

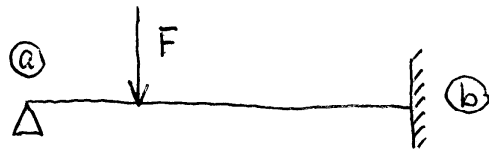
Deformační metoda

Příklady

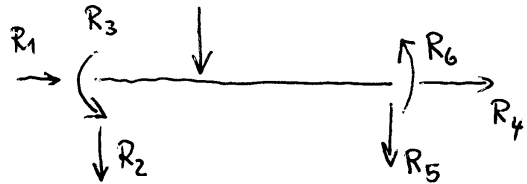
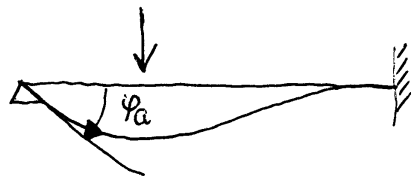
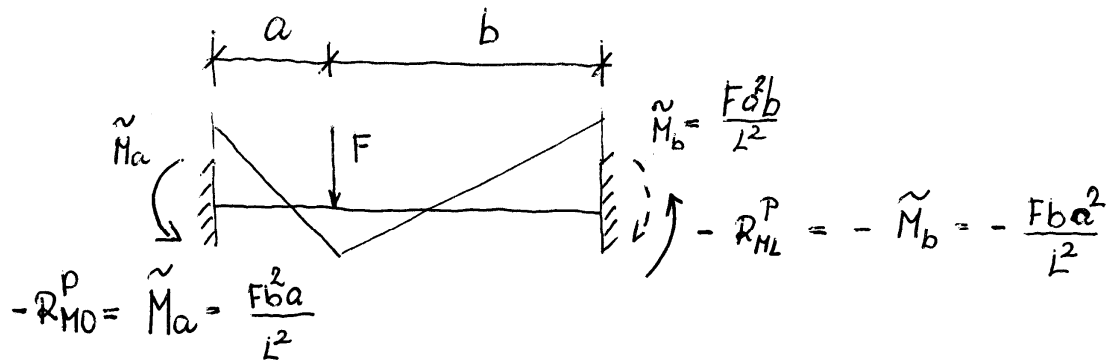
Příklad 1. – výpočet natočení užitím momentové podmínky rovnováhy ve styčnicku *a*, osamělá síla

Pr. 1

r. 179



$$\{R\} = -\{R_p\} + \{K\}\psi$$



$$\varphi_a = -\varphi_b = -\varphi_1$$

$$R_3 = \boxed{0} = \frac{Fba^2}{L^2} + 4 \frac{EI_y}{L} \varphi_1 \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \frac{-Fba^2}{4EI_y L}}$$

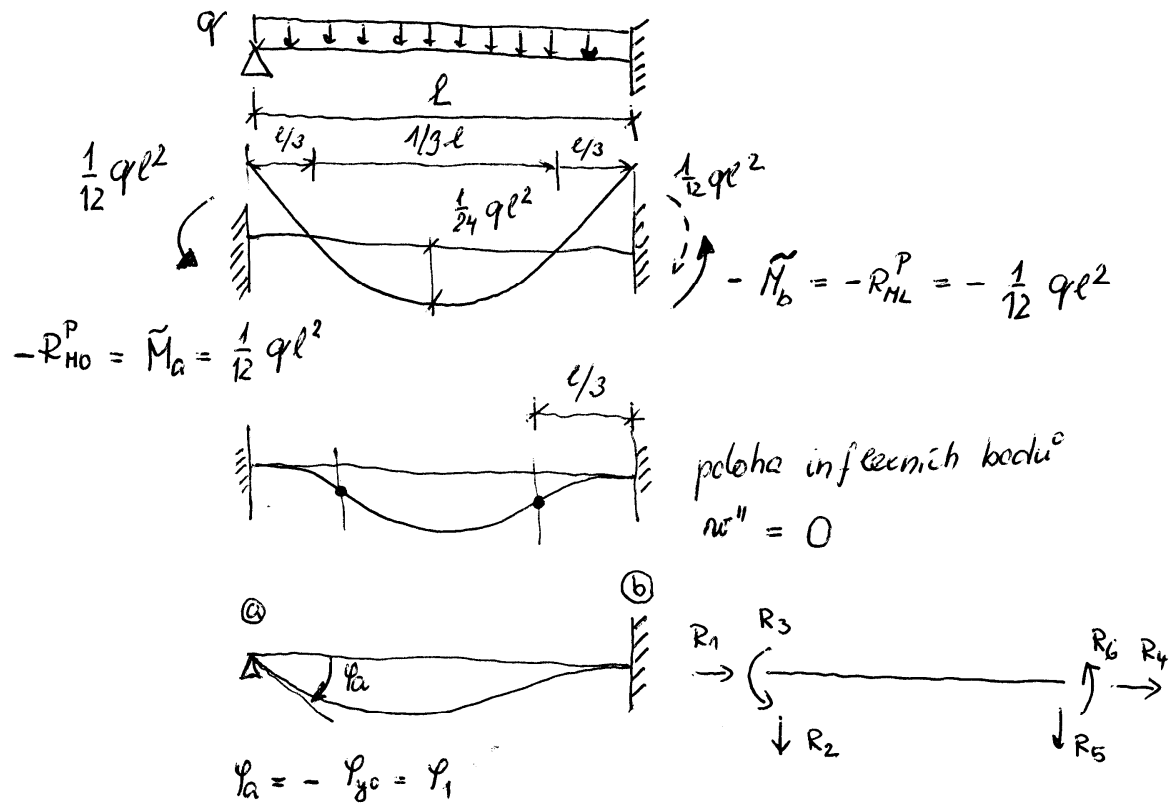
$$R_6 = M_b = -\tilde{M}_b + \frac{2EI_y}{L} \varphi_1 \Rightarrow$$

$$M_b = -\frac{Fba^2}{L^2} - \frac{Fba^2}{2L^2} = \boxed{\left(\tilde{M}_b + \frac{1}{2} \tilde{M}_a \right)}$$

$$R_1 = R_4 = 0$$

R_2, R_5 – z podmínek rovnováhy

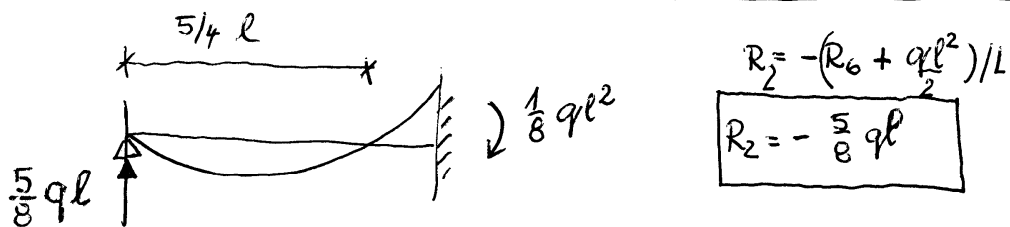
Příklad 2. – výpočet natočení užitím momentové podmínky rovnováhy ve styčnicku a , spojitě rovnoměrné zatížení



$$R_3 = 0 = \frac{1}{12} ql^2 + \frac{4EI_y}{l} \varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{ql}{48EI_y}$$

$$R_6 = M_b = -\tilde{M}_b + \frac{2EI_y}{l} \varphi_1$$

$$= -\frac{1}{12} ql^2 - \frac{1}{24} ql^2 = -\frac{1}{8} ql^2 = -\left(\tilde{M}_b + \frac{1}{2} \tilde{M}_a\right)$$

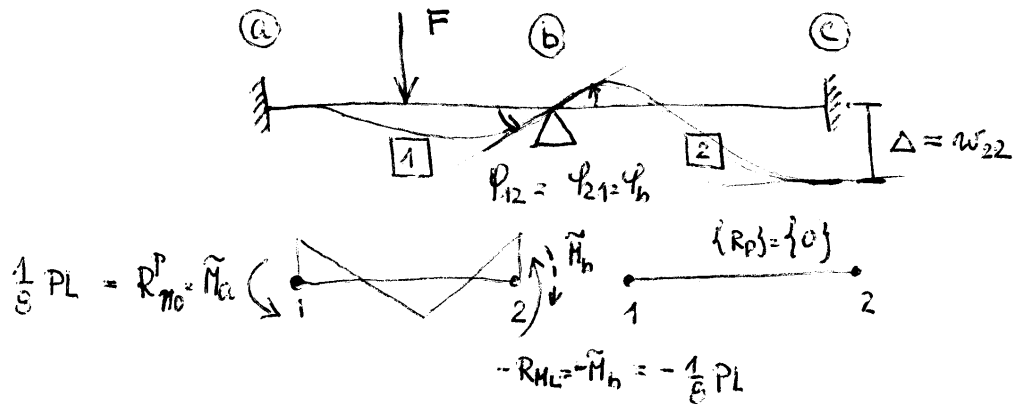


$$M(x) = \frac{5}{8} qlx - \frac{qx^2}{2}$$

$$M=0 = \frac{qx}{2} \left(\frac{5}{4}l - x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{5}{4}l \end{cases}$$

Příklad 3. – výpočet natočení užitím momentové podmínky rovnováhy ve styčnicku b ,
vliv popuštění podpor

Pr.



