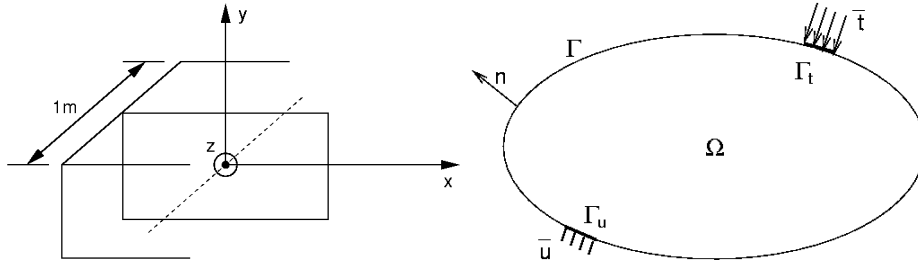


TENSOR NAPĚTÍ A DEFORMACE



Obrázek 1: Volba souřadnicového systému

Pole posunutí, deformace, napětí v materiálovém bodě

$$\{u\} = \{ u \quad v \quad w \}^T \quad (1)$$

Obecně 9 složek pole napětí lze uspořádat do matice [3x3] - TENSOR NAPĚTÍ

Pokud je těleso namáho pouze povrchoým a objemovým **silovým** zatížením (momentové zatížení není uvažováno), pak z momentových podmínek rovnováhy vyplývá, že tensor napětí je symetrický - věta o vzájemnosti smykových napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Obecně 9 složek pole deformace lze uspořádat do matice [3x3] - TENSOR DEFORMACE

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pozn. Složky tensoru, podobně jako složky vektoru, závisí na volbě souřadnicového systému.

Transformační vztah pro vektory

Mějme dva souřadnicové systémy x, y, z a x', y', z' a materiálový bod P o souřadnicích $\{x_P\} = \{x_P, y_P, z_P\}^T$. Vyjádření bodu P v potočených souřadnicích x', y', z' obdržíme aplikací transformační matice [T] ve tvaru

$$\{x_P\}' = [T] \{x_P\}. \quad (4)$$

Obdobně transformujeme vektor (tensor 1. řádu) posunutí

$$\{u\}' = [T] \{u\}. \quad (5)$$

Transformační vztah pro tensor - připomeňme transformaci tensoru setrvačnosti

Říkáme, že matice [A] typu [3x3] je tensor 2. řádu, pokud se její složky transformují podle následujícího transformačního vztahu

$$[A]' = [T]^T [A] [T]. \quad (6)$$

Pozn. - transformační matice [T] je matice ortogonální, neboť platí $[T]^{-1} = [T]^T$.

Jako příklad uvažujme transformační matici $[T]$ pro případ rovinné deformace ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vektorová reprezentace tensoru napětí a deformace

Vzhledem k symetrii tensorů napětí a deformace lze tyto veličiny přepsat do vektoru ve tvaru

$$\{\sigma\} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy} \}^T \quad (8)$$

$$\{\varepsilon\} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy} \}^T \quad (9)$$

Pozn. - poznamenejme, že

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}.$$

Hustota potenciální energie deformace W (skalár)

$$\{\sigma\} = \frac{\partial W}{\partial \{\varepsilon\}} \quad W = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \quad (10)$$

kde matice $[D]$ (obecně $[6 \times 6]$) je materiálová matice tuhosti. Vzhledem ke vztahu (10) lze ukázat, že matice tuhosti $[D] = [C]^{-1}$ je symetrická. Matici $[C]$ nazýváme maticí poddajnosti.

DEFINICE INVARIANTNÍCH MÍR POLÍ NAPĚTÍ A DEFORMACE

Operátorové matice $\{m\}$, $[P]$, $[Q]$

$$\{m\} = \{ 1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 0 \ 0 \ 0 \}^T$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Vzájemné vztahy

$$\{m\}^T [Q] \{m\} = \{m\}^T \{m\} = \frac{1}{3} \quad [P] [Q] [P] = [P] \quad [P] [Q] \{m\} = \{0\} \quad (12)$$

DEFINICE INVARIANTNÍCH MÍR POLÍ NAPĚTÍ A DEFORMACE

Pozn. - Invariantní veličina je veličina, která na rozdíl od tensorů a vektorů nezáleží na volbě souřadnicového systému.

