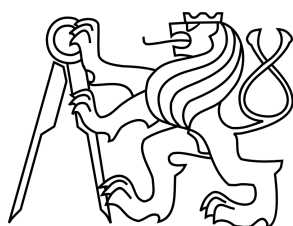


České vysoké učení technické v Praze

Fakulta stavební



DIPLOMOVÁ PRÁCE

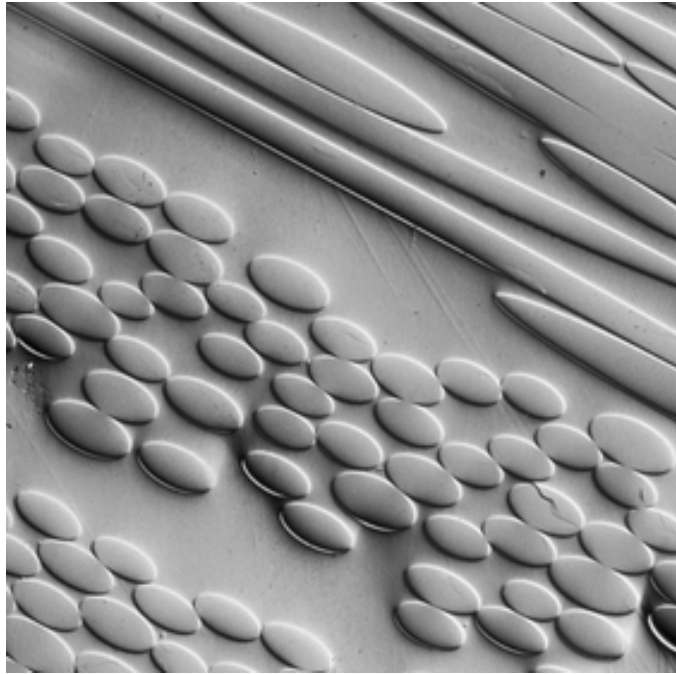
Praha 2011

Milan Strádal

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Janu Zemanovi, Ph.D. za věnovaný čas, ochotu a jeho cenné připomínky při metodickém vedení této diplomové práce.

Dále bych rád poděkoval prof. Ing. Milanu Jiráskovi, DrSc. za prvotní impuls, kterým mne přivedl k problematice viskoelastivity.





ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STAVEBNÍ

KATEDRA MECHANIKY

Porovnání dvou přístupů k určení celkové
odezvy kompozitů s viskoelastickou maticí

Comparison of Two Approaches to Determining Overall
Response of Composites with Viscoelastic Matrix

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Milan Strádal

STUDIJNÍ PROGRAM: Stavební inženýrství
STUDIJNÍ OBOR: Konstrukce pozemních staveb
VEDOUCÍ PRÁCE: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

PRAHA 2011

FRONTISPICE: Kompozit z polymerní matrice a skleněných vláken. Světelná mikrofotografie v diferenciálním interferenčním kontrastu (zvětšeno 200×).
© Brian & Mavis Bousfield / Science & Society Picture Library
<http://www.ssplprints.com>

DOCTRINA EST FRUCTUS DULCIS RADICIS AMARAE.

MONOSTICHA CATONIS

Vzdělání je sladký plod hořkého kořene.

Catonova jednoverší

Abstract

This thesis deals with the comparison of two different approaches to determining overall response of composite materials consisting of an elastic inclusion and a viscoelastic matrix. These are (i) the semi-analytical solution based on the viscoelastic correspondence principle using the Laplace transform and (ii) the numerical exponential algorithm. The calculations are performed in the GNU Octave system. The `invlap.m` function based on the de Hoog algorithm is used for the numerical inversion of Laplace transforms.

Attention is paid to creep phenomena and its associated time dependence of a material compliance, i.e. the time-dependent strain response due to general stress history is investigated. In this case the Kelvin-Voigt chain is regarded as a fitting rheological model. The load function with a sinusoidal wave in its first half-period is chosen as a representative general stress. The de Hoog algorithm, which is based on the Fourier series expansion, shows exceptional accuracy for this function.