1. prut $M_{ba} = -\tilde{M}_b + \frac{4EI_y}{L} \varphi_b$

2. prut $M_{bc} = 0 + \frac{4EI_y}{L} \varphi_b + \frac{6EI_y}{L^2} \Delta$

$\sum M_{bi} = 0$ podmínka rovnováhy
ve styčnicku

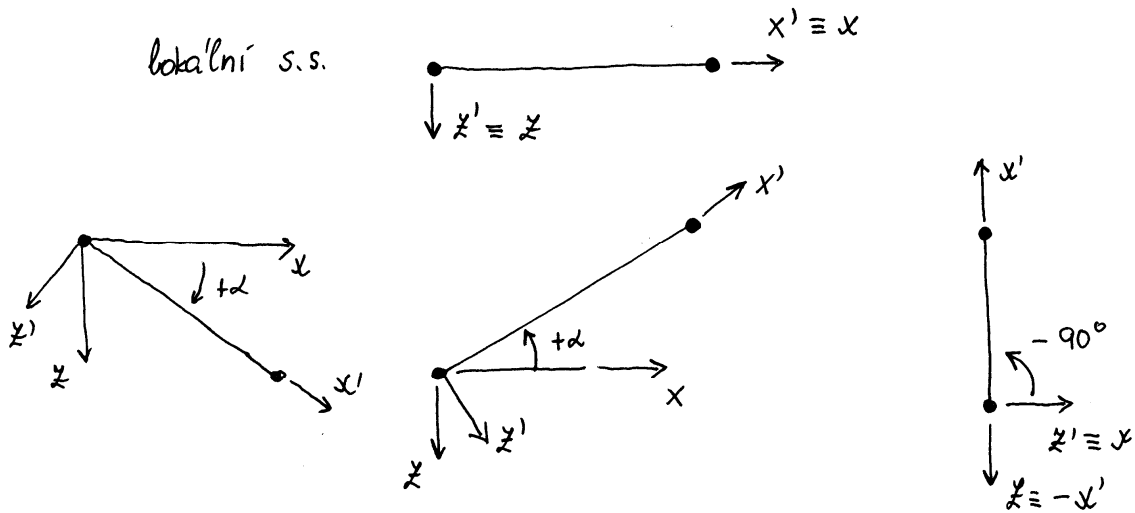
$$-\frac{1}{8} PL + \frac{6EI_y}{L^2} \Delta = -\frac{8EI_y}{L} \varphi_b$$

$$\varphi_b = \frac{1}{64} \frac{PL^2}{EI} - \frac{3}{4} \frac{\Delta}{L}$$

Dopóítejte a vykreslete průběhy vnitřních sil

Transformace souřadnic

(A) Transformace souřadnic



$$\begin{Bmatrix} x' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}$$

$[T]$

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ z' \end{Bmatrix}$$

$$[T]^T = [T]^{-1}$$

(B) Transformace sil a styčnickových deformací

$$\begin{Bmatrix} R_N \\ R_Q \\ R_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_N \\ R_Q \\ R_M \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

$[T]$

Transformace souřadnic – pokračování

© Transformace matice tuhosti

Energie vnitřních sil na pružku – invariant

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_0^l \sigma^T \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \{r\}^T \{R\} = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \sigma'^T \epsilon' \, dV = \frac{1}{2} \{r'\}^T \{R'\} = \frac{1}{2} \{r'\}^T [K'] \{r'\}
 \end{aligned}$$

$$\{r\}^T [K] \{r\} = \{r'\}^T [K'] \{r\}$$

$$\{r'\} = [T] \{r\}$$

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} u_1' \\ w_1' \\ \varphi_1' \\ u_2' \\ w_2' \\ \varphi_2' \end{array} \right\} = \overbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} c & s & 0 & & & \\ -s & c & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & c & s & 0 \\ 0 & & & -s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}^{[T]} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\{r'\}^T = \{r\}^T [T]^T$$

$$\{r\}^T [K] \{r\} = \{r'\}^T [T]^T [K'] [T] \{r\}$$

$$[K] = [T]^T [K'] [T]$$

Transformace souřadnic – pokračování

Prut

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Příhradka

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = T^T K' T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\sin^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \cos^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\sin^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

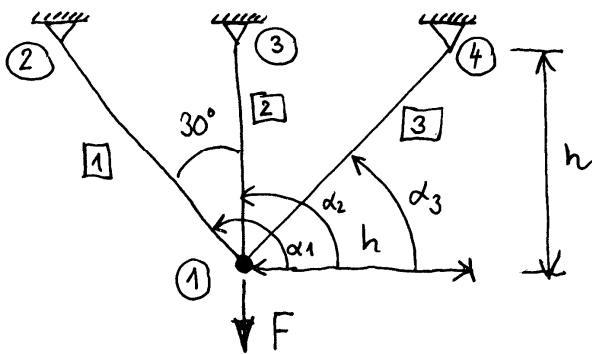
Transformace souřadnic – pokračování

$$s = \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha$$

(4)

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{EA c^2}{L} + \frac{12EI s^2}{L^3} & \frac{EA c s}{L} - \frac{12EI c s}{L^3} & \frac{6EI s}{L^2} & -\frac{EA c^2}{L} - \frac{12EI s^2}{L^3} & -\frac{EA c s}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & \frac{6EI s}{L^2} \\ \frac{EA s^2}{L} + \frac{12EI c^2}{L^3} & \frac{EA s c}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{6EI c}{L^2} & -\frac{EA c s}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{EA s^2}{L} - \frac{12EI c^2}{L^3} & -\frac{6EI c}{L^2} \\ 4EI & \frac{6EI c}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI s}{L^2} & \frac{6EI c}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA c^2}{L} - \frac{12EI s^2}{L^3} & \frac{EA c s}{L} - \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{6EI s}{L^2} & \frac{EA c^2}{L} + \frac{12EI s^2}{L^3} & -\frac{EA c s}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{6EI s}{L^2} \\ \frac{EA s^2}{L} + \frac{12EI c^2}{L^3} & \frac{EA s c}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & \frac{6EI c}{L^2} & -\frac{EA c s}{L} + \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{EA s^2}{L} - \frac{12EI c^2}{L^3} & \frac{6EI c}{L^2} \\ 4EI & \frac{6EI c}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{EA c^2}{L} - \frac{12EI s^2}{L^3} & \frac{EA c s}{L} - \frac{12EI c s}{L^3} & -\frac{6EI s}{L^2} \end{bmatrix}$$

Příklad 4. – Určení normálových sil staticky neurčité příhradové konstrukce



$$K_i^e = \frac{EA}{L_i} \begin{bmatrix} c^2 \alpha_i & \frac{1}{2} s 2\alpha_i & -c^2 \alpha_i & -\frac{1}{2} s 2\alpha_i \\ s^2 \alpha_i & -\frac{1}{2} s 2\alpha_i & -s^2 \alpha_i & \frac{1}{2} s 2\alpha_i \\ c^2 \alpha_i & \frac{1}{2} s 2\alpha_i & & \\ s^2 \alpha_i & & & \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = -120^\circ$$

$$\alpha_2 = -90^\circ$$

$$\alpha_3 = -45^\circ$$

$$\cos \alpha_i = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$\sin \alpha_i = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

c · s
0,433
+0
-0,5

prut \bar{i}	α_i	L_i	$\cos \alpha_i$	$\sin \alpha_i$	c^2	s^2
1	-120°	$1,155h$	$-0,5$	$-0,866$	$0,25$	$0,75$
2	-90°	h	0	-1	0	1
3	-45°	$1,41h$	$0,707$	$-0,707$	$0,5$	$0,5$

Příklad 4. – pokračování

$$[K_1] = \frac{EA}{1,155h}$$

u_1	w_1	u_2^0	w_2^0
0,25	0,433	-0,25	-0,433
0,433	0,75	-0,433	-0,75
		0,25	0,433
			0,75

