ konstrukce, ale i frekvenční charakteristiky zatížení. V literatuře se uvádí [7], že při sledování vlnového charakteru určitého děje je třeba počítat v rozvoji alespoň s  $\frac{2}{3}n$  vlastních tvarů. Z toho je zřejmé, že k řešení úloh takového typu budeme zásadně používat některou z metod přímé integrace pohybové rovnice (5.2). Naopak metoda rozvoje do vlastních tvarů je vhodná při řešení účinku zemětřesení, větru a dynamických zatížení s výrazným podílem nižších frekvencí v jejich spektru.

### Řešení s uvažováním útlumu

Z hlediska řešení rovnic (5.109) budeme uvažovat dva rozdílné případy útlumu:

- proporcionální
- neproporcionální.

Při *proporcionálním útlumu* se soustava (5.109) rozpadne (stejně jako v předcházejícím odstavci, kdy jsme neuvažovali útlum) na  $n$  nezávislých diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\ddot{q}_i + 2\omega_b \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.127)$$

Obdobně jako (5.125) představuje každá z rovnic (5.127) pohybovou rovnici soustavy s jedním stupněm volnosti, tentokrát s útlumem. Její řešení lze pomocí Duhamelova integrálu zapsat ve tvaru

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i (t-\tau) d\tau + e^{-\xi_i \omega_i t} (a_i \sin \bar{\omega}_i t + b_i \cos \bar{\omega}_i t), \quad (5.128)$$

kde  $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$  je frekvence vlastního tlumeného kmitání. Postup je obdobný jako v předcházejícím odstavci.

K řešení úlohy s *neproporcionálním útlumem* (matice  $\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$ ) lze použít v podstatě čtyři postupy (předpokládáme, že jde o úlohu, kdy v rozvoji (5.106) postačuje uvažovat  $p \ll n$  vlastních tvarů):

**(A) Užití vážených koeficientů poměrného útlumu**

Postup je založen na diagonalizaci matice  $\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$ , která spočívá ve stanovení vážených koeficientů poměrného útlumu a v zanedbání mimodiagonálních prvků. Metoda stanovení vážených koeficientů  $\xi_i$  je vyložena v [57], kde jsou rovněž uvedeny příklady výpočtů, z kterých je patrné, že při užití realistických hodnot  $\xi_i$  můžeme získat prakticky cenné výsledky. Obecně však tento postup není vhodný, neboť stírá základní odlišnost neproporcionálního a proporcionálního útlumu.

**(B) Diagonalizace pomocí komplexních vlastních tvarů**

Užitím komplexních vlastních frekvencí a vlastních tvarů konstrukce s útlumem lze diagonalizovat matici  $\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$  i pro neproporcionální útlum. K výpočtu komplexních vlastních tvarů lze po určité úpravě užít např. metodu inverzní iterace nebo Lanczosovu metodu. Význam komplexních vlastních tvarů tkví v tom, že poskytují současně dvě informace. Jednak o skutečném tvaru kmitání a potom o fázovém posunutí. Pro lepší představu o rozdílu mezi proporcionálním a neproporcionálním útlumem provedme analýzu kmitání konstrukce, způsobeného počátečním posunem. Sledujme jedinou složku kmitání příslušnou vlastní frekvenci  $\omega_i$ . Při proporcionálním útlumu je odpovídající vlastní tvar shodný s tvarem netlumené soustavy s tím, že amplituda kmitání se s časem zmenšuje podle exponenciály. Uzly kmitání se nepohybují. Říkáme, že jsou stacionární. Všechny body konstrukce kmitají ve stejné fázi (se stejným fázovým posunutím vůči ostatním tvarům kmitání). Odlišná situace je v případě útlumu neproporcionálního, kdy dochází nejen k poklesu amplitudy, ale současně k tomu, že jednotlivé body konstrukce kmitají s různým fázovým posunutím. V důsledku toho dochází během jedné periody k pohybu uzlů kmitání. Říkáme, že v případě neproporcionálního útlumu jsou uzly kmitání nestacionární. Stejně jako u proporcionálního útlumu postačuje k řešení pouze malý počet vlastních tvarů. Nevýhodou je skutečnost, že musíme řešit problém vlastních čísel

$$(\mathbf{K} + i\hat{\Omega}\mathbf{C} - \hat{\Omega}^2\mathbf{M})\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}, \quad (5.129)$$

kde  $\widehat{\Omega}$ ,  $\widehat{\Omega}^2$ ,  $\widehat{Y}$  jsou matice, jejichž prvky jsou komplexní čísla. Z toho plyne podstatně vyšší nárok na paměť počítače. Rovněž potřebný počet aritmetických operací je vyšší než při řešení úlohy (5.9). Jak pro ustálené kmitání řešení zjednodušit, je uvedeno v dalším odstavci.

**(C) Přímá integrace soustavy  $p$  simultánních rovnic (5.109)**

Označme  $\overline{Y}$  matici, jejíž sloupce tvoří prvních  $p$  vlastních tvarů úlohy (5.9). Součin  $\overline{Y}^T C \overline{Y}$  označme  $\overline{C}$ . Konečné prvky diagonální matice  $\overline{\Omega}^2$  je prvních  $p$  kvadrátů vlastních frekvencí. Potom lze (5.109) uvést na tvar

$$\ddot{\mathbf{q}} + \overline{C} \dot{\mathbf{q}} + \overline{\Omega}^2 \mathbf{q} = \overline{Y}^T \mathbf{R}. \quad (5.130)$$

Je zřejmé, že k řešení rovnice (5.130) lze užít stejných metod přímé integrace jako v případě původní úlohy (5.2). Podrobnosti lze nalézt v odstavci 5.3.3. Uvedený postup je efektivní jen tehdy, jestliže uvažujeme v rozvoji (5.106) pouze několik vlastních tvarů. Typickým představitelem takového typu úloh je výpočet odezvy systému konstrukce - podloží na seismické účinky zemětřesení.

**(D) Iterační řešení založené na rozkladu matice  $C$**

Tento velice efektivní algoritmus byl navržen v [39]. Je založen na rozkladu matice útlumu  $C$  na diagonální a mimodiagonální matici

$$C = \text{diag } C + \overline{C}. \quad (5.131)$$

Rovnici (5.109) lze potom zapsat ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag } C \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \mathbf{f} - \overline{C} \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.132)$$

Vektorová rovnice (5.132) se řeší postupným přibližováním (iterací) podle následujícího předpisu ( $i$  je číslo iterace)

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + \text{diag } C \dot{\mathbf{q}}_{i+1} + \Omega^2 \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{f} - \overline{C} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (5.133)$$

s tím, že  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ . Výhoda uvedeného postupu spočívá v tom, že řešíme pouze soustavu nezávislých, obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

### 5.3.2 Statická a dynamická korekce

Předpokládejme pro jednoduchost, že zatížení lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{f}g(t),$$

kde vektor  $\mathbf{f}$  popisuje prostorové rozložení zatížení a funkce  $g = g(t)$  časový průběh zatížení. Dále předpokládejme, že máme vypočteno prvních  $p$  tvarů vlastního kmitání a že tudíž přibližné řešení rovnice (5.2) lze získat rozvojem do vlastních tvarů kmitání. Skutečnost, že k přibližnému řešení rovnice (5.2) se použije pouze omezený počet vlastních tvarů, příslušejících k nejnižším vlastním frekvencím, lze interpretovat tak, že se jedná o přesné řešení odezvy na jiné zatížení<sup>12</sup>. Matematicky lze tuto skutečnost popsat následujícím způsobem :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{M}\mathbf{Y}\mathbf{f}_p g(t), \quad (5.134)$$

kde  $\mathbf{f}_p = \mathbf{Y}^T \mathbf{f}$ . O správnosti rovnice (5.134) se lze snadno přesvědčit řešením rozvojem do vlastních tvarů ( $\mathbf{r} = \mathbf{Y}\mathbf{q}$ ). Po dosazení do (5.134) a po přenásobení  $\mathbf{Y}^T$  zleva se obdrží

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \mathbf{f}_p g(t). \quad (5.135)$$

S využitím ortogonalitv vlastních tvarů a za předpokladu proporcionálního útlumu lze psát

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Omega_b \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \mathbf{q} = \mathbf{f}_p g(t),$$

což dokazuje správnost (5.134). Současně to dovoluje kvantifikovat chybu v zatížení, kterou označíme  $\mathbf{R}_e$ . Platí

$$\mathbf{R}_e = (\mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{Y}\mathbf{f}_p)g(t) = \mathbf{f}_e g(t), \quad (5.136)$$

Chybu ve stanovení odezvy konstrukce způsobenou uvažováním pouze  $p$  prvních vlastních tvarů lze vypočítat z rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_e + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_e + \mathbf{K}\mathbf{r}_e = \mathbf{R}_e. \quad (5.137)$$

Vypočítat odezvu konstrukce  $\mathbf{r}_e$  na zatížení  $\mathbf{R}_e$  pomocí rozkladu do prvních  $p$  vlastních tvarů není možné, neboť  $\mathbf{R}_e$  je k těmto vlastním tvarům ortogonální. Pokud ale prvních  $p$  vlastních tvarů dobře pokrývá svými frekvencemi

<sup>12</sup>Prostorové rozložení takového zatížení lze získat jako lineární kombinaci nejnižších  $p$  vlastních tvarů.

podstatnou část spektra zatížení, je možné při výpočtu odezvy na zatížení  $R_e$  zanedbat  $\ddot{r}_e$  a  $\dot{r}_e$ . Potom se  $r_e$  vypočte přibližně z rovnice

$$K r_s = f_e, \quad r_e = r_s g(t). \quad (5.138)$$

Vektor  $r_s$  bývá označován jako statická korekce.

Vektoru  $r_s$  lze dále využít ke zpřesnění řešení rovnice (5.137). Poněvadž je ortogonální k prvním  $p$  vlastním tvarům, můžeme jej považovat za další člen řady ortogonálních funkcí  $Y$ . Potom místo druhého vztahu v (5.138) můžeme psát

$$r_e \approx r_s q_s(t). \quad (5.139)$$

Po dosazení do (5.137) a přenásobení zleva  $r_s$  získáme obyčejnou diferenciální rovnici

$$M^* \ddot{q}_s + C^* \dot{q}_s + K^* q_s = K^* g(t). \quad (5.140)$$

kde

$$M^* = r_s^T M r_s, \quad C^* = r_s^T C r_s, \quad K^* = r_s^T K r_s.$$

Vektor  $r_e$ , který se získá spojením řešení rovnice (5.140) se vzorcem (5.139) se nazývá dynamická korekce.

