Univerzální principy mechaniky

Přednáška 3

6. března 2020

Doplňující poznámky

Tenzor deformace

Na přednášce jsme zkoumali případ rovnoměrně deformovaného tělesa, pro které se obecný bod charakterizovaný polohovým vektorem $\mathbf{x}$ přemístí do bodu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

kde $\mathbf{F}$ je daný tenzor, nezávislý na $\mathbf{x}$. Ukázali jsme, že přetvoření tělesa lze popsat pomocí pravého Cauchyho-Greenova deformačního tenzoru

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \tag{2}$$

Tento tenzor je ovšem pro nedeformované těleso jednotkový, nikoli nulový, takže nejde o tenzor deformace v pravém slova smyslu. Anglicky se mu proto říká "deformation tensor" a nikoli "strain tensor", česky je to "deformační tenzor" a nikoli "tenzor deformace". V teorii velkých deformací je celá řada možností, jak tenzor deformace definovat, ale snad nejpoužívanější je Greenův-Lagrangeův tenzor deformace

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \tag{3}$$

Při řešení domácího úkolu 2.3 jsme došli k závěru, že v případě malých změn výchozího stavu trojrozměrného tělesa lze jeho přetvoření popsat symetrickým tenzorem 2. řádu, který můžeme s využitím označení zavedeného ve zmíněném úkolu zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \tag{4}$$

kde $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$ a $\mathbf{F}$ je deformační gradient. Všimněte si, že rozdíl mezi novou a původní polohou obecného bodu $\mathbf{x}$ lze popsat funkcí $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} = (\mathbf{F} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$.

V obecném případě nerovnoměrně deformovaného tělesa se výše zmíněné tenzory definují pro každý materiálový bod zvlášť a charakterizují přetvoření v těsném (nekonečně malém) okolí tohoto bodu. Tyto tenzory tedy závisejí na souřadnici $\mathbf{x}$ a mají charakter tenzorových polí.[1] Bod charakterizovaný polohovým vektorem $\mathbf{x}$ se obecně přemístí do bodu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor posunů, daný obecnou nelineární funkcí $\mathbf{x}$. V malém okolí zkoumaného bodu $\bar{\mathbf{x}}$ lze rozvinout $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ do Taylorovy řady a zanedbat její nelineární členy, což vede k aproximaci

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} \tag{6}$$

Roli konstantního tenzoru $\mathbf{F}$ charakterizujícího rovnoměrně deformované těleso nyní přebírá tenzorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{7}$$

kterému se říká **deformační gradient**, zatímco tenzorové pole $\partial\mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}$ je tzv. **gradient posunů**, který přebírá roli tensoru $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$. Na základě vztahů (2)–(3) se pak přejde k pravému Cauchyho-Greenovu deformačnímu tenzoru a Greenovu-Lagrangeovu tenzoru deformace, které mají opět charakter tenzorových polí. V případě malých deformací se v duchu vztahu (4) definuje tenzor malé deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\right) \tag{8}$$

jako symetrická část gradientu posunů.

[1] Obecně polem rozumíme jakoukoli fyzikální veličinu, která závisí na prostorových souřadnicích, tj. její hodnota se mění bod od bodu. Jestliže hodnoty této veličiny mají skalární charakter, mluvíme o skalárním poli (příkladem je teplotní pole). Posuny mají charakter vektoru, takže pole posunů je vektorové. Napětí a deformace mají charakter tenzoru 2. řádu, takže pole napětí je příkladem tenzorového pole.

Vztah mezi tenzorem deformace a veličinami známými z pružnosti

V základním kurzu pružnosti byly definovány názorné veličiny charakterizující deformaci:

- Poměrné protažení, které se značí ε a představuje relativní změnu délky myšleného vlákna v příslušném směru (např. ε_y je relativní protažení vlákna rovnoběžného s osou y).
- Smykové zkosení, které se značí γ a představuje změnu původně pravého úhlu mezi dvěma myšlenými vlákny (např. γ_{xy} je změna úhlu mezi vlákny původně rovnoběžnými s osami x a y).