Střední napětí σ_m

$$\sigma_m = \{\mathbf{m}\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (13)$$

Složky deviátorového pole napětí

$$\{\mathbf{s}\} = \{\sigma\} - 3\{\mathbf{m}\}\sigma_m \quad (14)$$

$$\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{P}][\mathbf{Q}]\{\sigma\} \quad (15)$$

Objemová deformace ε_v

$$\varepsilon_v = 3\{\mathbf{m}\}^T \{\sigma\} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (16)$$

Složky deviátorového pole deformace

$$\{\mathbf{e}\} = \{\varepsilon\} - \{\mathbf{m}\}\varepsilon_v \quad (17)$$

$$\{\mathbf{e}\} = [\mathbf{P}][\mathbf{Q}]\{\varepsilon\} \quad (18)$$

První invarianty tensorů deviátorových napětí a deformace I_{1s}, I_{1e}

$$I_{1s} = s_x + s_y + s_z = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (19)$$

$$I_{1e} = e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (20)$$

DEFINICE INVARIANTNÍCH MÍR POLÍ NAPĚTÍ A DEFORMACE

Druhý invariant tenzoru deviatorových napětí $J_2 = I_{2s}$

$$J_2 = I_{2s} = \frac{1}{2} \{s\}^T [Q]^{-1} \{s\} \quad (21)$$

$$J_2 = I_{2s} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [P] \{\sigma\} \quad (22)$$

Lodeův úhel θ

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \right) \right] = -\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3} I_{3s}}{2 J^3} \right) \quad (23)$$

$$J = \sqrt{J_2} \quad I_{3s} = \det [s] \quad (24)$$

Ekvivalentní míry tenzoru deviatorových napětí q, J

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \{\sigma\}^T [P] \{\sigma\}} = \sqrt{3} J \quad (25)$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

DEFINICE INVARIANTNÍCH MÍR POLÍ NAPĚTÍ A DEFORMACE

Ekvivalentní míry tensoru deviátorových deformací γ_{eq} , E_d

$$\gamma_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\{\mathbf{e}\}^T [\mathbf{Q}]^{-1} \{\mathbf{e}\}} = \left[\frac{2}{3}\{\varepsilon\}^T [\mathbf{P}] [\mathbf{Q}] [\mathbf{P}] \{\varepsilon\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$E_d = \sqrt{2\{\mathbf{e}\}^T [\mathbf{Q}]^{-1} \{\mathbf{e}\}} = [2\{\varepsilon\}^T [\mathbf{P}] [\mathbf{Q}] [\mathbf{P}] \{\varepsilon\}]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

$$\gamma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$E_d = \frac{2}{\sqrt{6}} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

$$E_d = \sqrt{3}\gamma_{eq} \quad (32)$$

Ekvivalentní míry polí napětí σ_{eq} a deformace ε_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\{\sigma\}^T [\mathbf{Q}] \{\sigma\}} \quad (33)$$

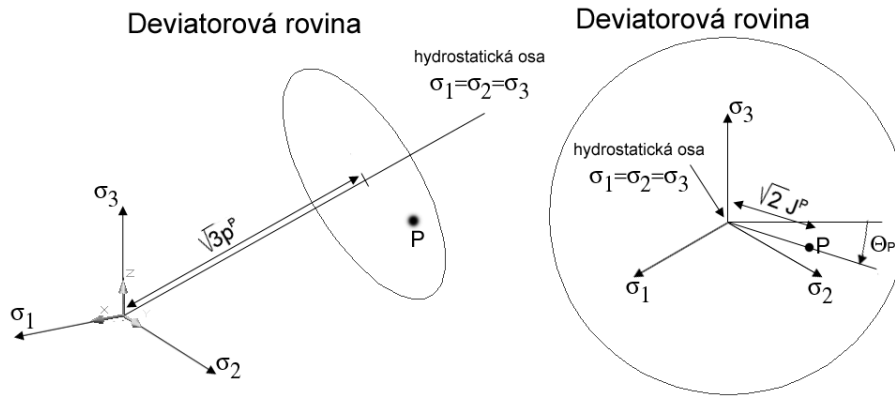
$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\{\varepsilon\}^T [\mathbf{Q}] \{\varepsilon\}} \quad (34)$$

Hustota potenciální energie deformace W (skalár)

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\sigma_{eq}\varepsilon_{eq} = \frac{1}{2}(\sigma_m\varepsilon_v + q\gamma_{eq}) = \frac{1}{2}(\sigma_m\varepsilon_v + JE_d) \quad (35)$$

HLAVNÍ NAPĚTÍ

Poloha materiálového bodu v prostoru hlavních napětí



$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_m + \frac{2}{\sqrt{3}} J \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 \sigma_2 &= \sigma_m + \frac{2}{\sqrt{3}} J \sin (\theta) \\
 \sigma_3 &= \sigma_m + \frac{2}{\sqrt{3}} J \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 \sigma_1 &> \sigma_2 > \sigma_3
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

HLAVNÍ NAPĚTÍ

Př. Určete hlavní napětí v materiálovém bodě za předpokladu rovinné deformace.