Rozšíření metody rozvoje do vlastních tvarů kmitání o korekce uvedené v tomto odstavci výrazně přispívá ke zlepšení řešení, a to zvláště v případech zatížení osamělými břemeny. Postup je snadno implementovatelný do stávajících programů pro dynamickou analýzu konstrukcí.

### 5.3.3 Řešení odezvy konstrukce na neperiodické zatížení přímou integrací

V odstavci 5.3.1 byl vyložen postup řešení rovnice (5.2) rozvojem do vlastních tvarů. Tato metoda je však použitelná pouze k řešení lineární rovnice (5.2). Kromě toho není vhodná ani k řešení těch lineárních úloh, kde je třeba sledovat vlnový charakter děje. V uvedených případech se k řešení používá přímá numerická integrace rovnice (5.2). Základní myšlenka numerické integrace spočívá v tom, že rovnici (5.2) splníme pouze v konečném počtu okamžiků  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Vzdálenost jednotlivých okamžiků

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.141)$$

se nazývá délka integračního kroku. Nedílnou součástí rovnice (5.2) jsou i zadané počáteční podmínky. Za počátek považujeme čas  $t = 0$ . Potom platí:

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0. \quad (5.142)$$



Předpokládejme, že známe přibližná řešení v časech  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ . Pomocí nich máme stanovit řešení v čase  $t_k$ . Jestliže se nám to podaří, potom použitý postup řešení definuje metodu numerické integrace, neboť čas  $t_k$  může být kterýkoliv z posloupnosti  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Pro typický integrační krok budeme místo  $t_{k+1}, t_k, \Delta t_k$  užívat nadále označení  $t + \Delta t, t, \Delta t$ . Na první pohled se může zdát zbytečné zabývat se numerickými metodami integrace diferenciálních rovnic, když matematika zná celou řadu takových metod. Důvod je podobný jako u problému vlastních čísel. Rovnice (5.2) je speciálním typem soustavy diferenciálních rovnic. Ve spojení s MKP řešíme velmi rozsáhlé soustavy těchto rovnic. Je proto výhodné formulovat i jednocelové metody a postupy, efektivní jak z hlediska spotřeby strojového času, tak nároků na paměť počítače.

V následujících článcích uvedeme několik metod numerické integrace vhodných k řešení lineární i nelineární rovnice (5.2). Všechny uvedené metody (s výjimkou diferenční metody) jsou jednokrokové, tzn., že charakteristiky pohybu  $r, \dot{r}, \ddot{r}$  v čase  $t + \Delta t$  vypočteme pouze na základě jejich hodnot v čase  $t$ . Výhodou jednokrokových metod je skutečnost, že není třeba žádného speciálního postupu na začátku integračního procesu.

Dříve než přistoupíme k výkladu jednotlivých integračních metod, zavedeme určitou klasifikaci a uvedeme některé obecné poznatky. Zpravidla rozlišujeme tři typy metod:

- explicitní
- implicitní
- prediktor - korektor.

První dvě metody považujeme za základní. Metoda prediktor - korektor je v podstatě simulací implicitní metody. Jako zvláštní typ ji uvádíme především proto, že zaujímá mimořádnou pozici při řešení nelineárních úloh. Integrační metoda je explicitní nebo implicitní podle toho, v kterém okamžiku využívá rovnici (5.2).

V *explicitní metodě* na základě předpokladu o průběhu pohybových charakteristik  $r, \dot{r}, \ddot{r}$  v intervalu  $\langle t, t + \Delta t \rangle$  a jejich znalosti v okamžiku  $t$ , vypočteme z pohybové rovnice (5.2) vektory  $r_{t+\Delta t}, \dot{r}_{t+\Delta t}, \ddot{r}_{t+\Delta t}$ . V explicitních metodách se neprovádí triangulace (faktorizace) matice tuhosti, ani její modifikace, nýbrž triangulace matice hmotnosti. Případně se matice tuhosti ani nesestavuje. Proto se explicitní metody používají především v kombinaci s diagonální maticí soustředěných hmotností. Určitá potíž vzniká v takovém případě s nehmotnými stupni volnosti, které je nutné buď vyloučit statickou

kondenzací nebo přiřazením malé hmotnosti z nich učinit hmotné stupně volnosti.

*Implicitní metody* naopak využívají rovnice (5.2) v čase  $t + \Delta t$ . Jsou vhodné především při řešení lineární rovnice (5.2) s konzistentní maticí hmotnosti.

Poněvadž při výkladu jednotlivých metod numerické integrace je uvedeno, zda je metoda stabilní, definujme stručně pojem stability. Stabilita znamená, že pro libovolné počáteční podmínky nesmí řešení vzrůstat nade všechny meze. Je-li tato podmínka splněna pro libovolný poměr  $\Delta t/T_n$ , říkáme, že metoda je nepodmíněně stabilní, je-li splněna pouze pro omezený poměr  $\Delta t/T_n$ , mluvíme o metodě podmíněně stabilní ( $T_n$  je nejkratší vlastní perioda).

### Diferenční metoda

K numerické integraci diferenciální rovnice můžeme užít náhrady derivací nezávisle proměnné podle času diferencemi. Uvedeme metodu, která vychází z nejjednodušší diferenční náhrady

$$\ddot{\mathbf{r}}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{r}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{r}_t + \mathbf{r}_{t-\Delta t}), \quad (5.143)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{r}_{t+\Delta t} - \mathbf{r}_{t-\Delta t}), \quad (5.144)$$

kteřou aplikujeme na rovnici (5.2) v čase  $t$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_t + \mathbf{K}\mathbf{r}_t = \mathbf{R}_t. \quad (5.145)$$

Po dosazení a úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{r}_{t+\Delta t} &= \mathbf{R}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{r}_t \\ &- \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{r}_{t-\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Diferenční metoda je typ explicitní metody, tj. nevyžaduje triangulaci (faktorizaci) matice  $\mathbf{K}$  (ani její modifikované formy). Metoda má všechny výhody explicitních metod, pokud  $\mathbf{C} = \mathbf{O}$  nebo  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M}$ . Nejeftektivnější použití je při diagonální matici hmotnosti. Metoda je však jen podmíněně

stabilní, což v tomto případě znamená, že délka integračního kroku  $\Delta t$  musí splňovat podmínku:

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi}, \quad (5.147)$$

kde  $T_n$  je nejmenší perioda kmitání. Vyvstaly tudíž dva protichůdné požadavky:

- užít diagonální matici soustředěných hmotností
- zajistit splnění podmínky (5.147).

Důsledkem aplikace soustředěných hmotností pro modelování setrvačných vlastností konstrukce jsou nehmotné stupně volnosti, tj. nulové prvky v diagonální matici  $\mathbf{M}$ . I když tyto nuly nahradíme malými čísly, znamená to, že konstrukce má velmi krátké periody vlastního kmitání, příslušné původně nehmotným stupňům volnosti. Abychom tudíž získali diferenční metodou správné řešení, je třeba užít velmi malé délky integračního kroku. Řešení se tím stává velmi drahé. Přitom je z fyzikálního hlediska zřejmé, že nehmotné stupně volnosti příliš neovlivňují dynamické vlastnosti řešené konstrukce. Další nevýhodou je skutečnost, že v prvním kroku je třeba speciálního postupu. Tím vlastně diferenční metoda vybočuje z rámce jednokrokových metod. Přesto jsme uvedli stručný výklad a analýzu této metody, neboť je úspěšně používána v různých modifikacích. Zmíněné nedostatky jsou však vyváženy skutečností, že není třeba lokalizovat matici tuhosti konstrukce. Explicitní metody se uplatnily zejména při řešení úloh šíření vln napětí a v nelineárních úlohách.

### Newmarkova metoda

Newmarkova metoda je metodou implicitní. Ve své původní a dosud nejčastěji používané podobě jako metoda průměrného konstantního zrychlení byla publikována v [55]. Základní vzorce Newmarkovy metody, udávající vztah mezi posunem, rychlostí a zrychlením v čase  $t$  a  $t + \Delta t$  mají tvar

$$\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{r}}_t + \delta\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}] \Delta t, \quad (5.148)$$

$$\mathbf{r}_{t+\Delta t} = \mathbf{r}_t + \Delta t \dot{\mathbf{r}}_t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{r}}_t + \alpha \ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2. \quad (5.149)$$

Parametry  $\alpha, \delta$  lze určit tak, aby metoda byla stabilní. Zvolíme-li  $\delta = 1/2$  a  $\alpha = 1/4$ , dostaneme metodu průměrného konstantního zrychlení. Kromě

vzorců (5.148), (5.149) máme ještě k dispozici pohybovou rovnici (5.2) pro čas  $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{r}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}. \quad (5.150)$$

Nyní můžeme dosadit (5.148), (5.149) do (5.150), takže po úpravě vznikne soustava lineárních algebraických rovnic pro  $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$

$$(\mathbf{M} + \delta\Delta t\mathbf{C} + \alpha\Delta t^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} \quad (5.151)$$

$$= -\mathbf{K}\mathbf{r}_t - (\mathbf{C} + \Delta t\mathbf{K})\dot{\mathbf{r}}_t - \left[ (1 - \delta)\mathbf{C} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Delta t\mathbf{K} \right] \Delta t\ddot{\mathbf{r}}_t.$$

Jakmile vypočítáme  $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$ , lze dosadit zpět do (5.148) a (5.149), odkud obdržíme  $\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$  a  $\mathbf{r}_{t+\Delta t}$ . Tento postup můžeme m-krát opakovat a výsledkem bude přibližné řešení rovnice (5.2) na intervalu  $< 0, t_m >$ . Z rovnice (5.151) je patrné, že k výpočtu  $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$  je třeba triangulovat matici

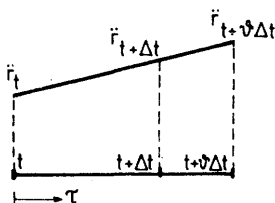
$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{M} + \delta\Delta t\mathbf{C} + \alpha\Delta t^2\mathbf{K}. \quad (5.152)$$

Při řešení lineárních úloh jsou matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  konstantní. Bylo by tudíž účelné matici  $\hat{\mathbf{K}}$  během integračního procesu neměnit, aby ji nebylo třeba znovu triangulovat. Toho lze docílit jedině tak, že nebudeme měnit délku integračního kroku. Následující závěr platí pro všechny implicitní metody aplikované na řešení lineární rovnice (5.2). *Má-li být aplikace implicitních metod při řešení lineárních úloh efektivní, musí být délka integračního kroku konstantní.* Prozkoumejme podrobněji tvar rovnice (5.151) vzhledem k nárokům na paměť počítače. Pokud jde o levou stranu této rovnice, stačí uchovávat pouze triangulovanou formu matice  $\hat{\mathbf{K}}$ . K výpočtu vektoru pravé strany, který se v každém kroku opakuje, potřebujeme matice  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{K}$ , eventuálně  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$ , pokud uijeme Rayleighova útlumu. Z uvedené skutečnosti je patrné, že algoritmus Newmarkovy metody popsany rovnicemi (5.148), (5.149) a (5.151) je značně náročný na velikost paměti počítače. Lze ukázat, že při modelování tlumících vlastností Rayleighovým útlumem můžeme vhodnou substitucí nárok na paměť počítače podstatně snížit.