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2=0 \\ w_2=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1x}^1 \\ R_{1z}^1 \\ R_{4x}^1 \\ R_{4z}^1 \end{pmatrix}$$

$$[K_2] = \frac{EA}{h}$$

u_1	w_1	u_3^0	w_3^0
0	0	0	0
0	1	0	-1
		0	0
			1

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_3=0 \\ w_3=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1x}^2 \\ R_{1z}^2 \\ R_{4x}^2 \\ R_{4z}^2 \end{pmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{EA}{1,414h}$$

u_1	w_1	u_4^0	w_4^0
0,5	-0,5	0,5	0,5
-0,5	0,5	0,5	0,5
		0,5	-0,5
			0,5

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_4=0 \\ w_4=0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1x}^3 \\ R_{1z}^3 \\ R_{4x}^3 \\ R_{4z}^3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. – pokračování

Podmínka ekvivalence pro stycník ①

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \sum R_{ix} = 0 \\ 2. \quad \sum R_{iz} = F \end{array} \right\} = u_1, w_1$$

$$1. \quad (K_{11}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3) u_1 + (K_{12}^1 + K_{12}^2 + K_{12}^3) w_1 = 0$$

$$2. \quad (K_{12}^1 + K_{12}^2 + K_{12}^3) u_1 + (K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3) w_1 = F$$

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^1 + K_{12}^2 + K_{12}^3 \\ \hline \text{sym} & K_{22}^1 + K_{22}^2 + K_{22}^3 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

$$[K]_K$$

$$\{r_k\} = \{F\}$$

$$\frac{EA}{h} \left[\begin{array}{c|c} 0,57 & 0,02 \\ \hline 0,02 & 2,00 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,02 \\ 0,5 \end{Bmatrix} \cdot \frac{Fh}{EA}$$

Příklad 4. – pokračování

Vnitřní síly

$$R_{1x}^1 = (0,25 u_1 + 0,433 w_1) \frac{EA}{1,155h} = 0,184 F$$

$$R_{1z}^1 = (0,433 u_1 + 0,75 w_1) \frac{EA}{1,155h} = 0,318 F$$



$$R_{1x}^2 = 0$$

$$R_{1z}^2 = + \frac{EA}{h} \cdot w_2 = 0,5 F$$

$$R_{1x}^3 = (0,5 u_1 - 0,5 w_2) \frac{EA}{1,414h} = -0,183 F$$

$$R_{1z}^3 = (-0,5 u_1 + 0,5 w_2) \frac{EA}{1,414h} = 0,183 F$$

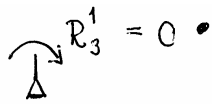
$$N_1 = - R_1^1 = 0,367 F$$
$$N_2 = - R_1^2 = 0,5 F$$
$$N_3 = - R_1^3 = 0,259 F$$

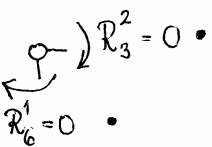
$$\begin{Bmatrix} R_{1x}^1 \\ R_{1z}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1z} \end{Bmatrix}$$

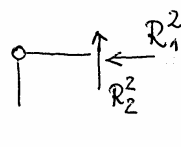
1. prut $R_{1x}^1 = (-0,5 * 0,184 - 0,866 * 0,318) F = -0,367 F$

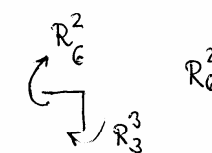
$R_{1z}^1 = (0,866 * 0,184 - 0,5 * 0,318) F = 0$ ✓

Příklad 5. – Podmínky ekvivalence ve styčnicích

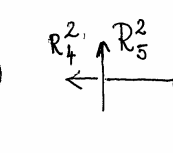
①  $R_3^1 = 0$

②  $R_6^1 = 0$, $R_3^2 = 0$

 R_1^2 , R_2^2

③  R_6^2 , R_3^3

$R_6^2 + R_3^3 = 0$

 R_4^2 , R_5^2

$[K_g^k] (8 \times 8)$

	ψ_1	u_2	w_2	ψ_{21}	ψ_{22}	u_3	w_3	ψ_3
④ ψ_1	k_{33}^1	k_{34}^1	k_{35}^1	k_{36}^1	0	0	0	0
	k_{34}^1	$k_{44}^1 + k_{11}^2$	$k_{45}^1 + 0$	$k_{46}^1 + 0$	0	k_{14}^2	0	0
	k_{35}^1	k_{45}^1	$k_{55}^1 + k_{22}^2$	k_{56}^1	k_{23}^2	0	k_{25}^2	k_{26}^2
④ ψ_{21}	k_{36}^1	k_{46}^1	k_{56}^1	k_{66}^1	0	0	0	0
④ ψ_{22}	0	0	k_{23}^2	0	k_{33}^2	0	k_{35}^2	k_{36}^2
	0	k_{14}^2	0	0	k_{11}^3	k_{12}^3	k_{13}^3	
	0	0	k_{25}^2	0	k_{35}^2	k_{12}^3	k_{22}^3	k_{23}^3
	0	0	k_{26}^2	0	k_{36}^2	k_{13}^3	k_{23}^3	k_{33}^3

$\left. \begin{matrix} \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ u_3 \\ w_3 \\ \psi_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ R_2^{p2} \\ 0 \\ R_3^{p2} \\ 0 \\ R_5^{p2} \\ R_6^{p2} \end{matrix} \right.$

• $\psi_1, \psi_{21}, \psi_{22}$ – stupně volnosti příslušné pouze daným prvkům (prutům)

ψ_1, ψ_{21} – prvek 1
 ψ_{22} – prvek 2

Příklad 5. – Kondenzace

prut 1

$$k_{33}^1 \varphi_1 + k_{34}^1 u_2 + k_{35}^1 w_2 + k_{36}^1 \varphi_{21} = 0$$

$$k_{36}^1 \varphi_1 + k_{46}^1 u_2 + k_{56}^1 w_2 + k_{66}^1 \varphi_{21} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_{33}^1 & k_{36}^1 \\ k_{36}^1 & k_{66}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_{34}^1 u_2 - k_{35}^1 w_2 \\ -k_{46}^1 u_2 - k_{56}^1 w_2 \end{Bmatrix}$$

⇓

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1(u_2, w_2) \\ \varphi_{21} &= \varphi_{21}(u_2, w_2) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{do } K_g^1 \Rightarrow \bar{K}_g^1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^1 & \bar{k}_{12}^1 \\ \bar{k}_{12}^1 & \bar{k}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

prut 2

$$k_{23}^2 w_2 + \varphi_{22} k_{33}^2 + k_{35}^2 w_3 + k_{36}^2 \varphi_3 = R_3^{P2}$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{22}(w_2, w_3, \varphi_3) = (R_3^{P2} - k_{23}^2 w_2 - k_{35}^2 w_3 - k_{36}^2 \varphi_3) / k_{33}^2$$

↑
moment ve větknuti u 1 → R_3^{P2}

připomeníme MT prvku

$$\varphi_{22} = \left(\frac{6EI}{L^2} w_2 - \frac{6EI}{L^2} w_3 - \frac{2EI}{L} \varphi_3 \right) \cdot \frac{L}{4EI} - R_3^{P2} \cdot \frac{L}{4EI}$$

$$(*) \quad \varphi_{22} = \frac{3}{2} \frac{1}{L} w_2 - \frac{3}{2} \frac{1}{L} w_3 - \frac{1}{2} \varphi_3 - R_3^{P2} \frac{L}{4EI} \rightarrow K_g^2 \Rightarrow \bar{K}_g^2$$

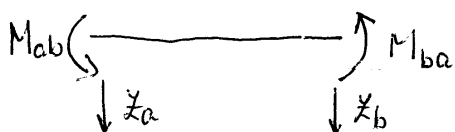
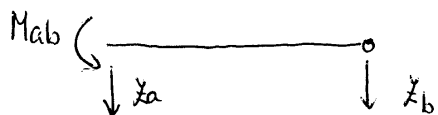
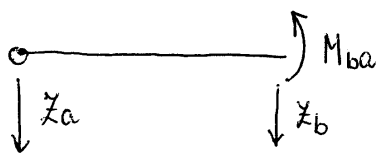
$$\begin{bmatrix} \bar{K}_g^2 \\ (5 \times 5) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \{ \bar{R}_p \} + \{ R \}$$