Připomeňme:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[\sigma]' = [\mathbf{T}]^T [\sigma] [\mathbf{T}] \quad (38)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Aplikací transformační matice $[\mathbf{T}]$ (rov. (39)) v rovnici (38) obržíme

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (40)$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (41)$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \quad (42)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z \quad (43)$$

HLAVNÍ NAPĚTÍ

Př. Určete hlavní napětí v materiálovém bodě za předpokladu rovinné deformace - pokračování

Tensor hlavních napětí

$$[\sigma]' = [\sigma_1] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Z podmínky $\tau'_{xy} = 0$ (rov. 42) určíme úhel α , o který je nutno potočit původní souřadnicovou soustavu x, y, z abychom přešli k hlavní souřadnicové soustavě. Připomeňme, že v rovinách, ke kterým jsou hlavní normálová napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kolmá, jsou odpovídající smyková napětí rovna nule (analogie s hlavní centrální soustavou souřadnic).

$$\text{pokud } \tau'_{xy} = 0 \text{ pak } \tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (45)$$

Dosazením do rovnic (40) a (41) obdržíme příslušná hlavní napětí. Z rovnice (41) je dále zřejmé, že σ_z je zároveň jedno z hlavních napětí. Hlavní napětí pak většinou řadíme tak, že

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

ZÁKLADNÍ ROVNICE TEORIE PRUŽNOSTI

Operátorová matice $[\partial]$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Deformační varianta teorie pružnosti

$$\begin{array}{ll} \text{Statické rovnice} & [\partial] \{\sigma\} + \{X\} = \{0\} \\ \text{Fyzikální rovnice} & \{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \\ \text{Geometrické rovnice} & \{\epsilon\} = [\partial]^T \{u\} \end{array}$$

kde $[D]$ je matice materiálové tuhosti, $\{X\}$ je vektor objemových sil a $\{\epsilon_0\}$ je vektor počátečních deformací.

Poznámka 1: Je zřejmé, že tento postup vede na soustavu parciálních diferenciálních rovnic v proměnných x, y pro neznámé prvky vektoru posunutí u, v . Prvky vektoru posunutí představují tzv. primární neznámé. Složky vektoru deformace jsou pak následně odvozeny z geometrických rovnic a složky vektoru napětí z rovnic fyzikálních.

FYZIKÁLNÍ ROVNICE - předpokládejme isotropní materiál

1. $\{\sigma\}$ vs. $\{\varepsilon\}$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (47)$$

2. $\{s\}$ vs. $\{e\}$

$$\{s\} = 2G [Q]^{-1} (\{e\} - \{e_0\}) \quad (48)$$

3. σ_m vs. ε_v (charakterizují objemové přetváření materiálu)