### Wilsonova $\theta$ -metoda

Stejně jako Newmarkova, je i Wilsonova metoda implicitní. Její původní verze, metoda lineárního zrychlení, která je z dnešního hlediska totožná s Newmarkovou metodou (vzorce (5.148), (5.149) pro  $\delta = 1/2$  a  $\alpha = 1/6$ ), prošla značným vývojem. Nejprve to byla metoda lineárních průměrných

zrychlení, která je zvláštním případem tzv. Wilsonovy  $\theta$ -metody ( $\theta = 2$ ). Základním předpokladem je lineární změna zrychlení na intervalu  $\langle t, t + \theta\Delta t \rangle$ , jak je znázorněno na obr. 5.5. V libovolném bodě intervalu platí



Obr. 5.5: Průběh zrychlení v čase

$$\ddot{r}_{t+\tau} = \ddot{r}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{r}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{r}_t). \quad (5.153)$$

Postupnou integrací obdržíme

$$\dot{r}_{t+\tau} = \dot{r}_t + \tau\ddot{r}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{r}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{r}_t), \quad (5.154)$$

$$r_{t+\tau} = r_t + \tau\dot{r}_t + \frac{\tau^2}{2}\ddot{r}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{r}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{r}_t). \quad (5.155)$$

Dosazením  $\tau = \theta\Delta t$  získáme vztahy  $\dot{r}_{t+\theta\Delta t}$  a  $r_{t+\theta\Delta t}$  ve tvaru

$$\dot{r}_{t+\theta\Delta t} = \dot{r}_t + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{r}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{r}_t), \quad (5.156)$$

$$r_{t+\theta\Delta t} = r_t + \theta\Delta t\dot{r}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{r}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{r}_t). \quad (5.157)$$

Rovnice (5.156), (5.157) jsou obdobou vztahů (5.148), (5.149) v Newmarkově metodě. Dále bychom mohli postupovat stejně, tj. dosadit (5.156) a (5.157) do pohybové rovnice v čase  $t + \theta\Delta t$  a z ní vypočítat  $\ddot{r}_{t+\theta\Delta t}$ . Pomocí rovnic (5.153), (5.154) a (5.155) po dosazení  $\tau = \Delta t$  snadno vypočítáme  $\ddot{r}_{t+\theta\Delta t}$ ,  $\dot{r}_{t+\theta\Delta t}$ ,  $r_{t+\theta\Delta t}$ . Stejně jako v předcházejícím předpokládáme užití Rayleighova útlumu.

Popsaný algoritmus vyžaduje opět zbytečné uchovávání velkých matic. Tento nedostatek je možné odstranit stejně jako u Newmarkovy metody vhodnou substitucí. Navíc je vhodné uspořádat algoritmus tak, že je až na

hodnoty použitých konstant  $a_0, a_1, \dots, a_{10}$  shodný s algoritmem Newmarkovy metody. Tím je umožněno velmi snadno zařadit do jediného programu dvě metody integrace pohybové rovnice. Podrobný popis algoritmu je uveden v tab. 5.3 společně s Newmarkovou metodou. Stabilita a přesnost metody záleží na volbě koeficientu  $\theta$ . Aby metoda byla stabilní, je třeba, aby  $\theta \geq 1.37$ . Podrobné odvození vzorců z tab. 5.3 lze nalézt v [19].

### 5.3.4 Výpočet seismických účinků ze spektra odezvy

Nevýhodou výpočtu odezvy konstrukce na seismické buzení přímou integrací v čase je jeho numerická náročnost. Kromě toho většinou nemáme k dispozici jako vstupní údaj akcelerogram zemětřesení nebo jiného seismického buzení. Proto byl navržen jednodušší postup, který vychází z tzv. *spektra odezvy* (response spectrum). Vzhledem k tomu, že tento postup je součástí řady norem, odvodíme zde vztahy, potřebné pro aplikaci MKP.

Předpokládejme proporcionální útlum. Vyjdeme z rovnice (5.124), kterou pro  $m$ -tou vlastní frekvenci přepíšeme do tvaru

$$\ddot{q}_m + 2\omega_{bm}\dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = f_m, \quad (5.158)$$

kde  $f_m$  představuje  $m$ -tý prvek vektoru  $\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{r}^s \ddot{\eta}(t)$ . Označme  $f_m(t) = R_m \ddot{\eta}(t)$  a napišme řešení rovnice (5.158) pomocí Duhamelova integrálu. Platí:

$$q_m(t) = \frac{R_m}{\omega_m} \int_0^t \ddot{\eta}(\tau) e^{-\xi_m \omega_m (t-\tau)} \sin \omega_m (t-\tau) d\tau. \quad (5.159)$$

Časový průběh odezvy, příslušné  $m$ -tému vlastnímu tvaru, je dán hodnotou integrálu v (5.159). Zmíněný integrál má rozměr rychlosti a jeho maximální hodnota se nazývá *spektrální rychlost* a označuje se  $S_v$ . Platí:

$$S_v = \max \left[ \int_0^t \ddot{\eta}(\tau) e^{-\xi_m \omega_m (t-\tau)} \sin \omega_m (t-\tau) d\tau \right]. \quad (5.160)$$

Vyneseme-li pro určitý akcelerogram grafy závislosti  $S_v$  na frekvenci  $\omega$  a poměrném útlumu  $\xi$ , získáme tzv. *spektra odezvy*. Pomocí nich snadno vypočteme maximum odezvy příslušné  $m$ -tému vlastnímu tvaru

$$q_{m,max} = \frac{R_m}{\omega_m} S_v(\omega_m, \xi_m). \quad (5.161)$$

Pomocí  $q_{m,max}$  lze vypočítat maximum libovolné mechanické veličiny  $S_{m,max}$  (průhybu, napětí), které přísluší  $m$ -tému vlastnímu tvaru podle

## A. Úvodní výpočty (provádějí se pouze jednou)

- a) Sestavení matice tuhosti  $\mathbf{K}$  a matice hmotnosti  $\mathbf{M}$   
 b) Určení  $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0$   
 c) Výpočet konstant  $a_0$  až  $a_{10}$

Newmarkova metoda  $\theta = 1$  (potřebné při výpočtu  $\mathbf{R}^*$ )

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4 + 2\alpha\Delta t}{\Delta t^2 + 2\beta\Delta t} & a_3 &= 1 & a_7 &= -1 \\ a_1 &= \frac{4}{\Delta t^2} + \frac{2}{\Delta t}(\alpha - a_0\beta) & a_4 &= \frac{4}{\Delta t^2 + 2\beta\Delta t} & a_8 &= \frac{\Delta t}{4} \\ a_2 &= \frac{4}{\Delta t} + (\alpha - a_0\beta) & a_5 &= -a_4 & a_9 &= \frac{\Delta t^2}{4} \\ & & a_6 &= a_5(\Delta t + \beta) & a_{10} &= a_9. \end{aligned}$$

Wilsonova metoda  $\tau = \theta\Delta t, \theta \geq 1,37$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6 + 3\alpha\tau}{\tau^2 + 3\beta\tau} & a_4 &= \frac{3}{(3\beta + \tau)\tau} \\ a_1 &= \frac{6}{\tau^2} + \frac{3}{\tau}(\alpha - \beta a_0) & a_3 &= \frac{3\beta}{\tau} a_4 - \frac{6}{\theta\tau^2} & a_8 &= \frac{\Delta t}{2} \\ a_2 &= \frac{6}{\tau} + 2(\alpha - \beta a_0) & a_6 &= 2\beta a_4 - \frac{6}{\theta\tau} & a_9 &= \frac{\Delta t^2}{3} \\ a_3 &= 2 + \frac{\tau}{2}(\alpha - \beta a_0) & a_7 &= 1 - \frac{3}{\theta} + \frac{\beta\tau}{2} a_4 & a_{10} &= \frac{\Delta t^2}{6} \end{aligned}$$

- d) Sestavení modifikované matice tuhosti  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M}$   
 e) Triangulace (faktorizace)  $\mathbf{K}^*$

## B. Pro každý integrační krok

- a) Sestavení modifikovaného vektoru zatížení  
 $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_t + \theta(\mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t) + \mathbf{M}(a_1\mathbf{r}_t + a_2\dot{\mathbf{r}}_t + a_3\ddot{\mathbf{r}}_t)$
- b) Výpočet vektoru  $\mathbf{r}^*$  z rovnice  
 $\mathbf{K}^*\mathbf{r}^* = \mathbf{R}^*$
- c) Výpočet zrychlení, rychlostí a posunutí v čase  $t + \Delta t$   
 $\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} = a_4\mathbf{r}^* + a_5\mathbf{r}_t + a_6\dot{\mathbf{r}}_t + a_7\ddot{\mathbf{r}}_t$   
 $\dot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}_t + a_8(\ddot{\mathbf{r}}_t + \ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t})$   
 $\mathbf{r}_{t+\Delta t} = \mathbf{r}_t + \Delta t\dot{\mathbf{r}}_t + a_9\ddot{\mathbf{r}}_t + a_{10}\ddot{\mathbf{r}}_{t+\Delta t}$
- d) Opakování od B. a)

Tabulka 5.3: Algoritmus Newmarkovy a Wilsonovy metody pro řešení úlohy s Rayleighovým útlumem  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$

vztahu

$$S_{m,max} = S_m q_{m,max}, \quad (5.162)$$

kde  $S_m$  je hodnota veličiny  $S$ , příslušná  $m$ -tému vlastnímu tvaru. Maxima na jednotlivých vlastních tvarech však nenastávají současně. Sečíst absolutní hodnoty všech  $S_{m,max}$  by vedlo k velmi konzervativnímu odhadu. Proto se k odhadu maxima používá vztah

$$S_{max} = \sqrt{\sum_m S_{m,max}^2}. \quad (5.163)$$

Tento způsob je velmi jednoduchý a dává dobré výsledky jestliže konstrukce nemá vlastní frekvence blízko sebe a jestliže všechny podpory kmitají přibližně stejně. Kiureghian odvodil obecnější vzorec pro odhad maxima ve tvaru

$$S_{max} = \sqrt{\sum_i \sum_j S_{i,max} S_{j,max} \rho_{ij}}, \quad (5.164)$$

kde

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2}, \quad r = \frac{\omega_i}{\omega_j}.$$

Uvedená formulace je založena na aplikaci náhodných procesů. Zahrnuje v sobě korelaci vlastních tvarů a lze ji použít i v případě konstrukcí, které mají velmi blízké vlastní frekvence. Ve výzkumné zprávě Earthquake Engineering Research Center Kalifornské university číslo 08 z roku 1991 je uvedeno další zobecnění, které kromě korelace jednotlivých vlastních tvarů zohledňuje i vliv lokálních geologických podmínek.

