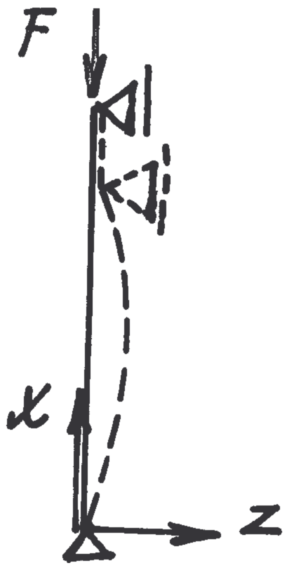
Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

- E_e Potenciální energie vnějších sil
- E_i Potenciální energie vnitřních sil

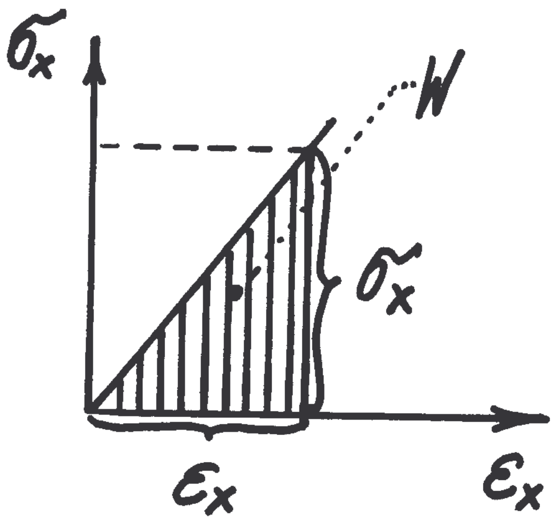


Energetické kritérium stability

	stabilní	$E_i > E_e$ $(F < F_k)$
rovnováha	indiferentní	$E_i = E_e$ $(F = F_k)$
	labilní	$E_i < E_e$ $(F > F_k)$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

a) Energie vnitřních sil



Hustota energie deformace
(energie jednotkového objemu pružného tělesa nahromaděná v něm během deformace)

$$W = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \quad \left[\frac{N}{m^2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{J}{m^3}\right]$$

$$E_i = \iiint_V W \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_x \varepsilon_x \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint E \varepsilon_x^{\,2} \,\mathrm{d}V$$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

Energie vnějších a vnitřních sil pouze od stlačení

Zákon zachování energie – žádné energetické ztráty $\rightarrow$ práce vnějších sil se musí přeměnit na energii deformace

$$\boxed{\frac{1}{2}F\Delta_1} = \frac{1}{2}\int\int\int_V E(u_0')^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^l E(u_0')^2\,\mathrm{d}x\int\int_A \mathrm{d}A$$

$$\frac{1}{2}\int_0^l EA(u_0')^2\,\mathrm{d}x = E_i^0$$

Elementární práce

Elastický materiál

$$F' = C\Delta'$$

$$\int_0^{\Delta_1}\boxed{F'\,\mathrm{d}\Delta'} = \int_0^{\Delta_1} C\Delta'\,\mathrm{d}\Delta' = C\frac{\Delta_1^2}{2} = \frac{F\Delta_1}{2}$$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

Energie vnitřních sil pouze od ohybu – zatížení příčnou silou

Bernoulli-Navierova hypotéza $\rightarrow$ $u = -zw'$, $\varepsilon_x = -zw''$

$$E_i = \frac{1}{2}\iiint_V E z^2 (w'')^2 \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^l \underbrace{\iint_A z^2 \,\mathrm{d}A}_{I_y} E (w'')^2 \,\mathrm{d}x$$

Při vybočení v rovině:

$$E_i = \frac{1}{2}\int_0^l EI (w'')^2 \,\mathrm{d}x$$

I … moment setrvačnost k ose kolmé na směr vybočení

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

Energie vnitřních sil pouze od ohybu

Bernoulli-Navierova hypotéza $\rightarrow$ $\begin{aligned} u &= -zw' \\ \varepsilon_x &= -zw'' \end{aligned}$

$$E_i = \frac{1}{2}\iiint_V E z^2 (w'')^2 \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_0^l \underbrace{\iint_A z^2 \,\mathrm{d}A}_{I_y}\, E (w'')^2 \,\mathrm{d}x$$

$$E_i = \frac{1}{2}\int_0^l EI (w'')^2 \,\mathrm{d}x$$

Při vybočení v rovině:

I … moment setrvačnost k ose kolmé na směr vybočení

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

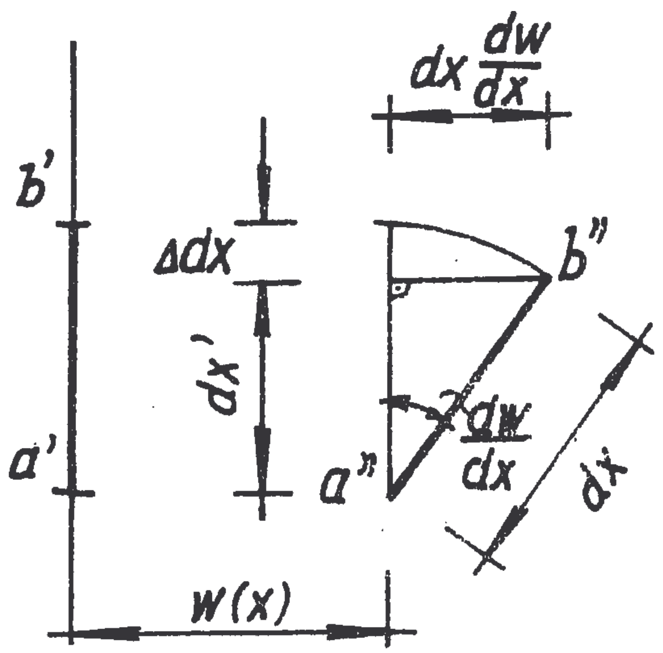
b) Energie vnějších sil – kombinace tlakové a příčné síly

Energetická rovnováha

$$\boxed{\tfrac{1}{2}Q w_q} + \boxed{F\Delta_2} = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y (w'')^2 \,\mathrm{d}x$$

E_e^Q

Určení Δ_2



$$\begin{aligned}\Delta\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}x - \mathrm{d}x' \\ &= \mathrm{d}x - \left[\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^2 (w')^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{d}x - \mathrm{d}x\left[1 - w'^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\doteq \mathrm{d}x - \mathrm{d}x\left[1 - \frac{1}{2}w'^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(w')^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

Energie vnějších sil – příčinek od příčné síly E_e^Q

$$\Delta_2 = \int_0^{l-\Delta_1} \Delta \, \mathrm{d}x \doteq \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 \, \mathrm{d}x$$

Práce vnějších sil úměrná normálové síle F

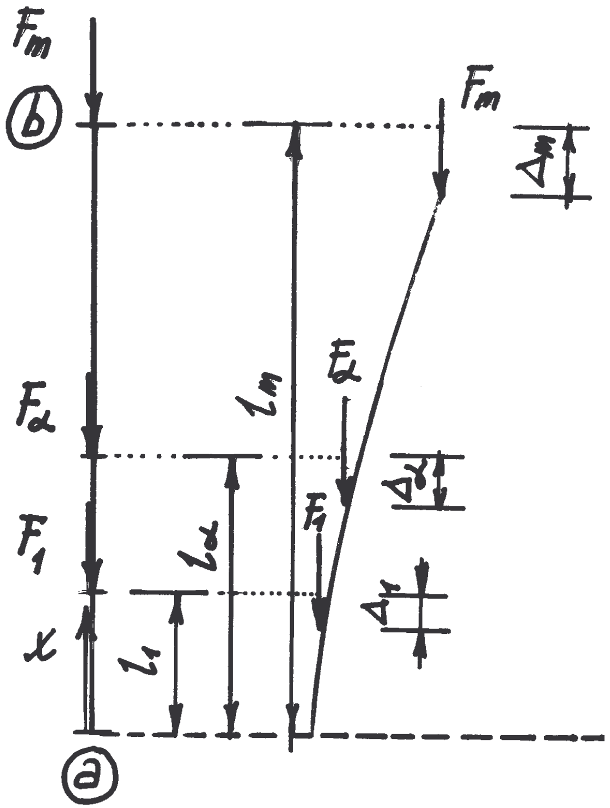
$$E_e^Q = \frac{1}{2} \int_0^l E I_y (w'')^2 \, \mathrm{d}x - \boxed{\frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 \, \mathrm{d}x}$$