The comparison of approaches is initially carried out for a material point, i.e. a homogenous viscoelastic material. The closed form solution, obtained both the analytical solution of a convolution integral and using the Laplace transform, is known for this case. The reliability of both using algorithms is tested on this model. As a matter of interest, the accuracy of algorithms is tested also for a trapezoidal load history, which is common in technical practice as well. Then the methods are used for a simple composite model. A fibrous composite loaded with a normal stress in the direction of fibres is chosen for this model. Then the effective compliance corresponds exactly with the Reuss bound and it is not necessary to introduce concentration factors to calculations. Finally the comparison is carried out for a statistically isotropic particle composite with spherical inclusions. The loading in plain shear is considered and only the deviatoric part of creep is observed. The estimation of effective material parameters is derived by the Mori-Tanaka scheme. The evaluation of obtained results is done for every model and general findings are summarized at the end of the thesis.

The submitted thesis includes also the basic theoretical introduction to issues of composites, viscoelasticity and micromechanics of heterogeneous media. There are also appendixes describing some theoretical principles and analytical steps in detail.

Keywords: composite material, viscoelastic matrix, homogenization, Mori-Tanaka scheme, creep, Kelvin-Voigt chain, exponential algorithm, correspondence principle, Laplace transform, de Hoog algorithm

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá porovnáním dvou odlišných přístupů k určení celkové odezvy kompozitního materiálu složeného z elastické inkluze a viskoelastické matrice. Těmi jsou (i) semi-analytické řešení založené na principu viskoelastické korespondence s využitím Laplaceovy transformace a (ii) numerické řešení exponenciálním algoritmem. Výpočty jsou prováděny v systému GNU Octave a pro numerickou inverzní Laplaceovu transformaci je použita funkce `invlap.m`, která vychází z de Hoogova algoritmu.

Pozornost je zde věnována jevu dotvarování a s ním související časové závislosti poddajnosti materiálu, tj. je sledován časový vývoj deformace na obecný průběh předepsaného napětí. Za vhodný reologický model je v tomto případě považován Kelvinův-Voigtův řetězec. Jako reprezentant obecného průběhu napětí je zvolena zatěžovací funkce se sinusovým průběhem v intervalu své první půlperrody. Pro takovou funkci vykazuje de Hoogův algoritmus, který je založený na principu rozkladu do Fourierovy řady, mimořádnou přesnost.

Porovnání přístupů je provedeno nejprve pro materiálový bod, tj. homogenní viskoelastický materiál. Pro tento případ je známo řešení v uzavřeném tvaru, které bylo získáno jak analytickým řešením konvolučního integrálu, tak použitím Laplaceovy transformace. Na tomto modelu je otestována spolehlivost obou používaných algoritmů. Pro zajímavost je zde přesnost algoritmů otestována i pro lichoběžníkový průběh zatížení, který je v technické praxi rovněž častý. Poté je přistoupeno k aplikaci metod na jednoduchý model kompozitu. Za ten je vybrán vláknový kompozit zatížený normálovým napětím ve směru vláken. Efektivní poddajnost tak přesně odpovídá Reussově mezi a do výpočtů není nutno zavádět odhady koncentračních faktorů. Nakonec je porovnání provedeno pro statisticky izotropní částicový kompozit s kulovými inkluzemi. Je uvažováno zatížení čistým smykem a sledována pouze deviatorická část dotvarování. Odhad efektivních materiálových parametrů je proveden metodou Mori-Tanaka. U každého modelu jsou zhodnoceny dosažené výsledky a v závěru práce jsou shrnuty obecné poznatky.

Předkládaný text obsahuje i základní teoretický úvod do problematiky kompozitů, viskoelasticity a mikromechaniky heterogenních materiálů. Je také doplněn dodatky, které podrobněji popisují některé teoretické principy a analytické postupy.

