Univerzální principy mechaniky

Domácí cvičení 2

28. února 2020

Nejprve si přečtěte doplňující poznámky k probírané látce, obsažené v samostatném souboru.

2.1 Operace s tenzory

Procvičte si základní operace s tenzory na následujících příkladech. Symboly $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ označují obecné tenzory 1. řádu, $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor 2. řádu, $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ značí obecné tenzory 2. řádu, horní index T značí transpozici a tr$(\ldots)$ je stopa tenzoru.

Rozepsáním do složkového zápisu dokažte následující identity:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} && (1)\\
(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) && (2)\\
\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^T && (3)\\
(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{v} && (4)\\
\mathrm{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} && (5)\\
\mathrm{tr}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \mathbf{F} : \mathbf{G}^T = \mathbf{F}^T : \mathbf{G} && (6)\\
\mathbf{1} : (\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{F})\, \mathbf{G} && (7)\\
(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{F} &= \mathrm{tr}(\mathbf{F})\, \mathbf{1} && (8)
\end{aligned}$$

Dále zjistěte, čemu se rovná $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$ a $\mathbf{1} : \mathbf{1}$.

Ukažte, že dvojitá kontrakce hraje roli skalárního součinu v prostoru všech tenzorů 2. řádu (tj. ověřte, že má všechny vlastnosti požadované od skalárního součinu).

2.2 Rozklad na symetrickou a antisymetrickou část

Připomeňte si definici transpozice bilineární formy, která zároveň definuje transpozici tenzoru 2. řádu (viz poznámky). Tenzor $\mathbf{F}$ je symetrický, pokud platí $\mathbf{F}^T = \mathbf{F}$. Podobně hovoříme o antisymetrickém tenzoru, pokud platí $\mathbf{F}^T = -\mathbf{F}$.

Zjistěte, zda existuje tenzor, který je zároveň symetrický i antisymetrický.

Ukažte, že každý tenzor 2. řádu lze jednoznačně rozložit na součet symetrického a antimetrického tenzoru. Mluvíme pak o symetrické a antimetrické části daného tenzoru. Odvoďte jednoduché pravidlo pro jejich výpočet (např. s využitím složkového zápisu).

2.3 Tenzorový popis deformace

Prozatím budeme uvažovat pouze rovnoměrně deformované těleso, pro které se polohový vektor $\mathbf{x}$ při deformaci zobrazí na polohový vektor $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{F}$ je daný tenzor 2. řádu, v této souvislosti označovaný jako deformační gradient (přesný význam tohoto termínu bude vysvětlen později, až se budeme věnovat obecné, tedy nerovnoměrné deformaci). Názorně si můžeme představit, že bod umístěný do počátku souřadnic se nikam neposouvá (protože pro $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dostaneme $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$) a úsečka charakterizovaná obecným vektorem $\mathbf{x}$ se zobrazí na úsečku charakterizovanou vektorem $\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$. Při takové lineární transformaci prostoru zůstávají přímky i po deformaci přímkami, ale obecně se protahují nebo zkracují a úhly mezi dvěma přímkami se mění.

Představte si přímé vlákno procházející počátkem, jehož původní směr je popsán jednotkovým vektorem $\mathbf{n}$. Vyjádřete poměrné protažení ε tohoto vlákna při dané deformaci.

Návod: Na vláknu si před deformací vyznačíme úsečku o délce L, které odpovídá vektor $\mathbf{x} = L\mathbf{n}$. Pak zjistíme, jakým vektorem bude popsaná tato úsečka po deformaci, spočítáme její novou délku $L + \Delta L$ a vyjádříme poměrné protažení $\varepsilon = \Delta L/L$. Výsledkem by měl být poměrně složitý výraz, který závisí na $\mathbf{F}$ a $\mathbf{n}$.

Dále si představte dvě přímá a navzájem kolmá vlákna procházející počátkem, jejichž původní směry jsou popsány jednotkovými vektory $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$. Vyjádřete smykové zkosení γ, tedy úhel, o který se změní původně pravý úhel mezi danými vlákny.

Návod: Vzpomeňte si na vzorec pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory, zmíněný na 1. přednášce. Bude se také hodit vztah $\sin\gamma = \cos(\pi/2 - \gamma)$. *Výsledkem by měl být opět výraz, který závisí na* $\mathbf{F}$ *a* $\mathbf{n}$.

Odvozené výrazy pro poměrné protažení ε a smykové zkosení γ budou poněkud komplikované, ale zato zcela přesné a použitelné pro libovolně velké deformace. Následně je zjednodušíme za předpokladu, že deformace (přesněji řečeno deformace a rotace) jsou malé. Uvědomte si, že pokud by k žádné deformaci nedošlo, tenzor $\mathbf{F}$ by byl roven jednotkovému tenzoru 2. řádu. Budeme proto předpokládat, že tenzor $\mathbf{F}$ se od jednotkového liší jen "málo". Můžeme tedy psát $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{G}$, kde tenzor $\mathbf{G}$ je "malý" ve srovnání s jednotkovým. Pokuste se odvozené výrazy pro ε a γ přepsat pomocí tenzoru $\mathbf{G}$ a ve výsledných výrazech zanedbat všechny "členy vyššího řádu". Popište souvislost mezi složkami tenzoru $\mathbf{G}$ a obvyklými inženýrskými složkami deformace, např. ε_x a γ_{xy}.
Návod: Zjednodušené výrazy by měly mít tvar $\varepsilon = \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ *a* $\gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$, *kde* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou jisté tenzory závisející jednoduchým způsobem na* $\mathbf{G}$.