Příklad 5. – pokračování - poznámka

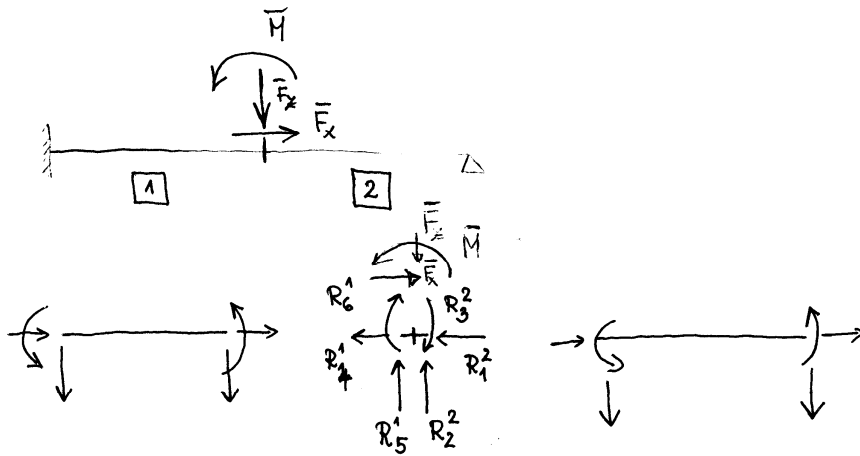
rovnice (**) lze použít i v případě rámových konstrukcí s ortogonálním uspořádáním prutů
zanedbáme-li slábění těchto prutů: $\Delta L = u_2^e - u_1^e = 0$
Tím přejdeme k tzv. zjednodušené deformační metodě.
ZDM

Svislé koncové síly

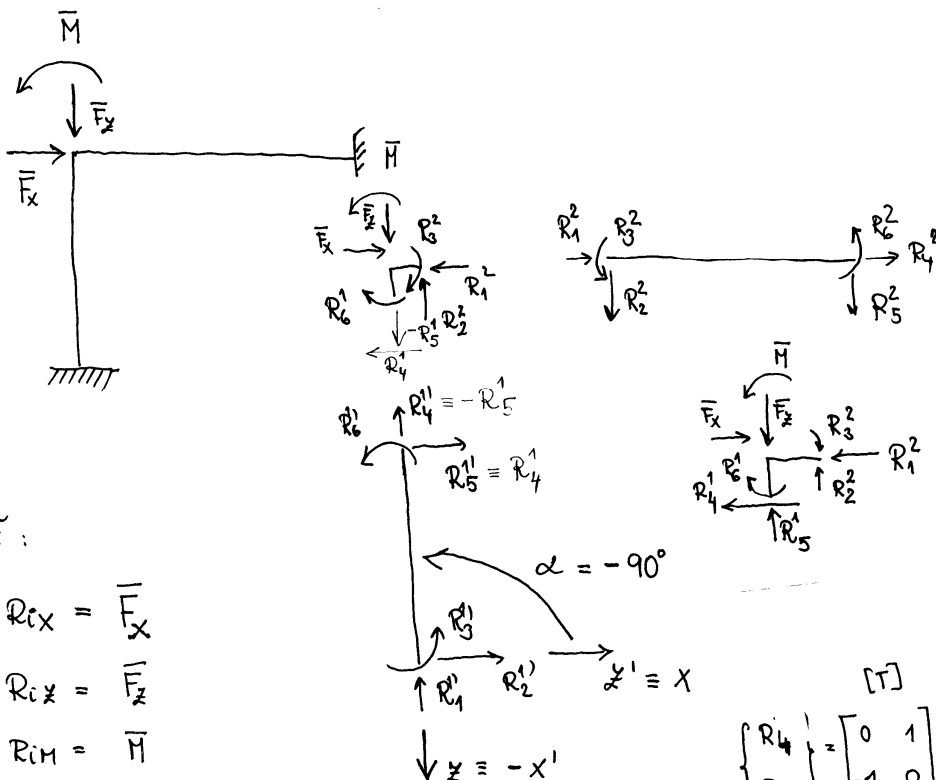
z podmínek rovnováhy



Styčnickové zatížení



$$\left. \begin{aligned} \sum R_{ix} &= R_4^1 + R_1^2 = \bar{F}_x \\ \sum R_{iz} &= R_5^1 + R_2^2 = \bar{F}_z \\ \sum R_{iM} &= R_6^1 + R_3^2 = \bar{M} \end{aligned} \right\} \text{podmínky ekvivalence}$$



obečně :

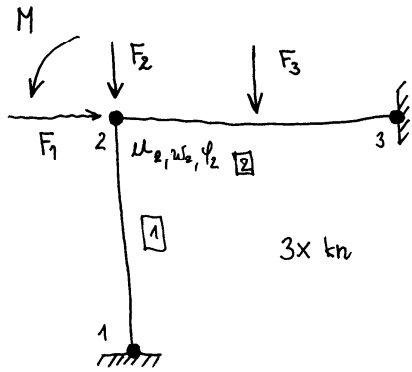
$$\begin{aligned} \sum R_{ix} &= \bar{F}_x \\ \sum R_{iz} &= \bar{F}_z \\ \sum R_{iM} &= \bar{M} \end{aligned}$$

$$[T] \begin{Bmatrix} R_4^1 \\ R_5^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_4^{11} \\ R_5^{11} \end{Bmatrix}$$

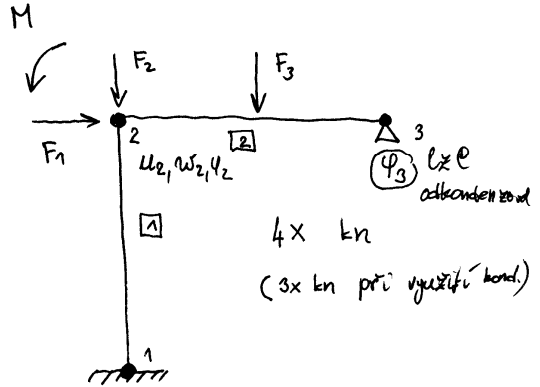
koncové síly v g.s.s. vyjadřujeme pomocí kone. sil v l.s.s.

Plná DM vs. ZDM

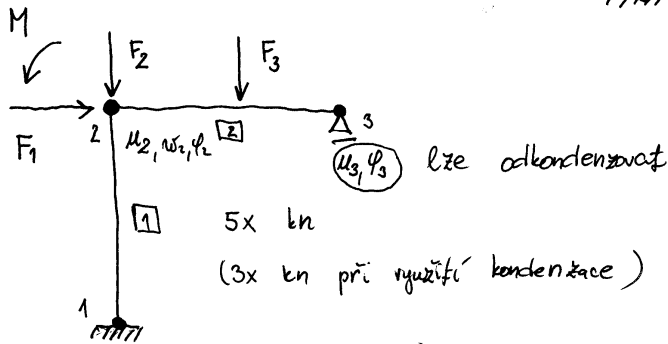
DM



3x kn



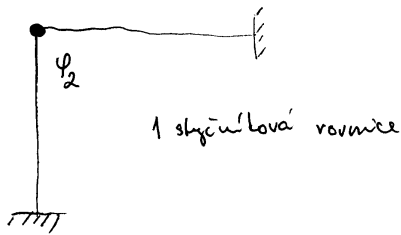
4x kn
(3x kn při využití kondenzace)



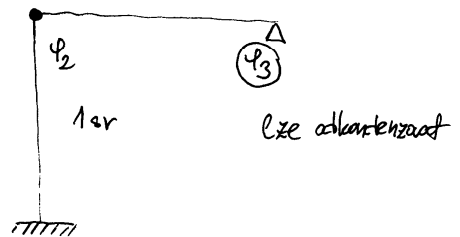
5x kn
(3x kn při využití kondenzace)

ZDM

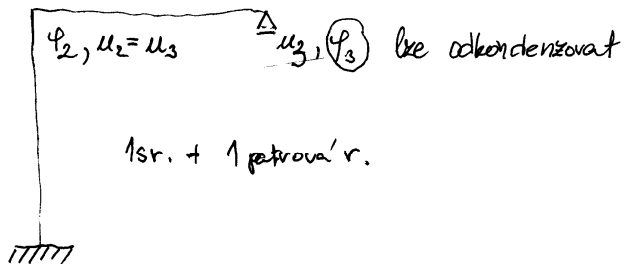
prut je neslavitelný



1 stejná rovnice

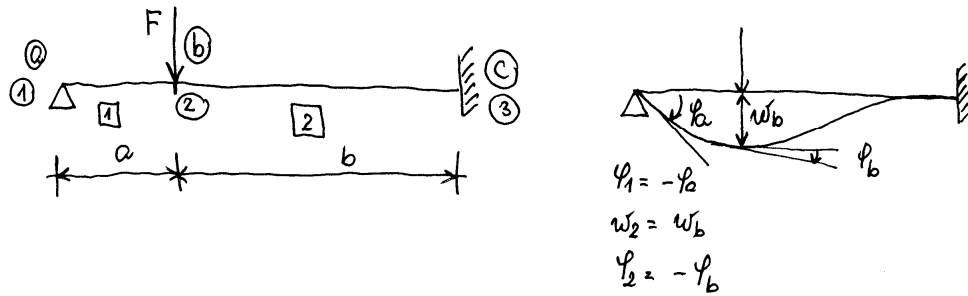


lze odkondenzovat



1sr. + 1 potrova' r.