Klíčová slova: kompozitní materiál, viskoelastická matrice, homogenizace, metoda Mori-Tanaka, dotvarování, Kelvinův-Voigtův řetězec, exponenciální algoritmus, korespondenční princip, Laplaceova transformace, de Hoogův algoritmus

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze, 16. prosince 2011

Milan Strádal



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

studijní program: Stavební inženýrství
studijní obor: Konstrukce pozemních staveb
akademický rok: 2011/2012

Jméno a příjmení diplomanta: Milan Strádal

Zadávací katedra: Katedra mechaniky

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

Název diplomové práce: Porovnání dvou přístupů k určení celkové odezvy kompozitů s viskoelastickou maticí

Název diplomové práce v anglickém jazyce: Comparison of two approaches to determining overall response of composites with viscoelastic matrix

Rámcový obsah diplomové práce: Studium literatury (Laplaceova transformace a algoritmy na její inverzi, exponenciální algoritmus, základy homogenizace)

Porovnání exponenciálního algoritmu a Laplaceovy transformace pro materiálový bod, jednoduchý reologický model kompozitu a pro odhad efektivních vlastností metodou Mori-Tanaka


Srovnání výsledků, formulace obecných závěrů


Datum zadání diplomové práce: 24.8.2011 Termín odevzdání: 16.12.2011
(vyplňte poslední den výuky přísl. semestru)

Diplomovou práci lze zapsat, kromě oboru A, v letním i zimním semestru.


Pokud student neodevzdal diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat diplomovou práci podruhé. Studentovi, který při opakovaném zápisu diplomovou práci neodevzdal v určeném termínu a tuto skutečnost řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, se ukončuje studium podle § 56 zákona o VŠ č.111/1998 (SZŘ ČVUT čl 21, odst. 4).

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.


vedoucí diplomové práce


vedoucí katedry

Zadání diplomové práce převzal dne: 15. 9. 2011


diplomant

Formulář nutno vyhotovit ve 3 výtiscích – 1x katedra, 1x diplomant, 1x studijní odd. (zašle katedra)

Nejpozději do konce 2. týdne výuky v semestru odešle katedra 1 kopii zadání DP na studijní oddělení a provede zápis údajů týkajících se DP do databáze KOS.

Obsah

Značení	xv
1 Kompozitní materiály	1
1.1 Definice a vymezení kompozitů	1
1.2 Rozdělení kompozitů	2
1.3 Matrice a vláknové výztuže kompozitů	4
2 Viskoelastická	7
2.1 Základní vztahy	7
2.2 Maxwellův model	10
2.3 Kelvinův-Voigtův model	14
2.4 Kelvinův-Voigtův řetězec	16
2.5 Odezva na obecné zatížení	18
2.6 Korespondenční princip lineární viskoelastické	19
3 Mechanika kompozitů	21
3.1 Mikromechanická analýza kompozitů	21
3.2 Průměrné veličiny	22
3.3 Lokalizace	24
3.4 Homogenizace	26
3.5 Statisticky izotropní kompozity	28
3.5.1 Voigtovy a Reussovy meze	30
3.5.2 Metoda Mori-Tanaka	30
3.6 Homogenizace kompozitů s vlastními poli	32
3.7 Homogenizace viskoelastických kompozitů	34
4 Materiálový bod	37
4.1 Přístupy k výpočtu odezvy	37
4.2 Parametry Kelvinova-Voigtova řetězce	38
4.3 Parametry zatěžovací funkce	39
4.4 Řešení korespondenčním principem	40
4.5 Řešení exponenciálním algoritmem	40
4.6 Porovnání výsledků s analytickým řešením	41