## 5.4 Odezva na harmonické buzení

Předmětem této části je řešení základní pohybové rovnice dynamiky pružných těles diskretizovaných MKP při harmonickém buzení. Harmonické buzení je nejčastějším případem, který se vyskytuje v praktických úlohách dynamiky konstrukcí. Jde především o řešení konstrukcí zatížených účinky strojů s rotujícími částmi. K řešení je možné použít dva přístupy

- Přímé řešení v komplexních číslech anebo vyjádřením posunu pomocí amplitudy a fáze
- Řešení rozvojem do vlastních tvarů kmitání.



Oba přístupy mají své výhody a nevýhody.

První postup je obecnější s ohledem na charakter útlumu. Umožňuje provést řešení i v případě neproporcionálního útlumu. Lze říci, že na tvaru matice útlumu nezáleží. Poněvadž ale při řešení odezvy není možné s ohledem na nejistotu ve vstupních údajích provést analýzu pouze pro jednu frekvenci budícího zatížení, nýbrž je třeba pro určité pásmo frekvencí stanovit rezonanční křivku, je výpočet značně náročný na spotřebu strojového času. Každý bod rezonanční křivky představuje ve skutečnosti jeden samostatný výpočet.

Efektivnost metody rozvoje do vlastních tvarů kmitání je velmi závislá na tvaru matice útlumu. Pokud lze útlum popsat jakožto útlum proporcionální, je užití metody vysoce efektivní. Horší je to v případě útlumu neproporcionálního.

Dříve než budou popsány jednotlivé metody řešení, je třeba charakterizovat zatížení. Aby odezva konstrukce byla harmonická, musí být všechna působící zatížení rovněž harmonická a musí mít stejnou frekvenci. Tato frekvence se označuje jako *budící frekvence*. To lze respektovat tak, že zatížení rozložíme do dvou zatížení, která jsou fázově posunutá o  $90^\circ$ . Nejjednodušší forma rozkladu má tvar

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1 \cos \omega t + \mathbf{R}_2 \sin \omega t. \quad (5.165)$$

V případě ustáleného harmonického kmitání se obvykle při popisu zatížení hovoří o amplitudě a fázovém posuvu. Potom lze  $n$ -tou složkou vektoru  $\mathbf{R}(t)$  vyjádřit pomocí amplitudy  $a_n$  a fázového posuvu  $\varphi_n$  následujícím způsobem (viz. obr. 5.6)

$$R_n(t) = a_n \sin(\omega t + \varphi_n). \quad (5.166)$$

Vztah mezi  $a_n, \varphi_n$  a složkami vektorů  $\mathbf{R}_1$  a  $\mathbf{R}_2$  je dán vztahem

$$a_n = \sqrt{R_{1n}^2 + R_{2n}^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{R_{1n}}{R_{2n}}. \quad (5.167)$$

S ohledem na skutečnost, že se hledá řešení ustáleného stavu, kdy již vlivem útlumu odeznělo vlastní kmitání, lze časový průběh posunů  $\mathbf{r}$  vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 \cos \omega t + \mathbf{r}_2 \sin \omega t. \quad (5.168)$$

Vektory  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  jsou na čase nezávislé. Dosazením (5.165) a (5.168) do základní pohybové rovnice (5.2) se obdrží dvě simultánní maticové rov-

nice pro neznámé vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{r}_1 + \omega \mathbf{C} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_1, \\ -\omega \mathbf{C} \mathbf{r}_1 + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_2. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Při ustáleném harmonickém kmitání se vyšetřují především rezonanční jevy. Z toho důvodu je vždy třeba zavádět do výpočtu útlum. Důsledkem je, že odezva konstrukce charakterizovaná vektorem uzlových posunů  $\mathbf{r}$  má vždy obě fáze, a to i tehdy, když všechna působící zatížení jsou ve fázi (nejsou vzájemně fázově posunuta). V takovém případě je pouze  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$ .

### 5.4.1 Přímé řešení v komplexních číslech

Výše uvedená skutečnost, že je třeba počítat obě složky odezvy  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ , vybočuje z algoritmů běžných v MKP. Na druhé straně je ale programovací jazyk FORTRAN, který je nejčastěji používán k programování vědecko-technických úloh, standardně vybaven operacemi s komplexními proměnnými, což umožňuje snadné programování v oboru komplexních čísel. Této skutečnosti bude proto dále využito.

Vektor zatížení  $\mathbf{R}$  i vektor zobecněných posunů  $\mathbf{r}$  lze vyjádřit jakožto reálné části komplexních vektorů. Platí

$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{Re} [\widehat{\mathbf{R}} e^{i\omega t}], \quad \mathbf{r}(t) = \operatorname{Re} [\widehat{\mathbf{r}} e^{i\omega t}], \quad (5.170)$$

kde

$$\widehat{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}_1 - i\mathbf{R}_2, \quad \widehat{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}_1 - i\mathbf{r}_2. \quad (5.171)$$

O správnosti prvního vztahu z (5.170) se lze snadno přesvědčit dosazením z (5.171). Platí

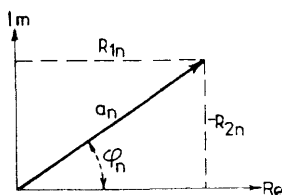
$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{Re} [(\mathbf{R}_1 - i\mathbf{R}_2)(\cos \omega t + i \sin \omega t)]. \quad (5.172)$$

Po úpravě se získá

$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{Re} [(\mathbf{R}_1 \cos \omega t + \mathbf{R}_2 \sin \omega t) + i(\mathbf{R}_1 \sin \omega t - \mathbf{R}_2 \cos \omega t)], \quad (5.173)$$

což je totožné s (5.165). Obdobným způsobem lze prokázat i správnost druhého vztahu z (5.170).

Zobrazí-li se vektor  $\widehat{\mathbf{R}}$  v komplexní rovině, je okamžitě zřejmý vztah mezi amplitudou  $a_n$ , fázovým posuvem  $\varphi_n$  a složkami  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$ . Je patrné, že se jedná pouze o dva různé způsoby popisu komplexního čísla (viz obr. 5.6).



Obr. 5.6: Souvislost amplitudy, fáze a komplexních složek vektorů

Aby základní pohybová rovnice (5.2) byla v každém okamžiku splněna pro  $\mathbf{R}(t)$  a  $\mathbf{r}(t)$ , postačuje, aby pro  $\hat{\mathbf{R}}$  a  $\hat{\mathbf{r}}$  platilo

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}}. \quad (5.174)$$

Rovnice (5.174) je formálně shodná s podmínkou rovnováhy při statickém řešení. Matice  $\mathbf{K}$  je však nahrazena komplexní maticí  $\hat{\mathbf{K}}$

$$\hat{\mathbf{K}} = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}), \quad (5.175)$$

která je nazývána maticí *dynamické tuhosti*. Algoritmus řešení je též jako při statické úloze, pouze všechny aritmetické operace musí být nahrazeny operacemi s komplexními čísly<sup>13</sup>.

#### 5.4.2 Metoda rozvoje do vlastních tvarů kmitání

V dalším se bude předpokládat, že jsou známy hodnoty vlastních frekvencí a tvary vlastního kmitání (netlumeného). Vlastní tvary jsou uspořádány do matice  $\mathbf{Y}$  tak, že jednotlivé vlastní tvary tvoří sloupce matice  $\mathbf{Y}$ . O tvarech se navíc předpokládá, že jsou normovány vzhledem k matici hmotnosti, což lze zapsat takto (srov. (5.20)) :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I}. \quad (5.176)$$

Přibližné řešení se hledá ve formě lineární kombinace  $p$  nejnižších vlastních tvarů

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Y} \mathbf{q}, \quad (5.177)$$

<sup>13</sup>Znovu je vhodné připomenout, že matice dynamické tuhosti  $\hat{\mathbf{K}}$  je funkcí budící frekvence  $\omega$ . Pro každou budící frekvenci je tudíž nutné celý výpočet opakovat.

kde  $\mathbf{q}$  je vektor neznámých komplexních součinitelů. Dosazením (5.177) do (5.174) se obdrží

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{Y} \mathbf{q} = \widehat{\mathbf{R}}. \quad (5.178)$$

Po vynásobení rovnice (5.178) zleva  $\mathbf{Y}^T$  se s využitím podmínek ortogonality dostane následující soustava lineárních algebraických rovnic s komplexními koeficienty

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} + \mathbf{\Omega}^2) \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \widehat{\mathbf{R}}, \quad (5.179)$$

kde  $\mathbf{\Omega}^2$  je diagonální matice, jejíž prvky jsou kvadráty vlastních kruhových frekvencí.

### Proporcionální útlum

Pro obecnou matici útlumu  $\mathbf{C}$  jde o soustavu rovnic simultánních a řešení je věnován další odstavec. V řadě prakticky důležitých aplikací je možné se omezit na útlum proporcionální, kdy

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} = 2\mathbf{\Omega}_b, \quad (5.180)$$

kde  $\mathbf{\Omega}_b$  je diagonální matice s prvky (srov. (5.114))

$$\omega_{bk} = \xi_k \omega_k, \quad (5.181)$$

$\omega_k$  jsou vlastní kruhové frekvence a  $\xi_k$  jsou koeficienty poměrného útlumu.