Příklad 6. – Řešte Př. 1 využitím styčnickového zatížení



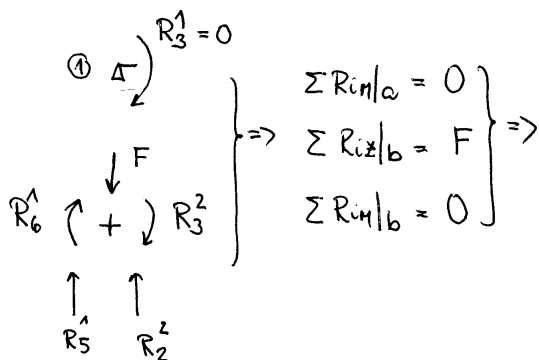
Prut 1

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & \frac{6EI}{a^2} & -\frac{2EI}{a} \\ -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & \frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} \\ -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1=0 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_5^1 \\ R_6^1 \end{Bmatrix}$$

Prut 2

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} & & \\ -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3=0 \\ \varphi_3=0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_5^2 \\ R_6^2 \end{Bmatrix}$$

MT konstrukce ← z podmínek ekvivalence v jednotlivých styčnicích



$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{a} & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{6EI}{a^2} & \frac{12EI}{a^3} + \frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} \\ \frac{2EI}{a} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[K_R]$ – matice tuhosti konstrukce

Příklad 6. – pokračování

Řešení:

$$\varphi_1 = - \frac{Fb^2a}{4EI L} \quad \text{viz Příklad}$$

$$w_2 = \frac{Fa^2b^3(3b+4a)}{12EI(3ab^2+3a^2b+b^3+a^3)}$$

$$\varphi_2 = - \frac{Fab^2(b^2-2a^2)}{4EI(3ab^2+3a^2b+b^3+a^3)}$$

Koncové síly z podmínek rovnováhy

kontrola:

1. rovnice:
$$\frac{4EI}{a} \varphi_1 + \frac{6EI}{a^2} w_2 + \frac{2EI}{a} \varphi_2 = 0$$

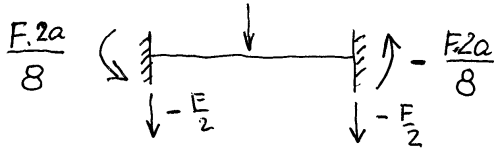
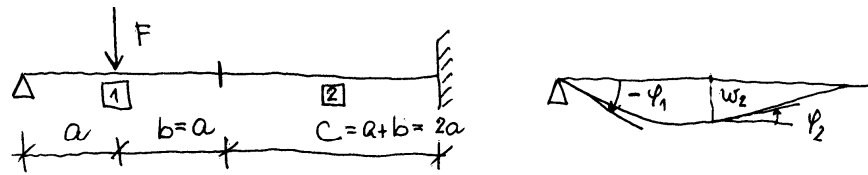
$$\varphi_1 = \left(- \frac{6EI}{a^2} w_2 - \frac{2EI}{a} \varphi_2 \right) \frac{a}{4EI}$$

statická kondenzace

řešení na úrovni prvku \rightarrow snížení řádku

globální matice tuhosti konstrukce

Příklad 7. – Řešte Př. 1 za předpokladu rozdělení konstrukce na více prvků



Prvek 1

$$\begin{bmatrix}
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & \frac{4EI}{2a} & \frac{6EI}{4a^2} & \frac{2EI}{2a} & \\
 & & \frac{6EI}{4a^2} & \frac{12EI}{8a^3} + \frac{6EI}{4a^2} & \frac{6EI}{4a^2} & \\
 & & \frac{2EI}{2a} & \frac{6EI}{4a^2} & \frac{4EI}{2a} & \\
 & & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 w_1=0 \\
 \varphi_1 \\
 w_2 \\
 \varphi_2
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 -\frac{F}{2} \\
 \frac{F \cdot 2a}{8} \\
 -\frac{F}{2} \\
 -\frac{F \cdot 2a}{8}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 R_2^1 \\
 R_3^1 \\
 R_5^1 \\
 R_6^1
 \end{pmatrix}$$

Prvek 2

$$\begin{bmatrix}
 \frac{12EI}{c^3} & -\frac{6EI}{c^2} & & & & \\
 -\frac{6EI}{c^2} & \frac{4EI}{c} & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 w_2 \\
 \varphi_2 \\
 w_3=0 \\
 \varphi_3=0
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 R_2^2 \\
 R_3^2 \\
 R_5^2 \\
 R_6^2
 \end{pmatrix}$$

MT konstrukce

$$\left. \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \Delta \downarrow R_3^1 = 0 \\
 \textcircled{2} R_6^1 \left(\begin{array}{l} + \\ \uparrow \end{array} \right) R_6^2 \\
 \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 R_5^1 \quad R_2^2
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l}
 \sum R_{im}|a=0 \\
 \sum R_{iz}|b=0 \\
 \sum R_{im}|b=0
 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{2a} & \frac{6EI}{4a^2} & \frac{2EI}{2a} \\
 \frac{6EI}{4a^2} & \frac{12EI}{8a^3} + \frac{12EI}{c^3} + \frac{6EI}{4a^2} & \frac{6EI}{4a^2} \\
 \frac{2EI}{2a} & \frac{6EI}{4a^2} - \frac{6EI}{c^2} & \frac{4EI}{2a} + \frac{4EI}{c}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \varphi_1 \\
 w_2 \\
 \varphi_2
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -\frac{Fa}{4} \\
 \frac{F}{2} \\
 \frac{Fa}{4}
 \end{pmatrix}$$

Příklad 7. – pokračování

Řešení :

$$\varphi_1 = - \frac{Fa (c^2 + 2ac + a^2)}{4EI (2a + c)}$$

$$w_2 = \frac{Fa^2c^2 (9a^2 + 11ac + 3c^2)}{6EI (6ac^2 + 12a^2c + c^3 + 8a^3)}$$

$$\varphi_2 = \frac{Fac (12a^3 + 11a^2c - c^3)}{4EI (6ac^2 + 12a^2c + c^3 + 8a^3)}$$

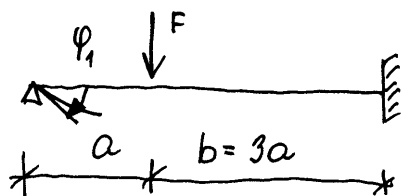
Porovnání s příkladem 1

pokud $c = 2a \Rightarrow b = 3a$ dostaneme

$$\varphi_1 = - \frac{9Fa^2}{16EI} \quad (L = 4a)$$

připomeneme Pr. 1 $\varphi_1 = - \frac{Fb^2a}{4EIL}$

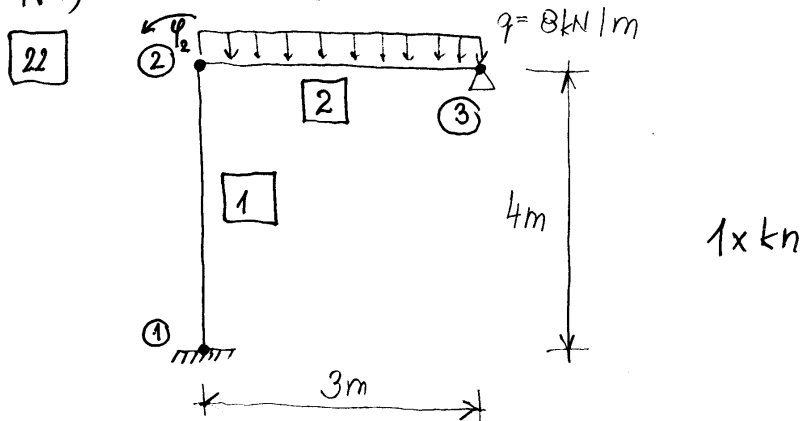
Pr. 1



$$\varphi_1 = - \frac{9Fa^2}{16EI}$$

Příklad 8. – Určete vnitřní síly na dané konstrukci. Řešte zjednodušenou deformační metodou