Kritérium stability

1. Stabilitní rovnováha prutu $\rightarrow$ $E_e^Q > 0$
2. Indiferentní rovnováha prutu $\rightarrow$ $E_e^Q = 0$
3. Nestabilní rovnováha prutu $\rightarrow$ $E_e^Q < 0$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

- Energie vnějších sil – prut zatížený několika silami



$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha}(w')^2\,\mathrm{d}x$$

$$F_\alpha = \kappa_\alpha \cdot F$$

$\boldsymbol{F}$ …srovnávací hodnota zatížení

κ_α …koeficient zatížení

$$E_e = \sum_{\alpha=1}^{m} F_\alpha \cdot \Delta_\alpha = F\sum_{\alpha=1}^{m}\kappa_\alpha \cdot \Delta_\alpha \boxed{= F\sum_{\alpha=1}^{m}\kappa_\alpha \cdot \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha}(w')^2\,\mathrm{d}x}$$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

c) Kritérium indiferentní rovnováhy $(\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F_k})$

$$E_e = E_i$$

$$\frac{1}{2} F_k \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \int_0^{l_\alpha} (w')^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{l} EI (w'')^2 \, dx$$

$$\boxed{F_k = \frac{\int_0^{l} EI (w'')^2 \, \mathrm{d}x}{\sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \int_0^{l_\alpha} (w')^2 \, \mathrm{d}x}}$$

vzorec je přesný za předpokladu, že je známý přesný tvar ohybové čáry w

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

d) Praktický výpočet

nahradit přesnou funkci $w(x)$ aproximací $\tilde{w}(x)$

$$\boxed{\tilde{F}_k = \frac{\int_0^l EI\left(\tilde{w}''\right)^2 dx}{\sum_\alpha \kappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} \left(\tilde{w}'\right)^2 dx}}$$

Platí nerovnost $\tilde{F}_k \geq F_k \longrightarrow$ energetické řešení není na straně bezpečnosti

Hledá se minimální hodnota energetického řešení $\tilde{F}_k$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

- Praktický výpočet - postup

1) Aproximace funkce $w(x)$ řadou

$$\boxed{\tilde{w}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)}$$

$\varphi_i(x)$… zvolené bázové funkce (např. goniometrické funkce, polynomy), musí splňovat alespoň geometrické okrajové podmínky!

a_i … neznámé koeficienty

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

- Praktický výpočet - postup

2) Pro $n>1$: sestavit podmínky minima F_k $\Rightarrow$
soustava n homogenních lin. rovnic
pro netriviální řešení platí $det.=0$
$\Rightarrow \quad \widetilde{F}_k = \ldots$
(koeficienty a_i nelze určit)

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

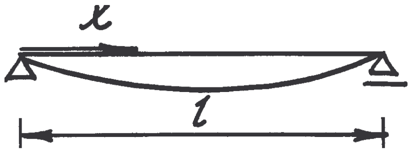
- Praktický výpočet – postup – uvažujme $n = 1$
  energetická metoda v užším smyslu

$$\widetilde{w}(x) = a_1 \varphi_1(x) \qquad \widetilde{w}''(x) = a_1 \varphi_1''(x)$$

$$\boxed{\widetilde{F}_k = \frac{\int_0^l EI\left(a_1 \varphi_1''\right)^2 dx}{\sum_\alpha \kappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} \left(a_1 \varphi_1'\right)^2 dx} = \frac{\int_0^l EI\left(\varphi_1''\right)^2 dx}{\sum_\alpha \kappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} \left(\varphi_1'\right)^2 dx}}$$

Stabilita prutů – Energetická (Ritzova) metoda

- Goniometrické bázové funkce



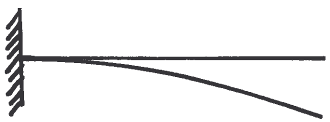
$$\varphi_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\varphi_1(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$\varphi_1(x) = \cos\frac{\pi x}{2l} - \cos\frac{3\pi x}{2l}$$

$$\varphi_1(x) = 1 - \cos\frac{2\pi x}{l}$$

- Geometrické okrajové podmínky



$$x = 0 \quad \dots \quad \begin{matrix} w = 0 \\ w' = 0 \end{matrix}$$

$$x = 0 \quad \dots w = 0$$