Za tohoto předpokladu se soustava (5.179) rozpadá na nezávislé rovnice

$$(-\omega^2 + 2i\omega\omega_k\xi_k + \omega_k^2)q_k = \mathbf{y}_k^T \widehat{\mathbf{R}} \quad (5.182)$$

s řešením

$$q_k = \mathbf{y}_k^T \widehat{\mathbf{R}} \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\omega_k\xi_k + \omega_k^2}. \quad (5.183)$$

S použitím (5.177) a (5.183) lze vztah mezi vektorem výstupních veličin (posuny, vnitřní síly, napětí apod.) a vektorem zatížení zapsat formálně pomocí matice  $\mathbf{G}$  ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{G} \mathbf{Y} \mathbf{Q} \mathbf{Y}^T \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{U} \widehat{\mathbf{R}}, \quad (5.184)$$

kde  $\mathbf{Q}$  je diagonální matice s komplexními prvky

$$Q_{ii} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega\omega_k\xi_k + \omega_k^2}. \quad (5.185)$$

Pro více pravých stran může rovnice (5.184) zůstat v platnosti, pouze vektory  $\hat{R}$  a  $v$  se nahradí maticemi  $R$  a  $V$ .

Pro různé frekvence  $\omega$  se v rovnici (5.184) mění během výpočtu pouze prvky matice  $Q$ , které se snadno pro různá  $\omega$  přepočítají podle (5.185). Pro reálnou a imaginární část prvků matice  $Q$  platí

$$\operatorname{Re}[Q_{jj}] = \frac{\omega_j^2 - \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_j^2\xi_j^2}, \quad (5.186)$$

$$\operatorname{Im}[Q_{jj}] = \frac{-2\omega\omega_j\xi_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_j^2\xi_j^2}. \quad (5.187)$$

Rovnici (5.184) pak lze přepsat bez použití komplexních čísel jako dvě rovnice pro dvě fáze výstupních veličin

$$\operatorname{Re}[v] = GY (\operatorname{Re}[Q]Y^T R_1 + \operatorname{Im}[Q]Y^T R_2), \quad (5.188)$$

$$\operatorname{Im}[v] = GY (-\operatorname{Re}[Q]Y^T R_2 + \operatorname{Im}[Q]Y^T R_1). \quad (5.189)$$

Vektory (případně matice při více pravých stranách)  $Y^T R_1$  a  $Y^T R_2$  mohou být vypočteny předem nezávisle na zadaných frekvencích zatížení a uschovány ve vnější nebo vnitřní paměti počítače.

Algoritmus řešení vynuceného kmitání rozkladem do vlastních tvarů kmitání je pro případ proporcionálního útlumu tudíž velice jednoduchý. Lze jej doplnit do každého programu, který umožňuje výpočet vlastních tvarů normovaných vzhledem k matici hmotnosti<sup>14</sup>. Postup jsme použili např. při rozšíření programu INTAK (INTeraktivní Alýza Konstrukcí).

### Neproporcionální útlum

Řešení problému interakce konstrukce s podložím je typickým příkladem neproporcionálního tlumení, neboť často konstrukce vrchní stavby má útlum výrazně odlišný od útlumu podloží. Je to jednak v důsledku různých materiálových vlastností, projevuje se zde však i disipace energie v důsledku šíření do neohrazeného poloprostoru. Proto není vždy možné akceptovat model tlumení, odpovídající vztahu (5.180). Je-li tomu tak, nabízejí se v souvislosti s užitím metody rozvoje do vlastních tvarů kmitání dvě alternativy řešení :

<sup>14</sup> Algoritmus je použitelný i v případě analytického řešení Kolouškovou deformační metodou. Vlastní tvary pak jsou normovány k hmotnosti  $\mu$  (hmotnost na jednotku délky prutu), což značí, že  $\int \mu w_i w_j ds = \delta_{ij}$ .

- Považovat metodu rozkladu do vlastních tvarů kmitání pouze za prostředek ke snížení počtu stupňů volnosti a řešit rovnici (5.179) podle odst. 5.4.1
- Převést rovnice (5.179) opět na soustavu nezávislých rovnic.

První alternativa nevyžaduje podrobnější výklad. Druhá alternativa vyžaduje výpočet *vlastních tvarů tlumeného kmitání*. To pro rozsáhlé systémy je poměrně náročná úloha a většina programových systémů tuto možnost nemá. Kromě aplikace Lanczosovy metody (viz odst. 5.2.11) se nabízí jednoduchá možnost přibližného řešení na základě redukce stupňů volnosti pomocí vlastních tvarů netlumeného kmitání  $\mathbf{Y}$ . V důsledku neproporcionálního útlumu je třeba řešit soustavu homogenních algebraických rovnic

$$\underline{I}\ddot{\mathbf{q}}_t + \underline{\hat{C}}\dot{\mathbf{q}}_t + \underline{\Omega}^2\mathbf{q}_t = \mathbf{0}, \quad (5.190)$$

kde

$$\underline{\hat{C}} = \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}.$$

Pro soustavy s neproporcionálním útlumem jsou prvky vektoru  $\mathbf{q}_t$  charakterizovány nejen amplitudou, ale i fází. Jestliže se k redukci základního systému použije  $p$  netlumených vlastních tvarů, potom k popisu přibližného řešení, daného rovnicí (5.190), je třeba  $2p$  rovnic s reálnými koeficienty. Každý vlastní tvar je tedy charakterizován vektorem amplitud a vektorem fází. Vyjadřuje to známou skutečnost, že soustava s neproporcionálním útlumem nemá stacionární uzly kmitání. Metoda řešení pro takové soustavy byla navržena v [36]. Zakládá se na jednoduché myšlence, že k původním  $p$  rovnicím se přidá dalších  $p$  rovnic, které představují identitu

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \dot{\mathbf{q}}_t. \quad (5.191)$$

Rovnice (5.190) a (5.191) lze zapsat následujícím způsobem v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\hat{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\Omega}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \mathbf{q}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (5.192)$$

Inverzní matice k první čtvercové matici v (5.192) má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \underline{\hat{C}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\underline{\hat{C}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.193)$$

Na základě (5.193) může být (5.192) po úpravách převedena na tvar

$$\begin{bmatrix} \widehat{C} & \Omega^2 \\ I & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \mathbf{q}_t \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \mathbf{q}_t \end{Bmatrix}. \quad (5.194)$$

Čtvercová matice v rovnici (5.194) má reálné koeficienty, avšak je *nesymetrická*. Pokud je tlumení soustavy podkritické (což je v případě stavebních konstrukcí vždy), vede řešení soustavy (5.194) na  $2p$  vlastních vektorů a vlastních čísel  $\lambda$ . Vlastní čísla jsou komplexně sdružená a mají zápornou reálnou část. Imaginární část vlastních čísel reprezentuje vlastní kruhové frekvence tlumeného kmitání. Pro numerickou realizaci řešení problému vlastních čísel (5.194) je možné využít standardních algoritmů z knihoven podprogramů pro vědecko-technické výpočty. Autoři použili podprogramu z knihovny SSP (Subroutine Scientific Package), který dodává firma IBM. Matice soustavy (5.194) je plná, její velikost je však taková, že řešení je celé možné provést ve vnitřní paměti počítače.

Vypočtené vlastní tvary tlumeného kmitání z úlohy (5.194) je možné použít k převodu soustavy (5.179) na kanonický tvar i v případě neproporcionálního útlumu. Vzhledem k tomu, že tento postup platí pro v čase obecně proměnné zatížení, je pro další výhodné vyjít z pohybových rovnic zapsaných ve formě systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Platí

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{f}, \quad (5.195)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} O & I \\ I & \widehat{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -I & O \\ O & \Omega^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} O \\ \mathbf{Y}^T \mathbf{R} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_t \\ \mathbf{q}_t \end{Bmatrix}.$$

Podobně jako v předcházejícím odstavci, vektory  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{z}$  mohou být přepsány ve tvaru

$$\mathbf{f}(t) = \text{Re} [\widehat{\mathbf{f}} e^{i\omega t}], \quad \mathbf{z}(t) = \text{Re} [\widehat{\mathbf{z}} e^{i\omega t}]. \quad (5.196)$$

Po dosazení (5.196) do (5.195) má pohybová rovnice tvar

$$(i\omega \mathbf{A} + \mathbf{B}) \widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{f}}. \quad (5.197)$$

Nyní se ještě jednou zopakuje transformace do vlastních tvarů. Transformaci lze zapsat následujícím způsobem

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{\Delta} \mathbf{c}, \quad (5.198)$$

kde  $\mathbf{\Delta}$  je matice koeficientů vlastních tvarů *tlumeného kmitání* a  $\mathbf{c}$  je vektor koeficientů lineární kombinace těchto tvarů. Dosazení (5.198) do (5.197) a přenásobení zleva  $\mathbf{\Delta}^T$  dává

$$(i\omega \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{c} = \mathbf{\Delta}^T \hat{\mathbf{f}}, \quad (5.199)$$

kde

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Delta}^T \mathbf{A} \mathbf{\Delta}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{\Delta}^T \mathbf{B} \mathbf{\Delta}.$$

Poněvadž vlastní tvary tlumené soustavy jsou ortogonální, plyne z toho, že matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou diagonální. Proto (5.199) je soustava nezávislých lineárních algebraických rovnic s komplexními koeficienty. Pro prvky vektoru  $\mathbf{c}$  platí následující vztah

$$c_j = \frac{(\mathbf{\Delta}^T \hat{\mathbf{f}})_j}{(i\omega - \lambda_j) \mathcal{A}_{jj}}. \quad (5.200)$$

Konečně po úpravách lze získat vztah pro výpočet  $\mathbf{r}$ . Platí:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} \operatorname{Re} [\mathbf{\Delta} \mathbf{c} e^{i\omega t}]. \quad (5.201)$$

Pokud se během řešení vypočtou vlastní tvary tlumeného kmitání nejen pro zobecnělé posuny, ale i pro napětí nebo vnitřní síly, potom výraz  $\operatorname{Re} [\mathbf{\Delta} \mathbf{c} e^{i\omega t}]$  lze použít pro výpočet odpovídajících mechanických veličin.



# Literatura

- [1] Allman, D. J.: A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity problems, *Computers & Structures*, 19, 1-8, 1984.
- [2] Allman, D. J.: A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 717-739, 1988.
- [3] Bäcklund, J.: *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*. (doktorská disertační práce). Goteborg 1973.
- [4] Bathe, K. J., Dvorkin, E. N.: A Formulation of General Shell Elements-the Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 22, 697-722, 1986.
- [5] Bathe, K. J., Dvorkin, E. N.: A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 21, 367-3383, 1986.
- [6] Bathe, K. J., Wilson, E. L.: Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 1972.
- [7] Bathe, K. J., Wilson, E. L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1976.
- [8] Batoz, J. L., Bathe, K. J., Ho, L. W.: A Study of Three - Node Triangular Plate Bending Elements, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, 15, 1771-1812, 1986. 1980.
- [9] Bažant, Z. P. edit: *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*. John Wiley & Sons Ltd., 1988.