Pr.) Řešte zjednodušenou metodou \hat{ZDM}



$$r = \{\psi_2\}$$

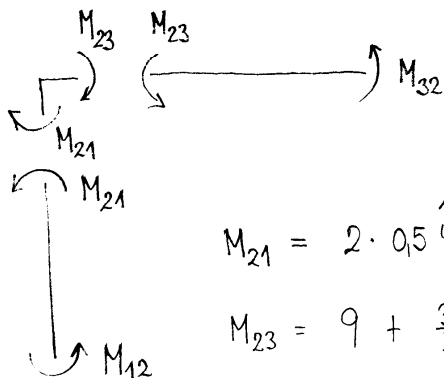
$$k^1 = \frac{2EI}{L} = 0.5 EI$$

$$\hat{k}^1 = \frac{k^1}{EI} = 0.5$$

$$k^2 = \frac{2}{3} EI$$

$$\hat{k}^2 = \frac{2}{3}$$

Momenty ve styčnicku ②



$$-\tilde{R}_2^P = \frac{1}{8} q l^2 = 9 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 2 \cdot 0.5 \hat{\psi}_2 = 1 \cdot \hat{\psi}_2$$

$$M_{23} = 9 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \hat{\psi}_2 = 9 + 1 \cdot \hat{\psi}_2$$

Podmínka ekvivalence ve styčnicku ②

$$\sum M_{2i} = 0 = M_{21} + M_{23} = 9 + 2 \hat{\psi}_2 \Rightarrow \hat{\psi}_2 = -4.5$$

$$M_{21} = -4.5 \text{ kNm}$$

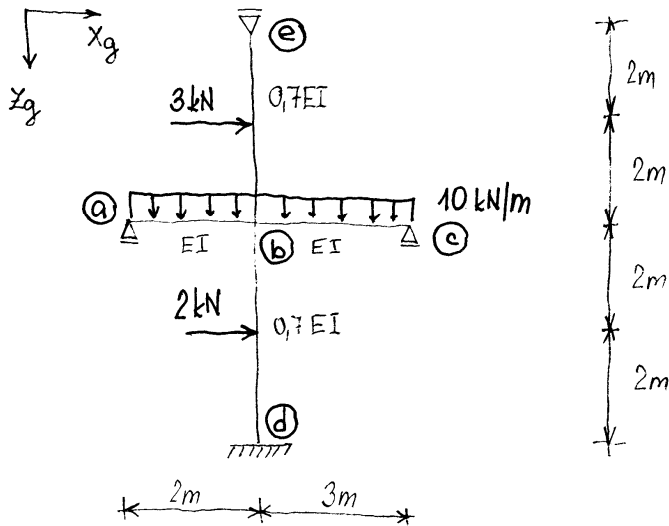
$$M_{23} = 4.5 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 0.5 \cdot \hat{\psi}_2 = -2.25 \text{ kNm}$$

Příklad 8. – pokračování

Pr. Vykreslete průběhy M, N, Q na daném nosníku, použijte ZDM

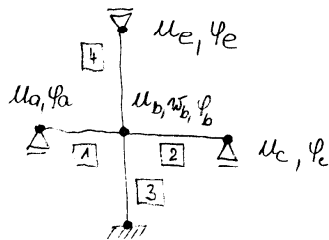
(24)



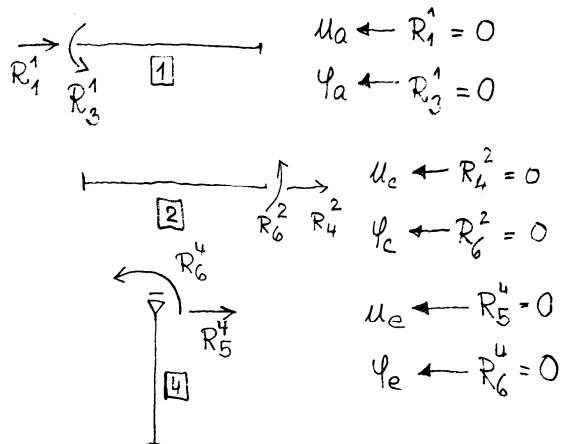
A1 tuhost prvku : $k = \frac{2EI}{L}$

A2 stupeň kinematické neurčitosti

1. DM : $r = \{u_b, w_b, \psi_b\}^T \Rightarrow 3 \times$ kinematické neurčitosti konstrukce



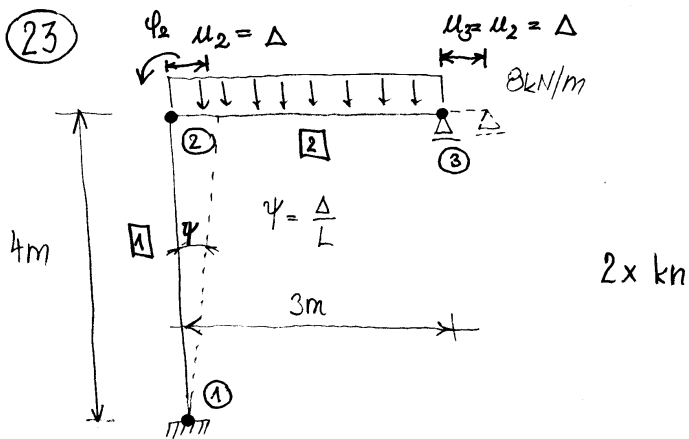
statická kondenzace
- výpočet neznámých na úrovni prvku



Příklad 9. – Určete vnitřní síly na dané konstrukci. Řešte zjednodušenou deformační metodou

Pr. Řešte zjednodušenou deformační metodou ŽDM

(23)



$$r = \{ \psi_2, \Delta \}$$

$$\hat{k}^1 = 0,5$$

$$\hat{k}^2 = \frac{2}{3}$$

stýčnick (2)

$$M_{21} = 2 \cdot 0,5 \hat{\psi}_2 + 3 \cdot 0,5 \hat{\psi} = \hat{\psi}_2 + 1,5 \frac{\hat{\Delta}}{4} = -1,8 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 9 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \hat{\psi}_2 = 9 + 1 \cdot \hat{\psi}_2 = 1,8 \text{ kNm}$$

podmínka ekvivalence

$$\sum M_{2i} = 9 + 2 \hat{\psi}_2 + 1,5 \frac{\hat{\Delta}}{4} = 0$$

podmínka rovnováhy silová - patrová rovnice

$$\sum Z_{21} = 0$$

$$M_{21}$$

$$\sum Z_{21} = \frac{M_{12} + M_{21}}{4} = \frac{1}{4} \left(1,5 \hat{\psi}_2 + 3 \frac{\hat{\Delta}}{4} \right) = 0$$

$$M_{12}$$

$$M_{12} = 0,5 \hat{\psi}_2 + 1,5 \frac{\hat{\Delta}}{4} = 1,8 \text{ kNm}$$

soustava rovnic :

$$\begin{aligned} 2 \hat{\psi}_2 + 1,5 \frac{\hat{\Delta}}{4} &= -9 \quad (-2) \\ 1,5 \hat{\psi}_2 + 3 \frac{\hat{\Delta}}{4} &= 0 \end{aligned}$$