Byly také odvozeny vztahy pro výpočet deformačních veličin z pole posunů. Poměrná protažení ve směrech os x, y a z se vypočtou podle vztahů

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{10}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{11}$$

kde u, v a w jsou posuny ve směrech x, y a z. Smyková zkosení se za předpokladu malých rotací vypočtou podle vztahů

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{13}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{14}$$

Připomeňte si také, že pokud jsou deformace malé, odpovídá součet poměrných protažení ve třech navzájem kolmých směrech relativní změně objemu

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{15}$$

V tenzorovém zápisu se kartézské souřadnice označují x_1, x_2 a x_3 místo x, y a z. Posuny ve směrech jednotlivých souřadnicových os se označují u_1, u_2 a u_3 místo u, v a w a představují složky vektoru posunů $\mathbf{u}$. Posuny jednotlivých bodů zkoumaného tělesa jsou obecně různé a můžeme je chápat jako funkci polohového vektoru $\mathbf{x}$, jehož složkami jsou souřadnice x_i. Říkáme také, že posuny mají charakter vektorového pole.

Jednotlivé složky posunů můžeme derivovat podle jednotlivých prostorových souřadnic. Parciální derivace $\partial u_i/\partial x_j$ jsou složkami tenzoru, kterému se říká gradient pole posunů. Některé z těchto derivací přímo odpovídají poměrným protažením. Vztahy (9)–(11) můžeme přepsat jako

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{16}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{17}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{18}$$

Přitom označení ε_{11} atd. napovídá, že tyto veličiny budou složkami tenzoru deformace. Nelze ale jednoduše ztotožnit tenzor deformace s gradientem posunů, protože složky ε_{ij} s rozdílnými indexy i a j by pak neodpovídaly smykovým zkosením. Parciální derivace $\partial u_1/\partial x_2$ a $\partial u_2/\partial x_1$ mají obecně rozdílné hodnoty a smykové zkosení γ_{xy} je jejich součtem a je to stejná veličina jako γ_{yx}. Abychom zachovali co nejužší souvislost mezi složkami tenzoru deformace a "inženýrskými" veličinami ε a γ, položíme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{19}$$

Podle této definice jsou normálové složky ε_{11}, ε_{22} a ε_{33} přímo rovny poměrným protažením ε_x, ε_y a ε_z, ale smykové složky $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ a $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ jsou **polovinami** smykových zkosení γ_{xy}, γ_{xz} a γ_{yz}. Zahrnutí faktoru 1/2 je nutné k tomu, aby skutečně šlo o složky tenzoru. Vztah (19) znamená, že tenzor deformace je symetrickou částí gradientu posunů, což formálně můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\text{sym}} \tag{20}$$

Vztah (15) pro objemovou deformaci můžeme v tenzorovém označení přepsat jako

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{21}$$

Říkáme, že relativní změna objemu je dána stopou tenzoru deformace.

Tenzor napětí, vnější síly

Podobně jako při zavedení tenzoru deformace se nejprve zaměříme na případ, kdy je homogenní těleso rovnoměrně zdeformováno a všechny body tělesa jsou tedy namáhány stejným způsobem. Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze zavést pomocí bilineární formy $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$, která vektoru $\mathbf{a}$ popisujícímu libovolnou plošku a vektoru $\mathbf{u}$ popisujícímu posun přiřadí práci, kterou by síly působící na tuto plošku vykonaly na daném posunu. Přitom vektor $\mathbf{a}$ popisující plošku je kolmý na danou plošku a jeho velikost odpovídá jejímu obsahu. Pokud vektor $\mathbf{a}$ zafixujeme, získáme lineární formu, která každému posunu $\mathbf{u}$ přiřazuje práci vykonanou jistou silou. Takové lineární formě odpovídá vektor síly působící na plošku $\mathbf{a}$, vyjádřený jako $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Pokud za $\mathbf{a}$ dosadíme jednotkový vektor $\mathbf{n}$, bude $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ představovat tzv. vektor napětí, protože síla bude vztažena na jednotku obsahu.

V případě obecně deformovaného tělesa není síla působící na plošku myšleného řezu úměrná obsahu této plošky a napětí se definuje pro každý bod zvlášť s využitím limitního přechodu. Napětí pak má charakter tenzorového pole.

