Univerzální principy mechaniky

Domácí cvičení 3

6. března 2020

Jako obvykle si nejprve přečtěte doplňující poznámky k přednášce.

3.1 Tenzor napětí

V poznámkách k přednášce byla zmíněna možná definice tenzoru napětí, chápaného jako jistá bilineární forma $\sigma(\mathbf{a}, \mathbf{u})$. Ukažte, že složky takto definované bilineární formy skutečně odpovídají známým složkám napětí σ_x, τ_{xy}, atd. V tenzorovém zápisu budou označovány jako σ_{11}, σ_{12}, atd. Připomeňte si také, proč je tenzor napětí symetrický.

3.2 Projekční tenzory

V poznámkách k přednášce byly vztahy (26)–(27) definovány projekční tenzory $\mathbf{I}_\mathrm{K}$ a $\mathbf{I}_\mathrm{D}$, pomocí nichž lze z daného tenzoru 2. řádu získat jeho kulovou část a deviátor. Ukažte (rozepsáním do složkového zápisu a úpravou), že projekční tenzory mají následující zajímavé vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_\mathrm{K} : \mathbf{I}_\mathrm{K} &= \mathbf{I}_\mathrm{K} && (1)\\
\mathbf{I}_\mathrm{D} : \mathbf{I}_\mathrm{D} &= \mathbf{I}_\mathrm{D} && (2)\\
\mathbf{I}_\mathrm{K} : \mathbf{I}_\mathrm{D} &= \mathbf{O} && (3)\\
\mathbf{I}_\mathrm{D} : \mathbf{I}_\mathrm{K} &= \mathbf{O} && (4)\\
\mathbf{I}_\mathrm{K} : \mathbf{1} &= \mathbf{1} && (5)\\
\mathbf{I}_\mathrm{D} : \mathbf{1} &= \mathbf{0} && (6)
\end{aligned}
$$

Pokuste se vysvětlit, co tyto vztahy názorně znamenají, a vysvětlete rozdíl mezi symboly $\mathbf{O}$ a $\mathbf{0}$. Dále ukažte, že pro deviátor napětí $\mathbf{s}$ platí

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_\mathrm{K} : \mathbf{s} &= \mathbf{0} && (7)\\
\mathbf{I}_\mathrm{D} : \mathbf{s} &= \mathbf{s} && (8)
\end{aligned}
$$

Dokažte také, že deviátor má vždy nulovou stopu.

3.3 Tenzorový zápis zobecněného Hookeova zákona

S využitím vztahů (33)–(34) uvedených v poznámkách k přednášce odvoďte výrazy pro tenzor pružné poddajnosti $\mathbf{C}_\mathrm{e}$ a tenzor pružné tuhosti $\mathbf{D}_\mathrm{e}$, které zprostředkují vztah mezi tenzory napětí a deformace.

Nejprve zjistěte, jaký význam má konstanta c použitá ve vztahu (34). Můžete například využít složkový zápis tohoto vztahu a zamyslet se nad tím, co představuje složka deviátoru napětí s_{12} a složka deviátoru deformace e_{12} (v jakém vztahu jsou ke klasickým složkám napětí a deformace).

Poté zkombinujte (33)–(34) se vztahy popisujícími rozklad napětí a deformace na kulovou a deviatorickou část tak, abyste dostali zobecněný Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_\mathrm{e} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (9)$$

a jeho inverzní podobu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_\mathrm{e} : \boldsymbol{\sigma} \qquad (10)$$

Výsledkem by měly být kompaktní výrazy pro tenzor pružné tuhosti $\mathbf{D}_\mathrm{e}$ a tenzor pružné poddajnosti $\mathbf{C}_\mathrm{e}$.