- [10] Bažant, Z., P., Cedolin, L.: *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New York, Oxford 1991.
- [11] Bažant, Z. P., Lin, F. B.: *Nonlocal Smeared Cracking Model for Concrete Fracture*, *J. Struct. Engng. (ASCE)*, 114 (11), (Sec. 3.10), 1988.
- [12] Bažant, Z. P., Wu, S. T.: *Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete*, *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, 99 (EM2), 1973.
- [13] Bellini, P. X., Chulya, A.: *An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations*, *Computers & Structures*, 26, 99-110, 1987.
- [14] Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B. E.: *A Finite Element with Embedded Localization Zones*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 70, North-Holland, 1988.
- [15] Belytschko, T., Lasry, D.: *Nonmonotonic Stress-Strain Laws: Bizarre Behavior and its Repercussions on Numerical Solutions*. *Transactions of the Sixth Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, ARD Report 89-1.
- [16] Belytschko, T., Lasry, D.: *A fractal patch test*, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 2199-2210, 1988.
- [17] Bergan, P. G., Felippa, C. A.: *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*, *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, 50, 25-69, 1985.
- [18] Bittnar, Z.: *Metody numerické analýzy konstrukcí*. ES ČVUT, Praha 1983.
- [19] Bittnar, Z., Řeřicha, P.: *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*. SNTL, Praha 1981.
- [20] Bittnarová, J.: *Napjatost stěnových systémů a jejich interakce s podložím*. Výzkumná zpráva, FSv ČVUT, Praha 1979.
- [21] Bittnarová, J., Šejnoha, J.: *Pružnost, pevnost, plasticita II - příklady*. ES ČVUT, Praha 1989.
- [22] Blažek, V., Muk, J., Šejnoha, J.: *Metoda konečných prvků*. ES ČVUT, Praha 1973.

- [23] Červenka, V., Eligehausen, R., Pukl, R.: SBETA, Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. Mitteilungen IWB, Stuttgart 1990/1.
- [24] Darwin, D., Pecknold, D. A. W.: Analysis of Cyclic Loading of Plane RIC Structures, Computers & Structures, 7, 137-147, 1977.
- [25] Děmidovič, B. P., Maron, J. A.: Základy numerické matematiky. SNTL, Praha 1966.
- [26] Dhatt, G.: Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis. Proc. ASCE, Symp. on Applications of FEM in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 13 - 14, 1969.
- [27] Eringen, A. C.: Nonlinear Theory of Continuous Media. McGraw-Hill, New York 1962.
- [28] Fadějev, D. K., Fadějevová, V. N.: Numerické metody lineární algebry. SNTL, Praha 1964.
- [29] Hanuška, A.: O teorii Westergaardovho vystuženého podložia, Stavebnícky časopis, 39, 2, 1989.
- [30] Hinton, E., Rock, T., Zienkiewicz, O. C.: A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method, Int. J. Earthq. Engng. Struct. Dyn., 4, 245-249, 1976.
- [31] Herrmann, L. R.: Finite Element Bending Analysis for Plates, J. Engng. Mech. Div. ASCE, EM5, 1967.
- [32] Huang, H. C.: Elastic and elasto-plastic analysis of shell structures using the assumed strain elements, Computers & Structures, 33, 327-335, 1989.
- [33] Hughes, T. J. R.: The Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1987.
- [34] Hughes, T. J. R., Brezzi, F.: On drilling degrees of freedom, Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 72, 105-121, 1989.
- [35] Hughes, T. J. R., Tezduyar, T. E.: Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element, J. Appl. Mech. ASME, 46, 587-596, 1981.

- [36] Hurty, W., Rubinstein, M. F.: Dynamics of Structures. Prentice - Hall, Engelwood Cliffs, NJ. 1964.
- [37] Chen, H. C., Taylor, R. Z.: Solution of viscously damped linear systems using a set of load-dependent vectors, Earthquake Engng. Struct. Dyn., 19, 653-665, 1990.
- [38] Chen, W. F.: Plasticity in Reinforced Concrete. McGraw-Hill, New York 1982.
- [39] Ibrahimbegovic, A., Chen, H. C., Taylor, L. R., Wilson, E. L.: Ritz method for dynamic analysis of large discrete linear systems with non-proportional damping, Earthquake Engng. Struct. Dyn., 19, 877-889, 1990.
- [40] Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L., Wilson, E. L.: A robust membrane quadrilateral element with drilling degrees of freedom, Int. J. Num. Meth. Engng., 30, 445-457, 1990.
- [41] Ibrahimbegovic, A., Wilson, E. L.: A methodology for dynamic analysis of linear structure-foundation systems with local non-linearities, Earthquake Engng. Struct. Dyn., 19, 1197-1208, 1990.
- [42] Ibrahimbegovic, A., Wilson, E. L.: Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields, Int. J. Num. Meth. Engng., 31, 1393-1414, 1991.
- [43] Irons, B. M., Razzaque, A.: Experience with the patch test for convergence of finite element methods, In: Mathematical Foundations of the Finite Element Method (ed. A. K. Aziz), Academic Press, New York, 1982.
- [44] Irons, B. M.: Quadrature rules for brick based finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng., 3, 293-294, 1971.
- [45] Jennings, A.: Matrix Computations for Engineers and Scientists. John Wiley, London 1977.
- [46] Kafka, V.: Inelastic Mezomechanics. World Scientific Publishing Co Pte. Ltd., Volume 5, Singapore 1987.
- [47] Kohout, M., Bílek, Z., Hřebíček, J., Polcar, P.: Application of damage mechanics to numerical fracture simulation. Acta Technica, 34, 5, 1989.

- [48] Koiter, W. T.: On the stability of elastic equilibrium (engl. transl.). AFFDL 1970.
- [49] Kolář, V., Leitner, F., Zlámal, M., Ženíšek, A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha 1972.
- [50] Krohn, R.: Berechnung statisch unbestimmter Fachwerktraeger, Zeitschrift Arch. und Ing. Ver., Hannover 1984.
- [51] Kuklík, P.: Příspěvek k řešení vrstevnatého podloží, Pozemní stavby, 7, 1984.
- [52] MacNeal, R. H., Harder, R. L.: A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom, Computers & Structures, 18, 75-84, 1988.
- [53] Marquis, D.: Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des métaux. Thèse Université Paris, 1979.
- [54] Melosh, R. J.: Structural Engineering Analysis by Finite Elements. Prentice-Hall, London 1990.
- [55] Newmark, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, J. Engng. Mech. Div. ASCE, 85, 67 - 94, 1959.
- [56] Nour-Omid, B., Clough, R. W.: Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates, Earthquake Engng. Struct. Dyn., 12, 566-577, 1984.
- [57] Ondráček, E., Valentík, V.: Dynamical States in Complicated Bodies, Colloquium on Solid States Properties at High Loading Rates, Brno 1978.
- [58] Oñate, E., Suarez, B.: A unified approach for the analysis of bridges, plates and axisymmetric shells using the linear Mindlin strip elements, Computers & Structures, 17, 407-426, 1983. bibitemPARK Park, K. C.: A family of solution algoritms for nonlinear structural analysis based on the relaxation equations, Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1337-1347, 1982.
- [59] Parlett, B. N.: The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1980.

- [60] Pian, T. H. H.: Finite Element Methods by Variational Principles with Relaxed Continuity Requirements. In: Variational Methods in Engineering, Vol.1, 3/1-3/24, Southampton University Press 1973.
- [61] Reissner, E.: A note on variational principles in elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 1, 93-95, 1965.
- [62] Rice, J. R.: The Localization of Plastic Deformation in Theoretical and Applied Mechanics. In: 14 th Congr. Theoret. Appl. Mech.(ed. W. T. Koiter), North-Holland, Amsterdam 1977.
- [63] Řeřicha, P.: Skořepinový prvek pro nestacionární dynamické zatížení. Zpráva SÚ ČVUT 521/82, Praha 1982.
- [64] Řeřicha, P.: Účinky odstřelů na stavební konstrukce. Metodika, teorie a program pro výpočet. Zpráva SÚ ČVUT 314/75, Praha 1975.
- [65] Simon, H. D.: The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization, *Math. Comput.* 42, 115-142, 1984.
- [66] Stolarski, H., Belytschko, T., Carpenter, N., Kennedy, J. M.: A Simple Triangular Curved Shell Element, *Eng. Comput.*, Vol. 1, September 1985.
- [67] Šejnoha, J.: Kmitání krabicových konstrukcí, *Stavebnický časopis*, 6, 1970.
- [68] Šejnoha, J., Bittnarová J.: Pružnost, pevnost, plasticita I. ES ČVUT, Praha 1984.
- [69] Šejnoha, J., Bittnarová J.: Pružnost, pevnost, plasticita II. ES ČVUT, Praha 1989.
- [70] Šejnoha, J., Kufner, V.: Pružnost, pevnost, plasticita III. ES ČVUT, Praha 1990.
- [71] Taylor, R., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C., Chan, A.: The patch test - a condition for assessing FEM convergence, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 22, 39-62, 1986.
- [72] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H.C., Topp, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aeronaut. Sci.*, 23, 1956.

- 
- [73] Zemánková, J.: Technická mechanika I (úvod do lomové mechaniky).  
ES ČVUT, Praha 1986.
- [74] Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science.  
McGraw-Hill, London 1971.

## Dodatek A

# Maticová formulace Gaussovy eliminace

V řadě učebních textů pojednávajících o metodách řešení soustav lineárních algebraických rovnic lze nalézt výklad Gaussovy eliminace. Zde pouze konstatujeme, že základem Gaussovy eliminace je převod příslušné matice (matice tuhosti nebo její modifikace) na horní trojúhelníkový tvar. Po tomto kroku je již řešení přidružené soustavy rovnic jednoduché. Jednotlivé neznámé mohou být vypočteny zpětným dosazením.

Převod matice tuhosti  $K$  na horní trojúhelníkový tvar lze zapsat jako posloupnost transformací

$$L_{n-1}^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1} K = S, \quad (\text{A.1})$$

kde  $S$  je horní trojúhelníková matice a

$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & & \\ & & -l_{i+2,i} & & 1 & \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & -l_{n,i} & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad l_{i+j,j} = \frac{k_{i+j,i}^{(i)}}{k_{ii}^{(i)}}. \quad (\text{A.2})$$

Prvky  $l_{i+j,i}$  jsou Gaussovy násobitele, které jsou potřebné pro nulování



sloupců pod hlavní diagonálou a index ( $i$ ) označuje, že jde o prvky matice  $L_{n-1}^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1} K$ .