Na těleso vyplňující prostorovou oblast V mohou působit vnější síly dvojího druhu. Objemové síly jsou spojitě rozloženy po objemu tělesa a popsány vektorovým polem $\bar{\mathbf{b}}$. Velikost vektoru $\bar{\mathbf{b}}$ odpovídá intenzitě objemových sil, chápané jako síla na jednotku objemu. Objemové síly obvykle představují vlastní tíhu tělesa, ale podobný charakter mají i setrvačné síly uvažované v dynamice. Druhým typem vnějších sil jsou síly povrchové, $\mathbf{t}$, které jsou spojitě rozloženy po povrchu tělesa S (tedy po hranici oblasti V) a jejich intenzita odpovídá síle na jednotku obsahu. Tyto síly představují silové působení sousedních těles na zkoumané těleso, přenášené kontaktem na společné hranici. Na podepřené části hranice nejsou povrchové síly předem známé, protože mají charakter reakcí vznikajících ve vazbách. Na zbylé (volné) části hranice jsou pak předepsané a mají charakter zatížení. Jestliže obecnou plošku $\mathbf{a}$ uvažovanou v definici napětí umístíme na hranici a píšeme $\mathbf{a} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor kolmý na hranici a $\mathrm{d}S$ je obsah diferenciální plošky, odpovídá povrchová síla vektoru napětí a platí $\mathbf{t} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$.

Rozklad tenzoru 2. řádu na kulovou a deviatorickou část

Poznámka: V tomto textu již předjímáme určité skutečnosti, které vyplynou z domácího úkolu, např. symetrii tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ nebo definici tenzoru malé deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Ze základního kurzu pružnosti nebo z předmětu Přetváření a porušování materiálů asi víte, že deformaci lze rozdělit na část popisující změnu objemu a část popisující změnu tvaru. Podobně při popisu napětí pracujeme s jeho hydrostatickou a deviatorickou částí. Již jsme zavedli tenzory napětí a deformace a ukázali, že jde o symetrické tenzory 2. řádu. Složky tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vůči dané ortonormální bázi odpovídají klasickým složkám napětí: σ_{11} je σ_x, σ_{12} je τ_{xy}, atd.

Obecně lze symetrický tenzor 2. řádu (např. tenzor deformace nebo napětí) rozložit na kulovou (sférickou) část a deviatorickou část. Kulová část je skalárním násobkem jednotkového tenzoru 2. řádu a má stejnou stopu jako původní tenzor. Například pro tenzor napětí definujeme střední napětí jako třetinu stopy tenzoru napětí, tedy

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \tfrac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = \tfrac{1}{3}\sigma_{ii} = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \tfrac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \tfrac{1}{3}\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} \tag{22}$$

Index "m" souvisí se slovem "mean" (střední) a nejde o tenzorový index, proto je zapsán standardním fontem a nikoli kurzívou. Kulová část tenzoru napětí odpovídá hydrostatické napjatosti a získá se jako $\sigma_{\mathrm{m}}\mathbf{1}$. Po odečtení kulové části zbyde deviatorická část tenzoru. V případě tenzoru napětí ji označíme $\mathbf{s}$. Rozklad tenzoru napětí na hydrostatickou (kulovou) část a deviatorickou část se tedy zapíše jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\mathrm{m}}\mathbf{1} + \mathbf{s} \tag{23}$$

Je-li dán tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme jeho deviatorickou část vypočítat jako[2]

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{1}\sigma_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} \tag{24}$$

Abychom mohli celý výraz na pravé straně vyjádřit jako tenzor napětí zleva "vynásobený" (dvojitě kontrahovaný) nějakým tenzorem 4. řádu, napíšeme $\boldsymbol{\sigma}$ jako $\mathbf{I}_{\mathrm{S}} : \boldsymbol{\sigma}$, kde $\mathbf{I}_{\mathrm{S}}$ je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu,[3] jehož složky vůči libovolné ortonormální bázi jsou $I^S_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$. Potom můžeme přepsat (24) jako

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}_{\mathrm{S}} : \boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I}_{\mathrm{S}} - \mathbf{I}_{\mathrm{K}}) : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}_{\mathrm{D}} : \boldsymbol{\sigma} \tag{25}$$

kde

$$\mathbf{I}_{\mathrm{K}} = \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \tag{26}$$

[2] Pokud vám není jasné, proč se v rovnici (24) objeví symbol $\otimes$ pro přímý součin, přepište si tuto rovnici ve složkovém zápisu: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{\mathrm{m}} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\sigma_{kl}$. Při původním uzávorkování $\delta_{ij}(\delta_{kl}\sigma_{kl})$ jde o násobení tenzoru $\mathbf{1}$ skalárem $\mathbf{1} : \boldsymbol{\sigma}$, ale pořadí operací lze zaměnit a interpretovat tento člen jako $(\delta_{ij}\delta_{kl})\sigma_{kl}$, což odpovídá dvojité kontrakci mezi tenzorem 4. řádu $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ a tenzorem 2. řádu $\boldsymbol{\sigma}$.