$$\sigma_m = K(\varepsilon_v - \varepsilon_{v0}) \quad (49)$$

3. J vs. E_d a q vs. γ_{eq} (charakterizují tvarové přetváření materiálu)

$$J = GE_d \quad q = G\gamma_{eq} \quad (50)$$

E = Youngův modul pružnosti

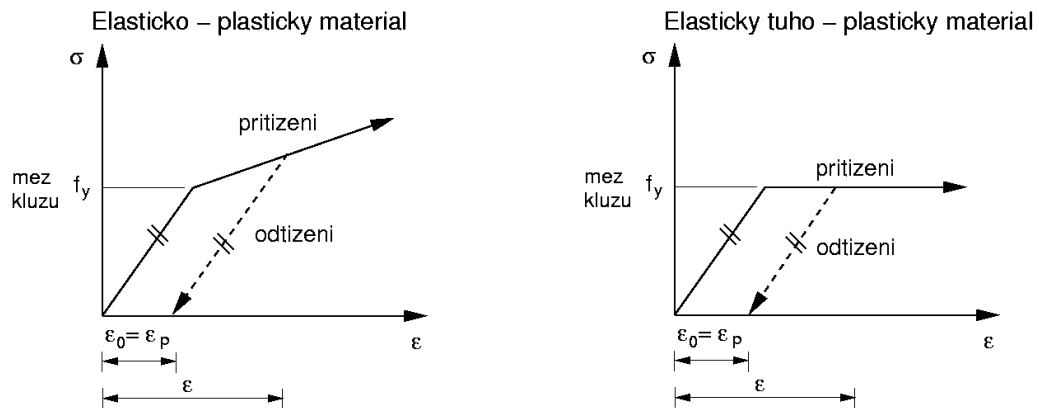
ν = Poissonovo číslo

G = modul pružnosti ve smyku = $\frac{E}{2(1 + \nu)}$

K = objemový modul = $\frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{GE}{3(3G - E)}$

NELINEÁRNÍ - ELASTOPLASTICKÉ - CHOVÁNÍ MATERIÁLU

V určitých bodech tělesa je materiál zatěžován nad počáteční mez kluzu. Vztah mezi napětím a deformací v takovém případě již není lineární a závisí na dráze zatěžování. Neplatí princip superpozice zatěžovacích stavů. Chování materiálu je často idealizováno bilineární závislostí mezi napětím a deformací.



Obrázek 2: Idealizace skutečného chování materiálu

Fyzikální rovnice

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_p\}) \quad (51)$$

NELINEÁRNÍ - ELASTOPLASTICKÉ - CHOVÁNÍ MATERIÁLU

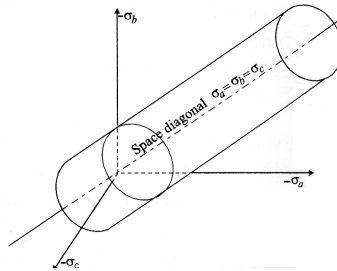
Podmínka plasticity - plocha v prostoru napětí - tvoří hranici mezi elastickým a plastickým stavem napětí. Nelineární chování materiálů je obecně popsáno různými podmínkami plasticity. Pro kovy se uplatňuje tzv. von Misesova podmínka plasticity dána vztahem (stejné chování v tahu i tlaku, zanedbatelná objemová plastická deformace - pouze změna tvaru)

$$F(\{\sigma\}, k) = J - k = 0 \quad (52)$$

Parametr k určíme z jednoosé tahové zkoušky pevnosti. Za předpokladu jednoosé tahové zkoušky obržíme tensor napětí ve tvaru

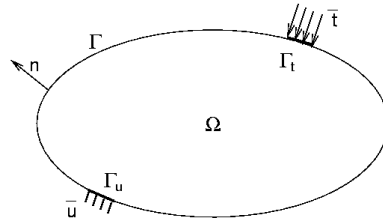
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x = f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Z rovnic (22) a (24)₁ pak přímo plyne $k = f_y/\sqrt{3}$.



PRINCIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ - OBECNÝ PRINCIP ROVNOVÁHY

Poznamenejme, že program GEO MKP je založen na deformační variantě metody konečných prvků. Geometrické rovnice a kinematické okrajové podmínky jsou v takovém případě splněny přesně. Statické rovnice (podmínky rovnováhy) jsou splněny v průměru s určitou vahou → ve smyslu principu virtuálních posunutí.



Obrázek 3: Těleso Ω s hranicí Γ

Kinematické okrajové podmínky

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad \text{na } \Gamma_u \quad (54)$$

Statické okrajové podmínky

$$[n] \{\sigma\} = \{\bar{t}\} \quad \text{na } \Gamma_t \quad (55)$$

Princip virtuálních posunutí - obecný princip rovnováhy

$$\int_{\Omega} \delta\{u\}^T ([\partial] \{\sigma\} + \{X\}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\{u\}^T (-[n] \{\sigma\} + \{\bar{t}\}) d\Omega = 0 \quad (56)$$

Platí pro všechny kinematicky přípustné složky virtuálního pole posunutí $\delta\{\mathbf{u}\}$. Použitím věty o integrování per partes (Greenova věta) a s uvážením $\delta\{\mathbf{u}\} = \{0\}$ na Γ_u lze předchozí rovnici převést na tvar

$$\int_{\Omega} \delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{X}\} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\bar{\mathbf{t}}\} d\Gamma \quad (57)$$

PVp:

Virtuální práce sil vnitřních se rovná virtuální práci sil vnějších.