Univerzální principy mechaniky

Domácí cvičení 1

21. února 2020

1.1 Skalární součin vektorů

Na první přednášce byl definován skalární součin vektorů jako symetrická pozitivně definitní bilineární forma. Klasická definice z učebnic zavádí skalární součin vektorů jako binární operaci, která dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ přiřazuje reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a má následující vlastnosti:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{1}$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} \tag{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 \tag{3}$$

$$(\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{4}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{5}$$

$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \tag{6}$$

Podmínky (1)–(4) znamenají, že předpisem

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \tag{7}$$

je definována bilineární forma $\mathcal{I}$. Zjistěte, jaké složky má výše uvedená bilineární forma $\mathcal{I}$ vůči ortonormální bázi. Závisejí tyto složky na konkrétní volbě báze? Jakou maticí by byla tato forma reprezentována?

1.2 Přímý součin lineárních forem nebo vektorů

Pro lineární formy můžeme zavést operaci $\otimes$, která ze dvou daných lineárních forem f a g vytvoří bilineární formu $F = f \otimes g$, definovanou následujícím předpisem:

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u})\, g(\mathbf{v}) \tag{8}$$

Rozmyslete si nejprve, co to přesně znamená: Když chci spočítat hodnotu, kterou bilineární forma F přiřazuje dvojici vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, spočítám hodnotu lineární formy f pro vektor $\mathbf{u}$ a hodnotu lineární formy g pro vektor $\mathbf{v}$ a tyto dvě hodnoty (reálná čísla) pak mezi sebou vynásobím.

Takto definované operaci se říká přímý (vnější, tenzorový) součin. Zavedli jsme ji jako operaci mezi dvěma lineárními formami, ale z předchozích úvah už víme, že ve vektorovém prostoru vybaveném skalárním součinem každé lineární formě odpovídá jistý vektor a naopak. Proto můžeme mluvit také o přímém součinu vektorů $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$, které odpovídají formám f a g, a značit tento součin $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$. Podobně jako lineární formy chápeme podle potřeby jako vektory, o bilineárních formách budeme často mluvit jako o tenzorech 2. řádu a budeme je pak značit tučnými velkými písmeny. Například $\mathbf{F}$ může označovat tenzor 2. řádu odpovídající bilineární formě F. Píšeme pak $\mathbf{F} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$. Složkami tenzoru $\mathbf{F}$ vůči dané ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$ rozumíme složky odpovídající bilineární formy F vůči téže bázi, tedy čísla $F_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

A nyní konkrétní úkoly:

- Dokažte, že funkce F definovaná předpisem (8) má skutečně vlastnosti bilineární formy.
- Dokažte, že přímý součin $\otimes$ je asociativní, ale není komutativní.
- Dokažte, že přímý součin $\otimes$ je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů.
- Zjistěte, za jakých okolností pro dva vektory $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ platí $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{f}$.
- Odvoďte pravidlo pro výpočet složek tenzoru 2. řádu, který vznikne jako přímý součin vektorů $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ se známými složkami f_i a g_j (vůči dané ortonormální bázi).
- Interpretujte odvozené pravidlo jako maticovou operaci. Jinými slovy, ukažte, jak z matic, do kterých uspořádáme složky vektorů $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$, spočítáme matici složek tenzoru $\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$.

- Přímým součinem dvou vektorů vznikne tenzor 2. řádu. Zamyslete se nad tím, zda je možné jakýkoli tenzor 2. řádu vyjádřit jako přímý součin dvou vektorů.

Zamyslete se také nad tím, zda by bylo možné přirozeným způsobem definovat operaci $\otimes$ (přímý součin) pro jiné dvojice operandů než vektory. Jak by se například mohly definovat operace $\mathbf{g} \otimes \mathbf{F}$, $\mathbf{F} \otimes \mathbf{g}$ a $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$, kde $\mathbf{g}$ je vektor a $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ jsou tenzory 2. řádu? Co by asi bylo jejich výsledkem a jak by se tyto operace přepsaly ve složkovém zápisu, tj. pomocí složek g_i, F_{ij} a G_{ij}? Bylo by možné je snadno přepsat i do maticového zápisu?

1.3 Transformace složek tenzoru

V poznámkách k přednášce si přečtěte pasáže týkající se transformace složek vektoru při změně báze. Poté odvoďte pravidlo pro transformaci složek tenzoru 2. řádu a zobecněte je pro tenzory libovolného řádu.

Tenzor napětí jsme dosud pořádně nezavedli, ale prozatím se spokojíme s informací, že se jedná o tenzor 2. řádu. Složky tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vůči dané ortonormální bázi odpovídají klasickým složkám napětí: σ_{11} je σ_x, σ_{12} je τ_{xy}, atd. Najděte si nebo odvoďte tradiční vzorce pro transformaci složek napětí při rovinné napjatosti, dojde-li k pootočení soustavy souřadnic. Ukažte, jak tyto vzorce souvisejí s transformačními vzorci pro tenzor 2. řádu. Jelikož zkoumáme rovinnou napjatost, můžeme výchozí vektorový prostor V uvažovat jako dvourozměrný (tj. $n = 2$).