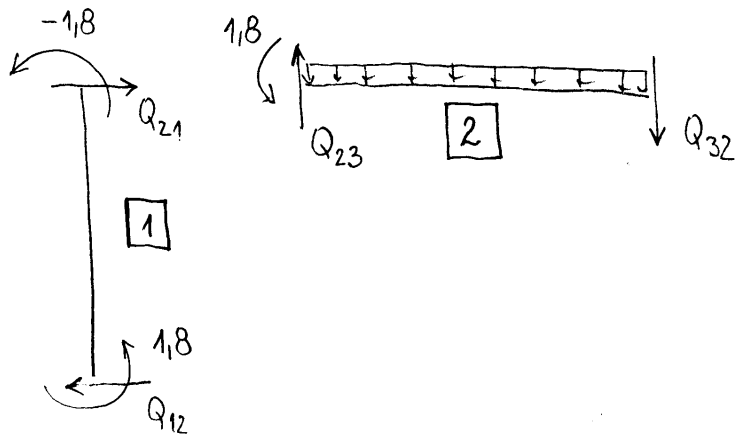
$$-2,5 \hat{\psi}_2 = +18$$

$$\hat{\psi}_2 = -7,2$$

$$\hat{\Delta} = 14,4$$

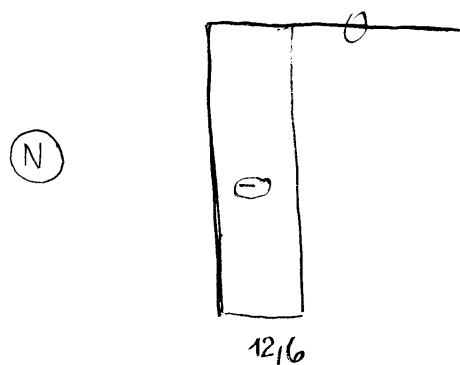
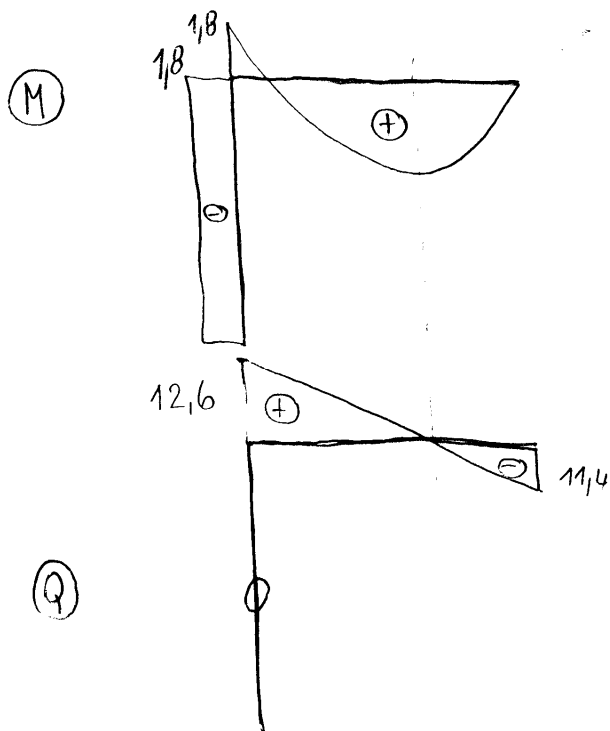
Příklad 9. – pokračování

Vnitřní síly



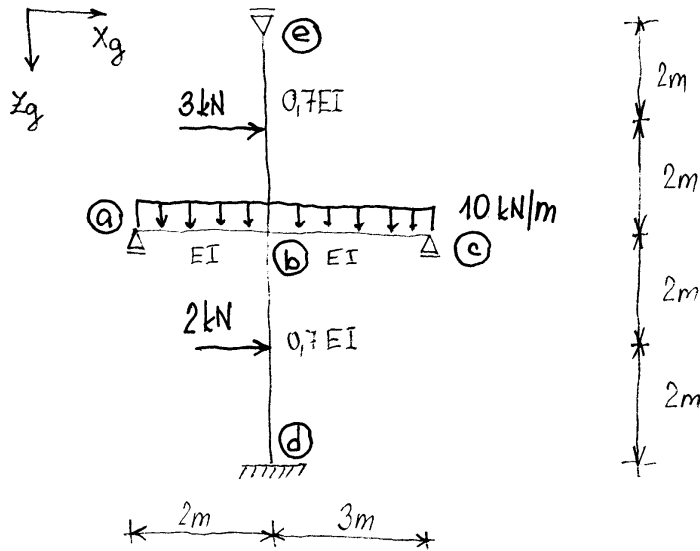
$$Q_{12} = \frac{1,8 - 1,8}{4} = 0$$

$$Q_{23} = \frac{1}{3} \left(1,8 + \frac{8 \cdot 3^2}{2} \right) =$$



Příklad 10. – Určete vnitřní síly na dané konstrukci. Řešte zjednodušenou deformační metodou

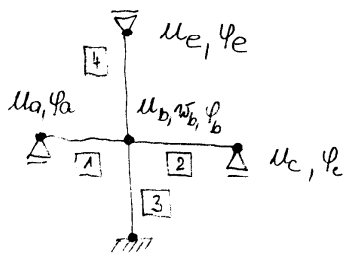
Pr. Vykreslete průběhy M, N, Q na daném nosníku, použijte ZDM



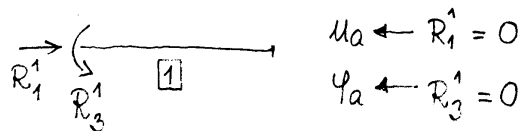
A1 tuhost prutu : $k = \frac{2EI}{L}$

A2 stupeň kinematické neurčitosti

1. DM : $r = \{u_b, w_b, \varphi_b\}^T \Rightarrow 3 \times$ kinematicky neurčita konstrukce

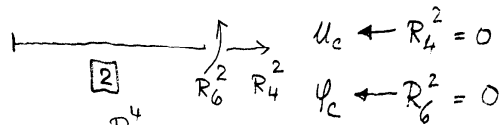


statická kondenzace
- výpočet vnitřních na úrovni prvku



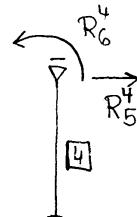
$$u_a \leftarrow R_1^1 = 0$$

$$\varphi_a \leftarrow R_3^1 = 0$$



$$u_c \leftarrow R_4^2 = 0$$

$$\varphi_c \leftarrow R_6^2 = 0$$

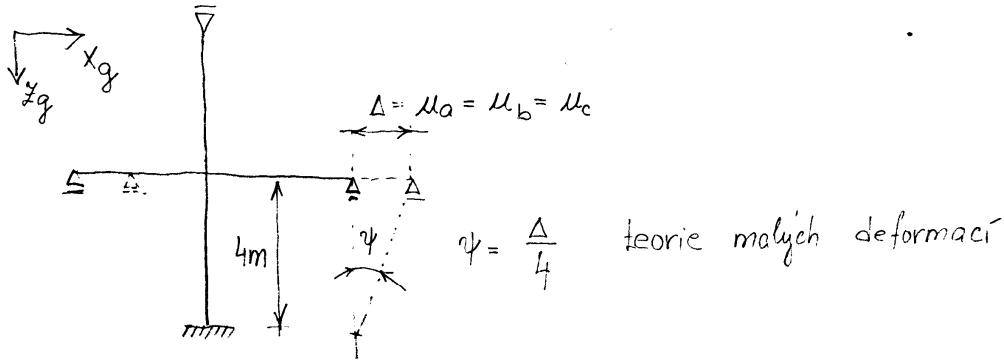


$$u_e \leftarrow R_5^4 = 0$$

$$\varphi_e \leftarrow R_6^4 = 0$$

Příklad 9. – pokračování

2. ZDM: $r = \{ \varphi_b, \psi \}^T \Rightarrow 2 \times$ kinematické neuvěta' konstrukce



A3 hodnoty momentů ve styčnicku B (ZDM)

prut 1 $M_{ba} = (-\tilde{R}_{Mb}^P)^1 + \frac{3}{2} k^1 \varphi_b$

prut 2 $M_{bc} = (-\tilde{R}_{Mb}^P)^2 + \frac{3}{2} k^2 \varphi_b$

prut 3 $M_{bd} = (-\tilde{R}_{Mb}^P)^3 + 2k^3 \varphi_b + k^3 \frac{u_2 - u_1}{L} + 3k^3 \psi$
 (Lze odvodit z posledního řádku transformované matice tuhosti prutu)

prut 4 $M_{be} = (-\tilde{R}_{Mb}^P)^4 + 0 \cdot \varphi_b + 0 \cdot \psi$

A4 tuhosti jednotlivých prvků

1 $k^1 = \frac{2EI}{2} = EI$

2 $k^2 = \frac{2EI}{3} = \frac{2}{3} EI$

3 $k^3 = \frac{14EI}{4} = 0.35 EI$

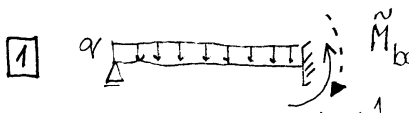
4 $k^4 = \frac{14EI}{4} = 0.35 EI$


definujeme $\hat{k} = \frac{k}{EI} \Rightarrow$

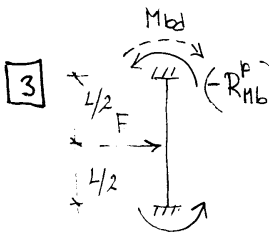
$\hat{k}^1 = 1$
 $\hat{k}^2 = \frac{2}{3}$
 $\hat{k}^3 = 0.35$
 $\hat{k}^4 = 0.35$

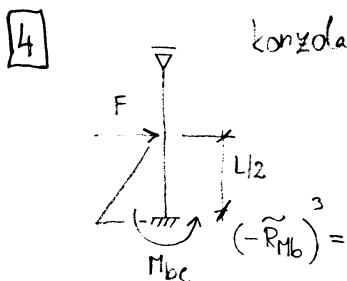
Příklad 9. – pokračování

A5 momenty ve vektuzích – transformované zatížení

1 
$$(-\tilde{R}_{Mb}^P)^1 = -\tilde{M}_{ba} = \ominus \left(\frac{1}{12} q l^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} q l^2 \right) = \ominus \frac{1}{8} q l^2 = \ominus 5 \text{ kNm}$$