Matici inverzní k  $L_i^{-1}$  obdržíme pouhou změnou znaménka poddiagonálních prvků. Na základě toho lze psát

$$K = L_1 L_2 \cdots L_1^{n-1} S = LS. \quad (\text{A.3})$$

Poněvadž  $S$  je horní trojúhelníková matice, můžeme ji snadno rozložit v součin dvou matic

$$S = D \tilde{S}, \quad (\text{A.4})$$

kde  $D$  je diagonální matice s prvky rovnými diagonálním prvkům matice  $S$ ,  $\tilde{S}$  je horní trojúhelníková matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky. Po dosazení z (A.4) do (A.3) obdržíme

$$K = LD\tilde{S}. \quad (\text{A.5})$$

Transpozice dává

$$K^T = \tilde{S}^T D L^T. \quad (\text{A.6})$$

Vzhledem k tomu, že matice tuhosti je symetrická, musí platit, že  $K^T = K$ . Dále je podle definice  $D^T = D$ . Z toho vyplývá, že

$$LD\tilde{S} = \tilde{S}^T D L^T. \quad (\text{A.7})$$

Aby rozklad matice tuhosti byl jednoznačný, musí být  $\tilde{S} = L^T$ . Odtud pro rozklad matice tuhosti najdeme

$$K = LDL^T. \quad (\text{A.8})$$

Tento rozklad může být využit k efektivnímu řešení soustavy lineárních rovnic. Řešení se provede ve dvou krocích. Zvolíme nejprve pomocný vektor  $\mathbf{v}$ , pro který

$$L\mathbf{v} = \mathbf{R}. \quad (\text{A.9})$$

Po dosazení (A.8) a (A.9) do rovnice  $K\mathbf{r} = \mathbf{R}$  máme

$$LDL^T\mathbf{r} = L\mathbf{v}. \quad (\text{A.10})$$

Vynásobme (A.10) zleva nejprve  $L^{-1}$  a potom  $D^{-1}$ . Obdržíme

$$L^T\mathbf{r} = D^{-1}\mathbf{v}. \quad (\text{A.11})$$

Tuto soustavu lineárních algebraických rovnic již snadno vyřešíme, neboť matice  $\mathbf{L}^T$  je horní trojúhelníková matice, která má dokonce na diagonále samé jedničky. Poslední prvek vektoru  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}$  je tudíž přímo roven neznámé  $r_n$ . Postupným dosazení od spodu vypočteme ostatní prvky vektoru  $\mathbf{r}$ . Vyjádříme-li z (A.9)

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \cdots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{R}, \quad (\text{A.12})$$

vidíme, že  $\mathbf{v}$  získáme pouhou modifikací vektoru transformovaného zatížení, a to pomocí stejných Gaussových koeficientů, které používáme k rozkladu matice tuhosti.

Jednoduchý a přehledný algoritmus, který navíc využívá pásovosti matice tuhosti lze nalézt v [7] nebo v [18].

## Dodatek B

# Numerická integrace

Výpočet matice tuhosti prvku se provádí nejčastěji numerickou integrací. V MKP je integrandem matice a výsledek rovněž matice. Integrace matice však znamená separátně integrovat každý prvek této matice. Proto se dále budeme zabývat výhradně integrací skalární funkce. Vzhledem k tomu, že v této publikaci se hovoří o numerické integraci zejména v souvislosti s izoparametrickými prvky, bude každá proměnná probíhat interval  $\langle -1, 1 \rangle$ . Pro jednoduchost, ale bez újmy na obecnosti se budeme zabývat integrálem  $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ . Výsledků odvozených pro jednoduchý integrál lze použít i k výpočtu integrálů  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ , a  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$ .

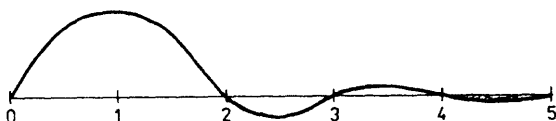
Numerická integrace je zpravidla založena na aproximaci integrované funkce na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  polynomem, který budeme označovat  $\varphi(\xi)$ . Aproximaci vytvoříme tak, že zvolíme určitý počet bodů  $\xi_i$ , kterými polynomické funkce musí procházet. V těchto bodech bude tudíž platit  $f(\xi_i) = \varphi(\xi_i)$ . Přibližnou hodnotu integrálu  $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$  pak vypočteme jako  $\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi$ . Bude-li funkce  $f(\xi)$  dostatečně hladká, lze očekávat, že čím více bodů na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  zvolíme, tím více se  $\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi$  přiblíží k  $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ .

K aproximaci s výhodou používáme Lagrangeových mnohočlenů. Řekněme, že na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  zvolíme  $(n + 1)$  bodů. Z toho vyplývá, že interpolační polynomy musí být  $n$ -tého stupně. Lagrangeovy mnohočleny

mají pro libovolný stupeň tvar

$$h_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_j - \xi_0)(\xi_j - \xi_1) \dots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \dots (\xi_j - \xi_n)}.$$

Průběh funkce  $h_1$  je patrný z obr. B.1. Snadno se lze přesvědčit, že pro



Obr. B.1: Funkce  $h_1$

interpoláčnı́ funkce platı́:

$$h_j(\xi_i) = \delta_{ij}, \quad (\text{B.1})$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol. Hodnotu aproximačnı́ funkce  $\varphi(\xi)$  v libovolném bodě intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  lze vypočítat následujícím způsobem

$$\varphi(\xi) = f_0 h_0(\xi) + f_1 h_1(\xi) + \dots + f_n h_n(\xi). \quad (\text{B.2})$$

Čı́slování je zde od 0, poněvadž polynom  $n$ -tého stupně má i člen nultého stupně.

Pro použitı́ k přibližné integraci existují dva možnė postupy. Prvnı́, jednoduššı́, spočívá v tom, že interval  $\langle -1, 1 \rangle$  rozdělíme na  $n$  stejných dílů. Tım získáme body

$$\begin{aligned} \xi_0 = -1, \quad \xi_1 = -1 + \frac{2}{n}, \quad \xi_2 = -1 + \frac{4}{n}, \quad \dots, \\ \dots, \xi_{n-1} = -1 + \frac{2(n-1)}{n}, \quad \xi_n = 1. \end{aligned}$$

Konkrétně pro  $n = 2$  jsou to body  $\xi_0 = -1$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$ . Pomocı́ aproximačnı́ funkce  $\varphi(\xi)$  můžeme tedy vyjádřit přibližnou hodnotu integrálu  $\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$ . Platı́

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n f_i \int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi + R_n. \quad (\text{B.3})$$

Po integraci na pravé straně máme

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2 \sum_{i=0}^n C_i^n f_i + R_n. \quad (\text{B.4})$$

$R_n$  zde označuje zbytek a  $f_i$  jsou funkční hodnoty v bodech  $\xi = \xi_i$ . Ve vzorcích jsou  $C_i^n$  Newtonovy-Cotesovy konstanty pro numerickou integraci s  $(n + 1)$  body. Newton-Cotesovy konstanty jsou převzaty z [7] a uvedeny pro  $n = 1$  až 6 v tabulce B.1

Počet dílků $n$	$C_0^n$	$C_1^n$	$C_2^n$	$C_3^n$	$C_4^n$	$C_5^n$	$C_6^n$	Horní odhad chyby
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}2^3 f^{II}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}2^5 f^{IV}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}2^5 f^{IV}$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}2^7 f^{VI}$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$10^{-6}2^7 f^{VI}$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-6}2^7 f^{VIII}$

Tabulka B.1: Newtonovy-Cotesovy konstanty

Konstanty, uvedených v tabulce, lze použít i k integraci na obecném intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom má integrační formule tvar <sup>1</sup>

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = (b - a) \sum_{i=1}^n C_i^n f_i.$$

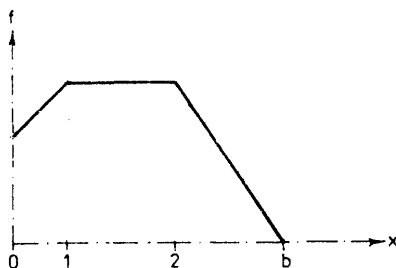
Pro  $n = 1$  dává tato formule známé lichoběžníkové pravidlo a pro  $n = 2$  Simpsonovo pravidlo.

Z tabulky je patrné, že horní mez odhadu je stejná pro  $n = 2$  a pro  $n = 3$ . Obdobně je tomu pro  $n = 4$  a pro  $n = 5$ . Z toho vyplývá, že používání formulí, které dělí interval na lichý počet dílů, není vhodné.

Zpřesňování výpočtu, jak již bylo řečeno, se děje zjemňováním dělení intervalu integrace. Zjermníme-li dělení, máme dvě možnosti. Buď použít

<sup>1</sup>Pozn.:  $f^{II}$ ,  $f^{IV}$ ,  $f^{VI}$ ,  $f^{VIII}$  jsou po řadě druhá, čtvrtá, šestá a osmá derivace funkce  $f$  podle  $\xi$ .

přesnější interpolační formuli, nebo jednodušší formuli zopakovat. V inženýrské praxi se téměř výhradně uchylujeme k opakování jednodušší formule. Proč? Odpověď je prostá. Zpravidla jde o jednodušší a univerzálnější přístup. Univerzálnější v tom smyslu, že integrovaná funkce nemusí být hladká. Takový případ je častý. Příklad takové funkce je na obr. B.2.



Obr. B.2: Funkce s nespojitou první derivací

Zvolíme-li dělicí body dílů 1, 2, obdržíme třikrát opakovaným lichoběžníkovým pravidlem zcela přesný výsledek. Použijeme-li sebepřesnější Newtonovu-Cotesovu formuli, obdržíme sice velmi dobré přiblížení, ale nikdy přesné řešení, neboť funkci nespojitou v první derivaci se snažíme aproximovat funkcí  $\varphi(\xi)$  spojitou, včetně všech jejích derivací. Pokud je ovšem integrovaná funkce dostatečně hladká, obdržíme naopak při stejném počtu bodů aplikací přesnější formule lepší výsledky, než opakováním jednodušší formule.