[3] V celém tomto odvození bychom místo $\mathbf{I}_{\mathrm{S}}$ mohli všude použít $\mathbf{I}$. Pak by ale projekční tenzory $\mathbf{I}_{\mathrm{K}}$ a $\mathbf{I}_{\mathrm{D}}$ nevykazovaly malou symetrii a při konstrukci tenzoru tuhosti a poddajnosti s jejich využitím bychom museli provádět dodatečnou symetrizaci.

je kulový (sférický) projekční tenzor a

$$\mathbf{I}_\mathrm{D} = \mathbf{I}_\mathrm{S} - \mathbf{I}_\mathrm{K} = \mathbf{I}_\mathrm{S} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{27}$$

je deviatorický projekční tenzor. Mluvíme o projekčních tenzorech, protože násobení tenzorem $\mathbf{I}_\mathrm{K}$ odpovídá promítnutí do podprostoru odpovídajícího čistě hydrostatickým stavům a násobení tenzorem $\mathbf{I}_\mathrm{D}$ odpovídá promítnutí do podprostoru odpovídajícího čistě deviatorickým stavům. Obdobný zápis lze uplatnit i pro rozklad tenzoru deformace,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{1} + \mathbf{e} \tag{28}$$

kde kulová část, tedy $\varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{1}$, odpovídá změně objemu a deviatorická část, tedy $\mathbf{e}$, změně tvaru. Veličina ε_m je střední deformace, definovaná jako

$$\varepsilon_\mathrm{m} = \tfrac{1}{3}\mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{29}$$

Lepší názorný význam ale má její trojnásobek, neboli stopa tenzoru deformace,

$$\varepsilon_V = \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{30}$$

která odpovídá relativní změně objemu (při malých deformacích). Deviatorickou část deformace, která popisuje změnu tvaru při zachování objemu, můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_\mathrm{m}\mathbf{1} = \mathbf{I}_\mathrm{S} : \boldsymbol{\varepsilon} - \tfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I}_\mathrm{S} - \mathbf{I}_\mathrm{K}) : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_\mathrm{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{31}$$

Rozklad na kulovou a deviatorickou část má klíčový význam pro zjednodušení popisu izotropního lineárně pružného materiálu. Jestliže má materiál ve všech směrech stejné vlastnosti, způsobuje hydrostatická část napětí pouze změny objemu a deviatorická část napětí pouze změny tvaru.

Hydrostatická část napětí je charakterizovaná jedinou veličinou—středním napětím σ_m. Objemová změna je také charakterizována jedinou veličinou, přičemž jasný názorný význam má relativní změna objemu, ε_V. V případě lineární pružnosti jsou si tyto veličiny navzájem úměrné a vztah mezi nimi se popisuje rovnicí

$$\sigma_\mathrm{m} = K\varepsilon_V \tag{32}$$

kde K je objemový modul pružnosti. Pokud se však místo ε_V použije střední deformace ε_m, objeví se v rovnici

$$\sigma_\mathrm{m} = 3K\varepsilon_\mathrm{m} \tag{33}$$

konstanta úměrnosti $3K$. Díky tomu si objemový modul K ponechává svůj názorný význam poměru mezi přírůstkem středního napětí a přírůstkem relativní změny objemu. Jeho převrácené hodnotě $1/K$ se někdy říká modul stlačitelnosti. Jde o veličinu charakterizující poddajnost materiálu při objemových změnách.

Pro deviatorické části napětí a deformace lze také napsat odpovídající lineární vztah. Přestože se jedná o tenzory, ukazuje se, že stačí napsat jednoduše

$$\mathbf{s} = c\,\mathbf{e} \tag{34}$$

kde c je vhodná skalární veličina charakterizující deviatorickou tuhost. Názorný význam této veličiny si najdete sami v rámci domácího úkolu.