Dodatek B

Základní pojmy a vztahy lineární teorie pružnosti

V tomto dodatku jsou připomenuty základy lineární teorie pružnosti, s nimiž se čtenář nejspíš již seznámil v předmětu Pružnost a pevnost. Kromě shrnutí elementárních poznatků dodatek obsahuje i určité prohloubení, zejména pokud jde o rozklad deformace a napětí na objemovou a deviatorickou část a s ním spojený maticový formalismus.

B.1 Zobecněný Hookeův zákon

V obecně zatíženém trojrozměrném tělese popisujeme napjatost pomocí šesti nezávislých složek napětí, mezi něž patří tři normálové složky σ_x, σ_y a σ_z a tři smykové složky, např. τ_{xy}, τ_{xz} a τ_{yz}. Existují sice také složky označené τ_{yx}, τ_{zx} a τ_{zy}, ale ty jsou podle věty o vzájemnosti smykových napětí rovny již uvedeným složkám, konkrétně platí $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ a $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Proto budeme pracovat jen se šesti nezávislými složkami a uspořádáme je do sloupcové matice

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} \tag{B.1}$$

Podobně je přetvoření elementárního (nekonečně malého) kvádru charakterizováno šesti složkami deformace, mezi něž patří tři normálové složky (relativní protažení) ε_x, ε_y a ε_z a tři smykové složky (smyková zkosení) γ_{xy}, γ_{xz} a γ_{yz}. Složky deformace uspořádáme do sloupcové matice

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} \tag{B.2}$$

Všimněte si, že řazení složek napětí a deformace si navzájem odpovídá, takže skalární součin

$$\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} \tag{B.3}$$

má význam práce vykonané složkami napětí na odpovídajících složkách deformace.

V lineární teorii pružnosti je vztah mezi napětím a deformací lineární a pro izotropní materiál stačí znát dvě materiálové konstanty — *Youngův modul pružnosti* E a *Poissonův součinitel* ν. Z nich pak lze vypočítat *modul pružnosti ve smyku*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{B.4}$$

Vztah mezi napětím a deformací se nejlépe pamatuje v podobě vzorců pro výpočet složek deformace ze známých složek napětí. Jak známo, při jednoosé napjatosti platí Hookeův zákon $\sigma = E\varepsilon$, kde napětí a deformace jsou charakterizovány normálovými složkami ve směru působícího zatížení. Jestliže tedy na materiál působí pouze napětí σ_x, odpovídající deformace ε_x se vypočte jako $\varepsilon_x = \sigma_x/E$. Zbývající normálové složky deformace nejsou nulové, ale v důsledku příčné kontrakce budou mít opačné znaménko a jejich velikost bude ν-násobkem podélné deformace, tj. $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\sigma_x/E$. Při obecné napjatosti je ale třeba vzít v úvahu také normálová napětí σ_y a σ_z. Příslušné příspěvky se snadno odvodí na základě analogie, protože pro izotropní materiál je např. vliv

σ_y na ε_x stejný jako vliv σ_x na ε_y, jeho příspěvek k ε_x tedy bude $-\nu\sigma_y/E$. Sečtením všech příspěvků získáme vztahy pro výpočet normálových složek deformace

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \tag{B.5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \tag{B.6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \tag{B.7}$$

V případě izotropního materiálu je každé ze smykových napětí úměrné odpovídající smykové deformaci a konstantou úměrnosti je smykový modul pružnosti G. Vztahy pro smykové deformace tedy zapíšeme jako

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{B.8}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \tag{B.9}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \tag{B.10}$$

Rovnice (B.5)–(B.10) můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \tag{B.11}$$

a kompaktně je zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_\mathrm{e}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{B.12}$$

kde $\mathbf{C}_\mathrm{e}$ je *matice pružné poddajnosti* materiálu. Je to čtvercová symetrická matice, jejíž podoba je zřejmá ze vztahu (B.11). Prvky matice $\mathbf{C}_\mathrm{e}$ závisejí na materiálových konstantách E a ν a jelikož jsou nepřímo úměrné modulu pružnosti E, vyjadřují poddajnost materiálu; odtud tedy název této matice. Inverzí vztahu (B.12) získáme *zobecněný Hookeův zákon*, neboli vyjádření napětí pomocí deformace ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}_\mathrm{e})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_\mathrm{e}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{B.13}$$

kde

$$\mathbf{D}_\mathrm{e} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5-\nu \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

je *matice pružné tuhosti* materiálu, která je inverzní k matici pružné poddajnosti.

B.2 Hlavní napětí a deformace

Konkrétní hodnoty složek napětí závisejí nejen na samotné napjatosti v daném bodě, ale také na volbě soustavy souřadnic, vůči které je vyjadřujeme. Při otáčení soustavy souřadnic se mění i hodnoty jednotlivých složek napětí, přitom však materiál zůstává stále ve stejném stavu. Proto hrají důležitou roli tzv. invarianty napětí, což jsou vhodně definované veličiny, které mají vůči libovolné soustavě souřadnic stejnou hodnotu. Příkladem takového invariantu je třeba *střední napětí*

$$\sigma_\mathrm{m} = \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{B.15}$$

které popisuje hydrostatickou část daného stavu napětí. Jinými invarianty jsou *hlavní napětí* σ_1, σ_2 a σ_3, která se vypočtou jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0 \tag{B.16}$$

Po rozepsání determinantu zjistíme, že jde o kubickou rovnici, která má vždy tři kořeny σ_I, $I = 1, 2, 3$. V některých případech existují jen dva různé kořeny nebo dokonce jen jeden, ale to znamená, že se jedná o kořeny vícenásobné a dvě nebo všechna tři hlavní napětí mají stejnou hodnotu. Například pro jednoosý tah nebo tlak je při vhodné volbě soustavy souřadnic jedinou nenulovou složkou napětí σ_x, takže charakteristická rovnice (B.16) nabývá tvaru

$$(\sigma_x - \sigma)\,\sigma^2 = 0 \tag{B.17}$$

a má jednoduchý kořen σ_x a dvojnásobný kořen 0. Odpovídající hlavní napětí jsou proto $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$ a $\sigma_3 = 0$. Pro hydrostatický tlak je $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_\mathrm{m} < 0$ a smykové složky napětí jsou nulové, takže charakteristická rovnice (B.16) nabývá tvaru

$$(\sigma_\mathrm{m} - \sigma)^3 = 0 \tag{B.18}$$

a má trojnásobný kořen σ_m. V tomto případě jsou všechna hlavní napětí stejná a máme $\sigma_1 = \sigma_\mathrm{m}$, $\sigma_2 = \sigma_\mathrm{m}$ a $\sigma_3 = \sigma_\mathrm{m}$.

Hlavní napětí se často řadí podle velikosti tak, aby platilo $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$, ale tuto konvenci někdy není výhodné dodržovat, takže žádné zvláštní uspořádání nebudeme předpokládat. Například při rovinné napjatosti v rovině xy jsou nenulové pouze složky napětí σ_x, σ_y a τ_{xy}, takže charakteristická rovnice (B.16) má tvar

$$[\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2]\,\sigma = 0 \tag{B.19}$$

a její kořeny jsou

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \qquad \sigma_3 = 0 \tag{B.20}$$

Zde je tedy výhodné označit σ_1 a σ_2 hlavní napětí v rovině xy a σ_3 hlavní napětí kolmé na tuto rovinu, bez ohledu na to, které hlavní napětí je nejmenší. Největší a nejmenší hlavní napětí ale hrají významnou roli, a proto pro ně zavedeme označení $\sigma_\mathrm{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ a $\sigma_\mathrm{min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Zbývající hlavní napětí nazýváme *prostřední* (pozor—nezaměňovat se *středním* napětím σ_m).

Podobně jako hlavní napětí můžeme definovat *hlavní deformace* ε_1, ε_2 a ε_3, ovšem s tím rozdílem, že v charakteristické rovnici

$$\det\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0 \tag{B.21}$$

se místo smykových zkosení γ objeví jejich poloviny, které představují tzv. tenzorové složky smykové deformace. Podrobnější zdůvodnění lze nalézt v učebnicích teorie pružnosti pracujících s tenzorovým zápisem. Z matematického hlediska totiž nemá deformace ani napětí charakter klasického vektoru, ale tzv. tenzoru druhého řádu.

Vzhledem k tenzorovému charakteru napětí a deformace je třeba jisté obezřetnosti i při výpočtu jejich norem. Pro obvyklé vektory v geometrickém smyslu, např. pro polohový vektor $\mathbf{x} = \{x, y, z\}^T$, se používá obvyklá euklidovská norma $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, která vyjadřuje vzdálenost koncového bodu tohoto vektoru od počátku. Takto vypočtená vzdálenost nezávisí na konkrétní volbě orientace souřadnicových os, takže je invariantem. Norma napětí by se obdobným způsobem vypočetla z hlavních napětí σ_1, σ_2 a σ_3. Pokud ji však chceme zapsat pomocí složek napětí vzhledem k obecně zvolené soustavě souřadnic, podrobný matematický rozbor ukazuje, že druhé mocniny smykových složek musíme vynásobit dvěma. Norma napětí se tedy vypočte jako

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2} \tag{B.22}$$

což lze maticově přepsat jako

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}} \tag{B.23}$$

kde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.24}$$

je diagonální matice o šesti řádcích a šesti sloupcích, která má na prvních třech diagonálních pozicích jedničky a na zbývajících třech dvojky. S touto maticí se ještě setkáme v dalších souvislostech, a proto bude užitečné pro ni zavést název *škálovací matice.*[1] Potřebnost faktorů „2“ u druhých mocnin smykových napětí je možné ověřit např. tak, že za předpokladu rovinné napjatosti dosadíme do výrazu $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ za hlavní napětí σ_1 a σ_2 jejich vyjádření pomocí složek σ_x, σ_y a τ_{xy} dané vzorcem (B.20).

[1] „Škálováním“ zde rozumíme změnu měřítka. Po vynásobení maticí $\mathbf{P}$ zůstanou normálové složky beze změny a smykové složky se zdvojnásobí, což si lze představit jako jistou změnu měřítka pro smykové složky.

Při výpočtu normy deformace se postupuje obdobně, ale tentokrát je druhé mocniny smykových složek potřeba **vydělit** dvěma, takže příslušný vzorec lze zapsat jako

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2} = \sqrt{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}^2+\tfrac{1}{2}\gamma_{xz}^2+\tfrac{1}{2}\gamma_{yz}^2} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{B.25}$$

kde

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

je *inverzní škálovací matice*.

B.3 Rozklad na hydrostatickou a deviatorickou část

Hydrostatická napjatost je zvláštním stavem, při kterém je normálové napětí v libovolném směru stejné a smykové složky napětí jsou nulové (při libovolné volbě souřadnicových os). Tento stav odpovídá napjatosti v kapalině, která není schopna přenášet smyková napětí, odtud tedy přívlastek „hydrostatická“. V kapalině samozřejmě vzniká hydrostatický tlak, ale pevné látky jsou v zásadě schopny přenášet i hydrostatický tah. Za hydrostatické napjatosti dochází v izotropním materiálu pouze k normálovým deformacím, zatímco smykové deformace jsou nulové. Navíc mají normálové deformace ve všech směrech stejnou hodnotu. To vše lze snadno odvodit z rovnic (B.5)–(B.10), dosadíme-li $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_\mathrm{m}$ a $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Relativní protažení v libovolném směru je pak

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_\mathrm{m} \tag{B.27}$$

Myšlená vlákna materiálu se v libovolném směru protahují (nebo pro $\sigma_\mathrm{m} < 0$ zkracují) stejným způsobem a úhly mezi vlákny různých směrů zůstávají zachovány. Proto se např. krychle transformuje opět na krychli, nebo koule na kouli, jen se jejich rozměry zvětšují (pro $\sigma_\mathrm{m} > 0$) nebo zmenšují (pro $\sigma_\mathrm{m} < 0$). Při hydrostatické napjatosti tedy nedochází ke změně tvaru, ale pouze ke změně objemu.

Věnujme se opět obecné (ne nutně hydrostatické) napjatosti. Pod vlivem napětí se materiál deformuje a mění tvar i objem. Elementární kvádr o hranách $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ a objemu $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ se ztransformuje na rovnoběžnostěn o objemu $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+O(\varepsilon^2))$, kde symbol $O(\varepsilon^2)$ označuje členy, které jsou součiny dvou nebo tří deformací a za předpokladu malých deformací je můžeme zanedbat. Relativní změnu objemu tedy můžeme vyjádřit jako

$$\varepsilon_\mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}V' - \mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \tag{B.28}$$

Toto je obvyklá definice *objemové deformace*, s níž se čtenář nejspíš setkal již v předmětu Pružnost a pevnost. Jelikož ε_V jakožto relativní změna objemu nemůže záviset na naší volbě souřadnicových os, musí být v daném bodě součet normálových deformací v libovolných třech navzájem kolmých směrech stejný, jde tedy o invariant. Po dosazení z rovnic (B.5)–(B.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mathrm{V} &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z)+\frac{1}{E}(-\nu\sigma_x+\sigma_y-\nu\sigma_z)+\frac{1}{E}(-\nu\sigma_x-\nu\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{E}\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = \frac{\sigma_\mathrm{m}}{K} \end{aligned} \tag{B.29}$$

kde

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{B.30}$$

je *objemový modul pružnosti* a σ_m je již dříve zmíněné střední napětí, definované v (B.15). Vidíme, že pro izotropní materiál je objemová deformace úměrná střednímu napětí, neboli aritmetickému průměru normálových napětí ve třech navzájem kolmých směrech. Konstantou úměrnosti je zde převrácená hodnota objemového modulu pružnosti K, který lze vypočítat z Youngova modulu pružnosti a Poissonova součinitele podle vzorce (B.30).

Při obecné deformaci dochází jak ke změně objemu, tak i ke změně tvaru. Například elementární krychle se obecně přetvoří na rovnoběžnostěn a koule na elipsoid. Celkovou deformaci však můžeme vždy rozložit na dvě části, z nichž jedna odpovídá pouze změně objemu (při zachování tvaru) a druhá pouze změně tvaru (při zachování objemu). Objemovou část deformace si představíme jako rovnoměrné protažení materiálu ve všech směrech, odpovídající průměrné hodnotě normálové deformace

$$\varepsilon_\mathrm{m} = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = \tfrac{1}{3}\varepsilon_\mathrm{V} \tag{B.31}$$

Po odečtení ε_m od jednotlivých normálových složek deformace (a ponechání smykových složek beze změny) získáme zbylou část deformace, která odpovídá změně tvaru. Říkáme jí *deviatorická deformace* a její normálové složky značíme

$$e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_\mathrm{m}, \qquad e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_\mathrm{m}, \qquad e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_\mathrm{m} \tag{B.32}$$

V maticovém tvaru rozklad deformace na objemovou a deviatorickou část zapíšeme jako

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_m\\ \varepsilon_m\\ \varepsilon_m\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}e_x\\ e_y\\ e_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\} \tag{B.33}$$

neboli jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_\mathrm{m}\,\mathbf{i} + \mathbf{e} \tag{B.34}$$

kde

$$\mathbf{i} = \left\{\begin{array}{c}1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\} \tag{B.35}$$

je pomocná sloupcová matice s jednotkovými hodnotami normálových složek a nulovými hodnotami smykových složek a $\mathbf{e}$ je sloupcová matice deviatorických složek deformace e_x, e_y, e_z, γ_{xy}, γ_{xz} a γ_{yz}.

Pro izotropní lineárně pružný materiál lze relativní změnu objemu $\varepsilon_\mathrm{V} = 3\varepsilon_\mathrm{m}$ vypočítat ze středního napětí σ_m podle vzorce (B.29). Pokud je materiál podroben hydrostatickému napětí, dochází pouze ke změně objemu, zatímco deviatorická část deformace zůstává nulová. Jestliže od jednotlivých normálových napětí odečteme jejich střední hodnotu a smyková napětí ponecháme beze změny, získáme tzv. deviatorickou část napětí. I pro napětí lze tedy zkonstruovat rozklad

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i} + \mathbf{s} \tag{B.36}$$

na hydrostatickou část $\sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i}$ a deviatorickou část

$$\mathbf{s} = \left\{\begin{array}{c}s_x\\ s_y\\ s_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\} \tag{B.37}$$

kde

$$s_x = \sigma_x - \sigma_\mathrm{m} = \sigma_x - \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \tfrac{2}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_z \tag{B.38}$$

$$s_y = \sigma_y - \sigma_\mathrm{m} = \sigma_y - \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \tfrac{2}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_z \tag{B.39}$$

$$s_z = \sigma_z - \sigma_\mathrm{m} = \sigma_z - \tfrac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \tfrac{2}{3}\sigma_z - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y \tag{B.40}$$

jsou normálové složky deviatorického napětí.

Pro deviatorické napětí a deformaci lze také definovat hlavní hodnoty, tj. *hlavní deviatorická napětí* s_1, s_2 a s_3 a *hlavní deviatorické deformace* e_1, e_2 a e_3. Získali bychom je řešením příslušné charakteristické rovnice (B.16) nebo (B.21), ve které by se normálové složky σ_x, ε_x, atd. nahradily odpovídajícími deviatorickými složkami s_x, e_x, atd. Snadno lze ukázat, že hlavní deviatorická napětí jsou vlastně hlavní napětí „posunutá“ o střední napětí σ_m, platí tedy $s_I = \sigma_I - \sigma_\mathrm{m}$, $I = 1, 2, 3$, a podobně je i $e_I = \varepsilon_I - \varepsilon_\mathrm{m}$, $I = 1, 2, 3$. Součet tří hlavních deviatorických napětí je vždy nulový, stejně jako součet tří hlavních deviatorických deformací.

Je pozoruhodné, že pro izotropní lineárně pružný materiál závisí relativní změna objemu ε_V pouze na hydrostatickém napětí σ_m a změna tvaru, popsaná deviatorickou deformací $\mathbf{e}$, závisí pouze na deviatorickém napětí $\mathbf{s}$. Objemové a tvarové změny tedy lze (na úrovni materiálového bodu) zkoumat odděleně.[2] Vztah (B.29) mezi ε_V a σ_m jsme již odvodili a víme, že se v něm objevuje objemový modul pružnosti K. Vztahy mezi deviatorickými normálovými složkami napětí a deformace odvodíme z rovnic (B.32) s využitím (B.5)–(B.7), (B.29), (B.31) a (B.38)–(B.40). Například pro složku e_x získáme vztah

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x - \varepsilon_\mathrm{m} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) - \frac{1}{3K}\sigma_\mathrm{m} = \frac{1}{E}\left[s_x + \sigma_\mathrm{m} - \nu(s_y + \sigma_\mathrm{m}) - \nu(s_z + \sigma_\mathrm{m})\right] - \frac{1-2\nu}{E}\sigma_\mathrm{m} = \\ &= \frac{1}{E}(s_x - \nu s_y - \nu s_z) \end{aligned} \tag{B.41}$$

[2]Tato vlastnost se přenáší i na některé (ale ne všechny) pružnoplastické modely.

Tento výraz se dá dále zjednodušit, pokud si uvědomíme, že

$$s_x + s_y + s_z = \sigma_x - \sigma_\mathrm{m} + \sigma_y - \sigma_\mathrm{m} + \sigma_z - \sigma_\mathrm{m} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_\mathrm{m} = 3\sigma_\mathrm{m} - 3\sigma_\mathrm{m} = 0 \tag{B.42}$$

jinými slovy, že součet deviatorických normálových složek napětí je vždy nulový. Proto místo $-\nu s_y - \nu s_z$ můžeme do (B.41) dosadit νs_x a tak zjistíme, že deviatorická deformace e_x je úměrná deviatorickému napětí s_x podle vzorce

$$e_x = \frac{1+\nu}{E} s_x = \frac{1}{2G} s_x \tag{B.43}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku. Obdobné vztahy samozřejmě platí mezi e_y a s_y a mezi e_z a s_z. U smykových napětí a deformací není žádný rozdíl mezi celkovými a deviatorickými hodnotami (jinými slovy, smykové složky mají čistě deviatorický charakter), a proto pro ně stále platí vztahy (B.8)–(B.10). Po shrnutí pak můžeme vše přepsat v maticové podobě

$$\left\{\begin{array}{c} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \frac{1}{2G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} s_x \\ s_y \\ s_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array}\right\} \tag{B.44}$$

neboli

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \mathbf{P}\mathbf{s} \tag{B.45}$$

kde $\mathbf{P}$ je škálovací matice definovaná v (B.24).

Rovnice (B.45) dává návod pro výpočet deviatorické části deformace z deviatorické části napětí. Vzhledem k diagonálnímu charakteru matice $\mathbf{P}$ je její inverze velmi jednoduchá. Závislost deviatorických napětí na deviatorických deformacích můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e} \tag{B.46}$$

kde $\mathbf{P}^{-1}$ je inverzní škálovací matice definovaná v (B.26).

Vraťme se ještě na okamžik k rovnici (B.42), podle které je součet deviatorických normálových napětí nulový. Názorně to znamená, že pokud má napětí čistě deviatorický charakter, je příslušné střední napětí nulové. Tuto skutečnost můžeme maticově zapsat jako $\mathbf{i}^T\mathbf{s} = 0$, neboť vzhledem k definici sloupcové matice $\mathbf{i}$ v (B.35) je její skalární součin se sloupcovou maticí $\mathbf{s}$ roven součtu tří prvních složek $\mathbf{s}$. Podobně je $\mathbf{i}^T\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_\mathrm{m}$ a $\mathbf{i}^T\mathbf{i} = 1 + 1 + 1 = 3$. Důkaz identity $\mathbf{i}^T\mathbf{s} = 0$, který byl v (B.42) proveden ve skalární podobě, můžeme maticově zapsat jako

$$\mathbf{i}^T\mathbf{s} = \mathbf{i}^T(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i}) = \mathbf{i}^T\boldsymbol{\sigma} - \sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i}^T\mathbf{i} = 3\,\sigma_\mathrm{m} - \sigma_\mathrm{m}\,3 = 0 \tag{B.47}$$

Zcela analogicky lze postupovat pro deviatorickou deformaci a dokázat identitu $\mathbf{i}^T\mathbf{e} = 0$. Protože hydrostatická část napětí je popsána sloupcovou maticí $\sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i}$, je její skalární součin s libovolnou deviatorickou deformací $\mathbf{e}$ nulový; je totiž $(\sigma_\mathrm{m}\,\mathbf{i})^T\mathbf{e} = \sigma_\mathrm{m}(\mathbf{i}^T\mathbf{e}) = \sigma_\mathrm{m}\cdot 0 = 0$. Připomeňme, že skalární součin napětí a přírůstku deformace odpovídá práci vykonané napětím během tohoto přírůstku, vztažené na jednotku objemu. Hydrostatická část napětí tedy při změně tvaru za konstantního objemu nekoná žádnou práci. Podobně lze ukázat, že deviatorická část napětí nekoná práci na objemových změnách. To platí samozřejmě i pro výkon, který představuje práci vykonanou za jednotku času a lze jej vypočíst jako součin napětí a rychlosti deformace.[3] Odtud pak plyne, že výkon podávaný napětím na rychlosti deformace můžeme také rozložit na objemovou a deviatorickou část. Je totiž

$$\boldsymbol{\sigma}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\sigma_\mathrm{m}\mathbf{i} + \mathbf{s})^T(\dot\varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{i} + \dot{\mathbf{e}}) = \sigma_\mathrm{m}\dot\varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{i}^T\mathbf{i} + \sigma_\mathrm{m}\mathbf{i}^T\dot{\mathbf{e}} + \dot\varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{s}^T\mathbf{i} + \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{e}} = \sigma_\mathrm{m}\dot\varepsilon_\mathrm{m}3 + 0 + 0 + \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{e}} = \sigma_\mathrm{m}\dot\varepsilon_\mathrm{V} + \mathbf{s}^T\dot{\mathbf{e}} \tag{B.48}$$

Součin středního napětí σ_m a rychlosti objemové deformace $\dot\varepsilon_\mathrm{V}$ představuje výkon spojený se změnou objemu, součin deviatorického napětí $\mathbf{s}$ a rychlosti deviatorické deformace $\dot{\mathbf{e}}$ představuje výkon spojený se změnou tvaru.

Pro pružný materiál se veškerá práce vykonaná napětím na změnách deformace transformuje na *potenciální energii pružné deformace*. Pokud je materiál lineárně pružný, lze potenciální energii pružné deformace v daném stavu popsaném deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ a napětím $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_\mathrm{e}\,\boldsymbol{\varepsilon}$ vypočítat jako

$$W_\mathrm{e} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}_\mathrm{e}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{C}_\mathrm{e}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{B.49}$$

a v případě izotropního materiálu pak lze tuto energii rozložit na části odpovídající objemovým a tvarovým změnám:

$$W_\mathrm{e} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}(\sigma_\mathrm{m}\mathbf{i} + \mathbf{s})^T(\varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{i} + \mathbf{e}) = \tfrac{1}{2}\sigma_\mathrm{m}\varepsilon_\mathrm{V} + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{e} = W_\mathrm{eV} + W_\mathrm{eD} \tag{B.50}$$

[3] Přesněji řečeno, součin napětí a rychlosti deformace je výkon na jednotku objemu materiálu.

Po uplatnění vztahů (B.29) a (B.45) (případně (B.46)), umožňujících převody mezi napětím a deformací, zjistíme, že energie spotřebovaná na pružnou změnu objemu je

$$W_{\mathrm{eV}} = \tfrac{1}{2}\sigma_{\mathrm{m}}\varepsilon_{\mathrm{V}} = \frac{K}{2}\varepsilon_{\mathrm{V}}^2 = \frac{1}{2K}\sigma_{\mathrm{m}}^2 \tag{B.51}$$

a energie spotřebovaná na pružnou změnu tvaru je

$$W_{\mathrm{eD}} = \tfrac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{e} = G\mathbf{e}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e} = \frac{1}{4G}\mathbf{s}^T\mathbf{P}\mathbf{s} \tag{B.52}$$

Závěrem ještě ukážeme, jak lze na objemovou a deviatorickou část rozložit matici pružné tuhosti $\mathbf{D}_{\mathrm{e}}$, která se objevuje v maticové podobě zobecněného Hookeova zákona (B.13). Rozložíme-li napětí podle (B.36) a uplatníme vztahy (B.29) a (B.45), dostaneme

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\mathrm{m}}\,\mathbf{i} + \mathbf{s} = K\varepsilon_{\mathrm{V}}\mathbf{i} + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e} \tag{B.53}$$

Abychom mohli pravou stranu vyjádřit v závislosti na celkové deformaci $\boldsymbol{\varepsilon}$, musíme najít maticové vyjádření objemové deformace ε_{V} a deviatorické deformace $\mathbf{e}$ pomocí $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pro objemovou deformaci si stačí připomenout vztah $\varepsilon_{\mathrm{V}} = \mathbf{i}^T\boldsymbol{\varepsilon}$ a deviatorickou deformaci vyjádříme jako

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_{\mathrm{m}}\,\mathbf{i} = \boldsymbol{\varepsilon} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}\,\varepsilon_{\mathrm{V}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T\right)\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_D\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{B.54}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice a

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.55}$$

je matice transformující celkovou deformaci na deviatorickou. Po dosazení do (B.53) nakonec zjistíme, že zobecněný Hookeův zákon lze přepsat jako

$$\boldsymbol{\sigma} = K\mathbf{i}\,\varepsilon_{\mathrm{V}} + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e} = K\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T\boldsymbol{\varepsilon} + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}_D\,\boldsymbol{\varepsilon} = \left(K\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}_D\right)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{B.56}$$

takže matice pružné tuhosti je

$$\mathbf{D}_{\mathrm{e}} = K\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T + 2G\mathbf{P}^{-1}\mathbf{I}_D = K\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G\begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.57}$$

Porovnáním s (B.14) můžeme ověřit, že jde skutečně o stejnou matici. Stačí si uvědomit, že

$$K + \frac{4}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = E\,\frac{1+\nu+2-4\nu}{3(1-2\nu)(1+\nu)} = E\,\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{B.58}$$

$$K - \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)} = E\,\frac{1+\nu-1+2\nu}{3(1-2\nu)(1+\nu)} = E\,\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{B.59}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{B.60}$$

Zároveň (B.57) ukazuje, že matici pružné tuhosti můžeme chápat jako součet dvou matic, z nichž jedna závisí na objemovém modulu pružnosti a uplatní se při změnách objemu (které ovlivní hydrostatickou část napětí) a druhá závisí na smykovém modulu pružnosti a uplatní se při změnách tvaru (které ovlivní deviatorickou část napětí).