5	Vláknový kompozit při jednoosé napjatosti	45
5.1	Jednoduchý model kompozitu	45
5.2	Řešení korespondenčním principem	47
5.3	Řešení exponenciálním algoritmem	48
5.4	Porovnání výsledků	49
6	Částicový kompozit při smykovém namáhání	55
6.1	Obecný model kompozitu	55
6.2	Konstitutivní vztahy	56
6.3	Řešení korespondenčním principem	58
6.4	Řešení exponenciálním algoritmem	59
6.5	Porovnání výsledků	61
7	Závěr	67
	Literatura	71
A	Základní vztahy lineární teorie pružnosti	75
A.1	Zobecněný Hookeův zákon	75
A.2	Rozklad na objemovou a deviatorickou část	77
B	Laplaceova transformace	79
B.1	Definice Laplaceovy transformace	79
B.2	Vlastnosti Laplaceovy transformace	80
B.3	Odvození obrazů některých základních funkcí	82
B.4	Slovník Laplaceových integrálů	84
C	Analytické řešení pro sinusové zatížení	85
C.1	Použití konvolučního integrálu	85
C.2	Použití Laplaceovy transformace	88
D	Analytické řešení pro lichoběžníkové zatížení	91
D.1	Použití konvolučního integrálu	91
D.2	Použití Laplaceovy transformace	95
E	Numerické řešení inverzní Laplaceovy transformace	97
E.1	Inverzní Laplaceova transformace	97
E.2	Fourierova řada, integrál a transformace	98
E.3	Metoda rozkladu do Fourierovy řady	100
E.4	Postup použití funkce <code>invlap.m</code>	102
F	Exponenciální algoritmus	103
F.1	Numerické metody pro zjištění odezvy	103
F.2	Princip exponenciálního algoritmu	104
F.3	Exponenciální algoritmus pro vláknový kompozit	106

F.4	Exponenciální algoritmus pro částicový kompozit	109
G	Princip použití Eshelbyho řešení	113
G.1	Vlastní deformace a napětí	113
G.2	Eshelbyho řešení problému inkluze	114
G.3	Ekvivalentní vlastní deformace	116
G.4	Elipsoidální nehomogenita	117
H	Skripty pro systém GNU Octave	119
H.1	Materiálový bod: mater-bod.m	119
H.2	Vláknový kompozit: vlak-komp.m	121
H.3	Částicový kompozit: cast-komp.m	123
H.4	Lichoběžníkové zatížení: mb-lich.m	125
H.5	Ověření spolehlivosti funkce invlap.m: IL-vs-GS.m	127

Seznam obrázků

1.1	Synergický efekt kompozitu.	2
1.2	Rozdělení kompozitů.	3
2.1	Pružný a viskózní článek.	8
2.2	Maxwellův a Kelvinův-Voigtův model.	9
2.3	Kelvinův-Voigtův řetězec.	16
3.1	Princip homogenizace.	23
3.2	Mikropole napětí a deformace.	24
3.3	Korespondenční princip homogenizace.	34
4.1	Odezva na lichoběžníkové zatížení.	43
4.2	Nepřesnost algoritmu pro odtěžovací větev.	44
4.3	Detail nepřesnosti algoritmu.	44
5.1	Odezva na sinusové normálové zatížení.	51
5.2	Pracovní diagram vláknového kompozitu.	52
5.3	Redukovaný pracovní diagram vláknového kompozitu.	52
5.4	Synergický efekt vláknového kompozitu.	53
6.1	Odezva dle jednotlivých přístupů.	62
6.2	Synergický efekt částicového kompozitu.	62
6.3	Odezva na sinusové smykové zatížení.	65
6.4	Pracovní diagram částicového kompozitu.	66
B.1	Početní postup s použitím Laplaceovy transformace.	80
G.1	Inkluze v matici.	114
G.2	Elipsoidální inkluze.	115
G.3	Ekvivalentní vlastní deformace.	116
G.4	Elipsoidální nehomogenita.	118

Seznam tabulek

4.1	Epoxidový systém T30.	39
4.2	Parametry funkce poddajnosti.	40
4.3	Srovnání pro materiálový bod.	42
5.1	Srovnání pro vláknový kompozit.	50
6.1	Srovnání pro částicový kompozit.	61
6.2	Přesnost funkcí $invlap.m$ a $gavsteh.m$	63
6.3	Srovnání provedení inverze funkcí $invlap.m$ a $gavsteh.m$. . .	64
B.1	Slovník Laplaceových integrálů.	84