Dosud jsme se zabývali první možností, tedy numerickou integrací, založenou na aproximaci integrované funkce pomocí polynomů, které jsou totožné s integrovanou funkcí v předem daných bodech, dělicích interval, na kterém integrujeme na stejné dílky. Prozkoumáme nyní druhou možnost, kdy body, ve kterých ztotožníme aproximační funkce s funkcí, kterou integrujeme, nebudou rovnoměrně rozděleny po intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Přesnost takové aproximace se zvýší nejen zvětšováním počtu bodů a tedy stupně aproximačního polynomu  $\varphi(\xi)$ , ale i vhodným rozmístěním těchto bodů. Odvodíme zde *Gaussovu integrační formuli*, která je na uvedeném postupu založena a v souvislosti s izoparametrickými prvky je nejčastěji používána.

Gaussova integrační formule vyjadřuje přibližnou hodnotu integrálu

$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$  ve tvaru

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \dots + \alpha_n f(\xi_n) \quad (\text{B.5})$$

kde jak váhové koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tak body  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  jsou zatím neznámé. Jde nyní o to vybrat tyto parametry tak, aby se vypočtená přibližná hodnota co nejvíce blížila přesné hodnotě integrálu. Vidíme, že proti předcházejícímu postupu, kdy byly parametry pouze Newtonovy-Cotesovy konstanty, máme zde při stejném počtu bodů dvojnásobný počet parametrů. Lze tedy intuitivně očekávat, že obdržíme při stejném počtu bodů přesnější integrační formuli.

Nyní k vlastní konstrukci aproximačních funkcí. Základní aproximační funkce je stejná, jako u Newtonových-Cotesových formulí. To znamená, že integrovaná funkce  $f(\xi)$  je aproximována funkcí  $\varphi(\xi)$ , pro kterou máme

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=1}^n f_j h_j(\xi). \quad (\text{B.6})$$

Souřadnice  $n$  bodů, kterými prokládáme aproximační funkci, jsou zatím neznámé. Aproximační funkce  $\varphi(\xi)$  je polynomem  $(n-1)$  stupně. K dispozici však máme  $2n$  parametrů. Z toho vyplývá, že aproximační funkce může být až  $(2n-1)$  stupně. Hledejme tedy druhou část aproximace, která zvýší stupeň polynomu, při čemž nabude nulové hodnoty ve všech  $n$  bodech, kterými jsme proložili Lagrangeovy mnohočleny. Takovou formuli snadno najdeme ve formě součinu funkce

$$p(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\dots\dots\dots(\xi - \xi_n)$$

a obecného polynomu. Platí

$$\bar{\varphi}(\xi) = p(\xi)(B_0 + B_1\xi + B_2\xi^2 + \dots), \quad (\text{B.7})$$

Vzhledem k tomu, že obecný polynom v (B.7) představuje fakticky Taylorovu řadu, lze pomocí součtu  $\varphi(\xi) + \bar{\varphi}(\xi)$  aproximovat funkci  $f(\xi)$  s libovolnou přesností. Dokonce víme, že posloupnost částečných součtů monotónně konverguje k  $f(\xi)$ . Pro aproximaci tudíž stačí uvažovat jen určitý počet prvních členů polynomu  $(B_0 + B_1\xi + B_2\xi^2 + \dots)$ . V našem případě vezmeme prvních  $n$  členů. Můžeme tudíž psát

$$f(\xi) \approx \varphi(\xi) + p(\xi) \sum_{i=0}^n (B_i \xi^i). \quad (\text{B.8})$$

Integrací obdržíme

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^n B_i \int_{-1}^1 p(\xi) \xi^{i-1} d\xi. \quad (\text{B.9})$$

Nyní máme dvě možnosti. Buďto nalézt vhodné podmínky pro stanovení koeficientů  $B_i$  a provést naznačené integrace. Tím bychom však nezískali žádné podmínky pro rozdělení zvolených  $n$  bodů a mohli bychom je tudíž rozmístit libovolně. Lepší je vybrat souřadnice  $\xi_i$  tak, aby všech  $n$  integrálů  $\int_{-1}^1 p(\xi) \xi^{i-1} d\xi$  se rovnalo nule. Tím obdržíme soustavu nelineárních rovnic tvaru

$$\int_{-1}^1 p(\xi) \xi^{i-1} d\xi = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{B.10})$$

Z této soustavy vypočteme hodnoty  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , což jsou hledané souřadnice  $n$  bodů, v kterých vypočítáme funkční hodnoty. Je známo, že vlastnost (B.10) mají Legendreovy polynomy. To ovšem znamená, že souřadnice  $\xi_i$  jsou kořeny Legendreových polynomů. Známe-li  $\xi_i$ , výpočet  $\alpha_i$  je již snadnou záležitostí

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi. \quad (\text{B.11})$$

Popsanou volbou  $\xi_i$  se zcela vyhneme výpočtu koeficientů  $B_i$ , i když koeficienty  $B_i$  jsou od nuly různé. Funkce  $f(\xi)$  je aproximována polynomem  $(2n - 1)$  stupně.

Pro doplnění výkladu ukážeme výpočet  $\xi_i, \alpha_i$  pro  $n = 1, 2, 3$ . Dříve než přistoupíme k vlastnímu výpočtu, je třeba si uvědomit, že body  $\xi_i$  jsou symetricky rozloženy na intervalu  $< -1, 1 >$  podle počátku, neboť není žádný důvod preferovat jednu nebo druhou polovinu intervalu  $< -1, 1 >$ . Z toho vyplývá, že pro  $n$  liché leží vždy prostřední bod v počátku. Takže pro  $n = 1, 2, 3$  postačuje řešit vždy jen jedinou rovnici.

Nejjednodušší je případ  $n = 1$ . Poněvadž 1 je liché číslo, je  $\xi_1 = 0$ . Příslušná interpolační funkce je  $h_1 = 1$ . Z toho plyne, že  $\alpha_1 = \int_{-1}^1 1 d\xi = 2$ . Pro  $n = 2$  jsou body sice dva, ale v důsledku symetrie platí  $\xi_1 = -\xi_2$ . K dispozici máme dvě podmínky:

$$\int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\xi d\xi = 0.$$



Druhá podmínka v důsledku  $\xi_1 = -\xi_2$  je splněna identicky. Z první podmínky plyne

$$\int_{-1}^1 (\xi + \xi_2)(\xi - \xi_2) d\xi = \int_{-1}^1 (\xi^2 - \xi_2^2) d\xi = \frac{2}{3} - 2\xi_2^2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Váhové koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2$  jsou v důsledku symetrie stejné. Platí

$$\alpha_1 = \int_{-1}^1 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} d\xi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) d\xi = 1.$$

Konečně pro  $n = 3$  jsou body sice tři, ale  $\xi_2 = 0$  a  $\xi_1 = -\xi_3$ . K dispozici máme tři podmínky

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) d\xi &= 0, \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)\xi d\xi &= 0, \\ \int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)\xi^2 d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Čtenář se snadno může přesvědčit, že první a třetí podmínka jsou splněny identicky v důsledku  $\xi_2 = 0, \xi_1 = -\xi_3$ . Z druhé podmínky plyne

$$\int_{-1}^1 (\xi^2 - \xi_3^2)\xi^2 d\xi = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\xi_3^2 = 0 \Rightarrow \xi_3 = \sqrt{0.6}.$$

Zbývá vypočítat váhové koeficienty  $\alpha_1 = \alpha_3$  a  $\alpha_2$ . Pro ně platí:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} d\xi = \frac{1}{1,2} \int_{-1}^1 \xi(\xi - \sqrt{0.6}) d\xi = \frac{5}{9} \\ \alpha_2 &= \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} d\xi = \frac{1}{0.6} \int_{-1}^1 (\xi^2 - 0.6) d\xi = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Závěrem této kapitoly uvedeme nejprve tabulku B.2 souřadnic Gaussových bodů a váhových koeficientů pro  $n = 1, \dots, 6$  podle [7] <sup>2</sup> Rozšíření na výpočet integrálů  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ , a  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$  je jednoduché a je ukázáno ve třetí kapitole.

Zvláštní pozornost je třeba věnovat integraci na trojúhelníkovém prvku podle obr. B.3 Bez odvození uvedeme v tab. B.3 čtyř a sedmibodovou integrační souřadnice Gaussových bodů a váhové koeficienty čtyř a sedmibodovou integrační formuli.

<sup>2</sup>Poznámka: Gaussovu integrační formuli můžeme použít i k přibližnému výpočtu

$n$	$\xi_i$	$\alpha_i$
1	0,000000000000000	2,000000000000000
2	$\pm 0,577350269189626$	1,000000000000000
3	$\pm 0,774596669241483$ 0,000000000000000	0,555555555555555 0,888888888888888
4	$\pm 0,861136311594053$ $\pm 0,339981043584856$	0,347854845137454 0,652145154862546
5	$\pm 0,906179845938664$ $\pm 0,538469310105683$ 0,000000000000000	0,236926885056189 0,478628670499366 0,568888888888889
6	$\pm 0,932469514203152$ $\pm 0,661209386466265$ $\pm 0,238619186083197$	0,171324492379170 0,360761573048139 0,467913934572691

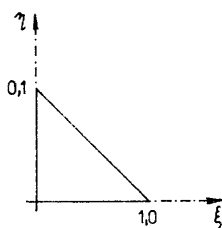
Tabulka B.2:

integrálu typu  $\int_a^b f(\xi) d\xi$ . Postup je následující. Máme k dispozici souřadnice Gaussových bodů  $\xi_i$  a váhové konstanty  $\alpha_i$  pro interval  $\langle -1, 1 \rangle$ . Pro integraci na intervalu  $\langle a, b \rangle$  budou mít Gaussovy body souřadnice

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i$$

a váhové koeficienty budou

$$\frac{b-a}{2} \alpha_i.$$



Obr. B.3: Trojúhelníkový prvek

$n$	$\xi_i$	$\eta_i$	$\alpha_i$
4	0,2000000000	0,2000000000	0,2604166666
	0,6000000000	0,2000000000	0,2604166666
	0,2000000000	0,6000000000	0,2604166666
	0,3333333333	0,3333333333	-0,2812500000
7	0,4701420641	0,0597158717	0,0661970500
	0,4701420641	0,4701420641	0,0661970500
	0,0597158717	0,4701420641	0,0661970500
	0,1012865073	0,1012865073	0,0629695902
	0,7974269853	0,1012865073	0,0629695902
	0,1012865073	0,7974269853	0,0629695902
	0,3333333333	0,3333333333	0,1125000000

Tabulka B.3: