Univerzální principy mechaniky

Přednáška 2

28. února 2020

Přehled látky

V rámci řešení minulého domácího úkolu probráno: Přímý (tenzorový) součin dvou vektorů definovaný pomocí jim příslušných lineárních forem, označení operátorem “$\otimes$”, vlastnosti přímého součinu a jeho reprezentace pomocí maticových operací. Tenzor m-tého řádu jako multilineární forma, která uspořádané m-tici vektorů přiřazuje reálné číslo. Reprezentace obecného tenzoru pomocí jeho složek a tenzorů vytvořených přímým součinem bázových vektorů. Definice přímého součinu tenzorů pomocí multilineárních forem, vyjádření přímého součinu ve složkovém zápisu, pravidlo pro řád tenzoru vzniklého přímým součinem tenzorů. Transformace složek tenzoru 2. řádu při změně báze, maticová reprezentace této transformace, využití při transformaci složek napětí. Zobecnění transformačního vzorce pro tenzory libovolného řádu.

Dále probráno: Definice kontrakce (zúžení) mezi tenzorem 2. řádu a tenzorem 1. řádu ($\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$), kontrakce mezi dvěma tenzory 2. řádu ($\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$), vyjádření kontrakce ve složkovém zápisu, zobecnění pro dva tenzory libovolného řádu, pravidlo pro řád tenzoru vzniklého kontrakcí tenzorů. Souvislost kontrakce se skalárním součinem vektorů. Dvojitá kontrakce ($\mathbf{F}:\mathbf{G}$ nebo $\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{G}$), složkový zápis.

Přehled dosud zavedených operací s tenzory v tzv. kompaktním zápisu (tenzory značeny tučnými písmeny) a složkovém zápisu (vztahy zapsány pro složky tenzorů vzhledem k pevně zvolené ortonormální bázi) je uveden v následující tabulce. Abychom nemuseli složitě vyznačovat obecný počet indexů pro tenzory libovolného řádu, je složkový zápis uveden konkrétně pro tenzory $\mathbf{F}$ a $\mathbf{H}$ třetího řádu a tenzor $\mathbf{G}$ čtvrtého řádu. Řád výsledného tenzoru $\mathbf{R}$ závisí na tom, jaká operace se provedla.

operace	kompaktní zápis	složkový zápis
sčítání tenzorů	$\mathbf{R}=\mathbf{F}+\mathbf{H}$	$R_{ijk}=F_{ijk}+H_{ijk}$
násobení tenzoru skalárem	$\mathbf{R}=\alpha\mathbf{F}$	$R_{ijk}=\alpha F_{ijk}$
přímý součin	$\mathbf{R}=\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}$	$R_{ijklpqr}=F_{ijk}G_{lpqr}$
kontrakce	$\mathbf{R}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$	$R_{ijlpq}=F_{ijk}G_{klpq}$
dvojitá kontrakce	$\mathbf{R}=\mathbf{F}:\mathbf{G}$	$R_{ilp}=F_{ijk}G_{jklp}$

Doplňující poznámky

Jednotkový tenzor 2. řádu a stopa tenzoru

Připomeňte si definici Kroneckerova symbolu: δ_{ij} je rovno 1 pro $i=j$ a 0 pro $i\neq j$. Platí tedy např. $\delta_{11}=1$ nebo $\delta_{23}=0$.

Kroneckerovo delta se často vyskytuje ve složkovém zápisu různých tenzorových operací, a proto je užitečné si uvědomit, jak s ním pracovat a jak zjednodušit výrazy, které jej obsahují. Setkáme-li se například s výrazem $\delta_{ij}u_j$, můžeme jej přepsat jako u_i. První uvedený výraz představuje součet přes všechna j, který bychom mohli rozepsat jako $\delta_{i1}u_1+\delta_{i2}u_2+\delta_{i3}u_3$. Pro pevně zvolené i je δ_{ij} nenulové pouze pro $j=i$, takže ve výše uvedeném součtu budou dva ze tří členů nulové a zbyde pouze ten, ve kterém je index u u roven i, tedy u_i (vynásobený jedničkou). Ukázali jsme tak, že platí $\delta_{ij}u_j=u_i$. Jak je vidět, z indexu j se “pod působením” Kroneckerova δ_{ij} stal index i. Podobné úpravy budeme nadále provádět rutinně, bez podrobného zdůvodňování. Například výraz $\delta_{ik}F_{lk}g_l$ zjednodušíme na $F_{li}g_l$.

Kroneckerovo delta představuje složky (vůči libovolné ortonormální bázi) tenzoru $\mathbf{1}$, což je jednotkový tenzor 2. řádu. Tento tenzor odpovídá bilineární formě zkoumané v části 1.1 prvního domácího úkolu. Pro libovolný tenzor $\mathbf{F}$ (aspoň 1. řádu) platí

$$\mathbf{1}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{1} \tag{1}$$

To je důvod, proč o tenzoru $\mathbf{1}$ mluvíme jako o jednotkovém.

Je také užitečné zavést pojem *stopa tenzoru*. Pro libovolný tenzor 2. řádu $\mathbf{F}$ nazýváme jeho stopou (anglicky “trace”) číslo

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{F}=\mathbf{1}:\mathbf{F}=\delta_{ij}F_{ij}=F_{ii} \tag{2}$$

I v posledním výrazu na pravé straně se používá sčítací konvence pro opakovaný index i, takže pro trojrozměrný prostor jde o součet $F_{11} + F_{22} + F_{33}$.

Transpozice tenzorů 2. a 4. řádu

Transpozicí bilinární formy F rozumíme bilineární formu F^T definovanou předpisem

$$F^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \tag{3}$$

Složky transponované bilinární formy se vyjádří jako

$$\left(F^T\right)_{ij} = F^T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = F(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = F_{ji} \tag{4}$$

takže matice těchto složek je transponovaná k matici složek původní bilineární formy F. Pro symetrickou bilineární formu F (ve smyslu již dříve podané definice) platí $F^T = F$ a je reprezentována symetrickou maticí.

Podobně můžeme definovat i transpozici kvadrilineární formy, která představuje tenzor 4. řádu. Transpozicí kvadrilinární formy F rozumíme kvadrilineární formu F^T definovanou předpisem

$$F^T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{5}$$

jejíž složky se vyjádří jako

$$\left(F^T\right)_{ijkl} = F^T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = F(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = F_{klij} \tag{6}$$

I zde můžeme mluvit o symetrickém tenzoru, pokud platí $F^T = F$. Kromě této tzv. *velké symetrie* (anglicky "major symmetry"), která ve složkovém zápisu odpovídá identitě $F_{ijkl} = F_{klij}$, je užitečná i *malá symetrie* (minor symmetry), která je pro kvadrilineární formu vyjádřena podmínkou

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \tag{7}$$

a ve složkovém zápisu podmínkou $F_{ijkl} = F_{jikl} = F_{ijlk}$.