2 
$$(-\tilde{R}_{Mc}^P)^3 = \tilde{M}_{bc} = \frac{1}{8} q l^2 = 11,25 \text{ kNm}$$

3 
$$(-\tilde{R}_{Me}^P)^3 = \ominus M_{de} = \ominus \frac{1}{8} F \cdot L = \ominus 1 \text{ kNm}$$

4 
$$(-\tilde{R}_{Mc}^P)^3 = M_{bc} = \frac{F \cdot L}{2} = 6 \text{ kNm}$$

B1: Podmínka ekvivalence ve styčníku (b)

$$\sum M_{bi} = 0$$

$$M_{ba} = -5 + 1,5 \cdot \hat{\psi}_b + 0 \cdot \hat{\psi}$$

$$M_{bc} = 11,25 + 1 \cdot \hat{\psi}_b + 0 \cdot \hat{\psi} \quad (*)$$

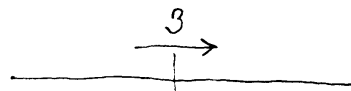
$$M_{bd} = -1 + 0,7 \cdot \hat{\psi}_b + 1,05 \cdot \hat{\psi} = \frac{\hat{\Delta}}{L} = 4$$

$$M_{be} = 6 + 0 \cdot \hat{\psi}_b + 0 \cdot \hat{\psi}$$

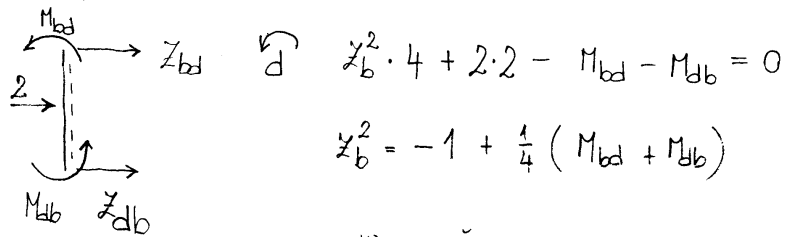
$$\sum 0 = 11,25 + 3,2 \hat{\psi}_b + 0,2625 \hat{\Delta}$$

Příklad 9. – pokračování

B2: Součtová podmínka rovnováhy ve směru osy x_g (patrová rovnice)



$$z_{bd} = -1 + 0,2625 \hat{\varphi}_b + 0,13125 \hat{\Delta}$$



$$z_b^2 = -1 + \frac{1}{4} (M_{bd} + M_{db})$$

připomeněme

$$M_{bd} = -1 + 0,4 \hat{\varphi}_b + 0,2625 \hat{\Delta}$$

$$M_{db} = 1 + 0,35 \hat{\varphi}_b + 0,2625 \hat{\Delta}$$

B3: Soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3,2 \hat{\varphi}_b + 0,2625 \hat{\Delta} &= -11,25 \\ 0,2625 \hat{\varphi}_b + 0,13125 \hat{\Delta} &= 4 \quad / \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$2,672 \hat{\varphi}_b = -19,25$$

$$\begin{aligned} \varphi_b &= -7,204 \frac{1}{EI} \\ \Delta &= 44,884 \cdot \frac{1}{EI} \end{aligned}$$

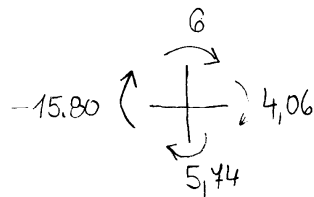
C1: Momenty ve styčníku (b) $\neq r(*)$

$$M_{ba} = -15,80 \text{ kNm}$$

$$M_{bc} = 4,06 \text{ kNm}$$

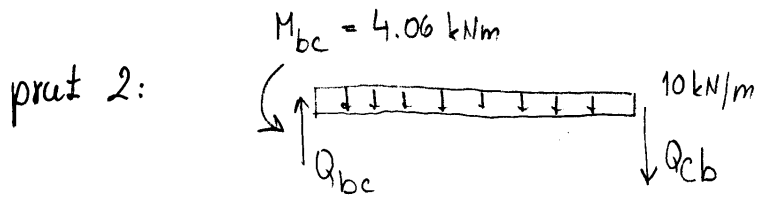
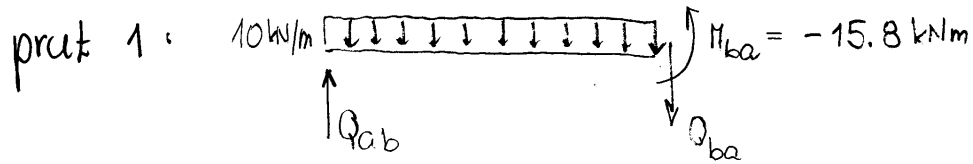
$$M_{bd} = 5,74$$

$$M_{be} = +6 \text{ kNm}$$

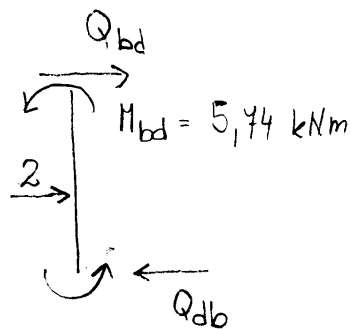


Příklad 9. – pokračování

c2: Výpočet vnitřních sil Q, M

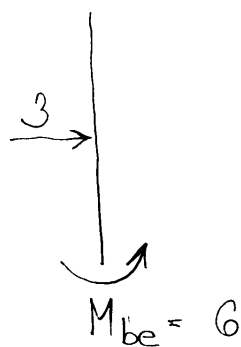


prut 3:



$$M_{db} = 1 + 0,35 \hat{\varphi}_b + 0,2625 \hat{\Delta} =$$

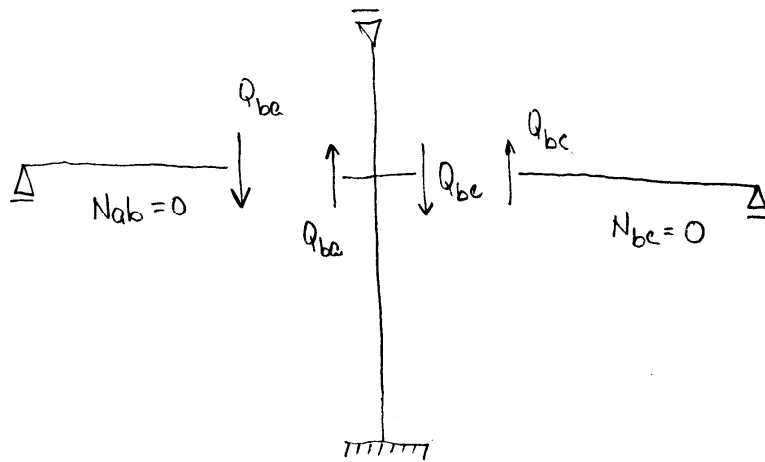
prut 4:



Podmínky rovnováhy !!!

Příklad 9. – pokračování

C3: Výpočet normálových sil

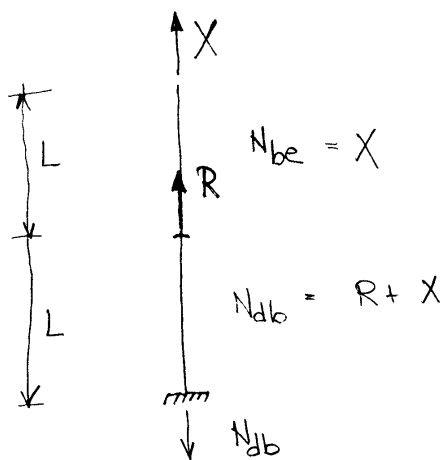


Poznámka:

Vzhledem k tomu, že jsme pro výpočet užili ZDM, nemůžeme normálovou sílu ve sloupu přímo určit.

Řešení převedeme na problém staticky neurčitěho tahu a tlaku. (sílová metoda)

označíme $R = Q_{ba} - Q_{be}$



podmínka rovnováhy:

$$N_{db} = R + X$$

deformační podmínka:

$$\Delta l = \frac{X}{EA} \cdot L + \frac{R+X}{EA} \cdot L = 0$$

$$X = -\frac{R}{2} = N_{be}$$

$$N_{db} = \frac{R}{2}$$