Značení

Obecné

\underline{a}	vektor
\underline{A}	matice
\underline{a}, a_{ij}	tenzor 2. řádu (symbolické, indexové značení)
\underline{A}, A_{ijkl}	tenzor 4. řádu (symbolické, indexové značení)
$\mathbf{1}, \delta_{ij}$	jednotkový tenzor 2. řádu (Kronekerovo delta)
\mathbb{I}, I_{ijkl}	jednotkový tenzor 4. řádu
$a_{ij} b_i$	sumace přes index i , tj. $\sum_i a_{ij} b_i$
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	jednoduchá kontrakce, tj. $\sum_j a_{ij} b_j = a_{ij} b_j$
$\underline{A} : \underline{a}$	dvojitá kontrakce, tj. $\sum_{kl} A_{ijkl} a_{kl} = A_{ijkl} a_{kl}$
\mathbb{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbb{Z}	množina všech celých čísel
\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
\mathbb{C}	množina všech komplexních čísel
$\Re\{c\}$	reálná část komplexního čísla c
$\Im\{c\}$	imaginární část komplexního čísla c
t	čas
$\dot{f}(t)$	první derivace funkce f podle t
$\ddot{f}(t)$	druhá derivace funkce f podle t
$\mathcal{H}(t)$	jednotková skoková funkce (Heavisideova funkce)
$\delta(t)$	jednotková impulsová funkce (Diracovo delta funkce)
$f * g$	konvoluce funkcí f a g
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	přímá Laplaceova transformace funkce $f(t)$
$\hat{f}(p)$	Laplaceův obraz funkce $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(p)\}$	inverzní Laplaceova transformace obrazu $\hat{f}(p)$
$\mathcal{F}\{f(t)\}$	přímá Fourierova transformace funkce $f(t)$
$\hat{f}(\omega)$	Fourierův obraz funkce $f(t)$
$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$	inverzní Fourierova transformace obrazu $\hat{f}(\omega)$

Mechanika homogenních materiálů

σ, σ_{ij}	tenzor napětí
$\varepsilon, \varepsilon_{ij}$	tenzor deformace
\mathbb{C}, C_{ijkl}	tenzor materiálové tuhosti
\mathbb{J}, J_{ijkl}	tenzor materiálové poddajnosti
$\bar{\sigma} \mathbf{1}, \bar{\sigma} \delta_{ij}$	objemová část tenzoru napětí
$\bar{\varepsilon} \mathbf{1}, \bar{\varepsilon} \delta_{ij}$	objemová část tenzoru deformace
\mathbf{s}, s_{ij}	deviatorická část tenzoru napětí
\mathbf{e}, e_{ij}	deviatorická část tenzoru deformace
$\bar{\sigma}$	střední napětí
$\bar{\varepsilon}$	střední deformace
\mathbb{I}^v, I_{ijkl}^v	objemový (volumetrický) projekční tenzor
\mathbb{I}^d, I_{ijkl}^d	deviatorický projekční tenzor
σ	normálová složka tenzoru napětí
ε	normálová složka tenzoru deformace (relativní protažení)
τ	smyková složka tenzoru napětí
γ	smyková složka tenzoru deformace (smykové zkosení)
$\bar{\sigma}$	předepsaná konst. hodnota, popř. amplituda, napětí
$\bar{\varepsilon}$	předepsaná konstantní hodnota deformace
ω	úhlová frekvence sinové zatěžovací funkce
$\sigma(t)$	časový průběh napětí
$\varepsilon(t)$	časový průběh deformace
E	Youngův modul pružnosti
ν	Poissonův součinitel
k	objemový modul pružnosti
μ	smykový modul pružnosti
J^v	objemová poddajnost
J^d	smyková poddajnost
η	viskozita
τ_j	retardační čas j -tého Kelvinova-Voigtova článku
$J(t, t_0)$	funkce poddajnosti pro stárnoucí materiál
$R(t, t_0)$	relaxační funkce pro stárnoucí materiál
$J_0(t - t_0)$	funkce poddajnosti pro nestárnoucí materiál
$R_0(t - t_0)$	relaxační funkce pro nestárnoucí materiál
σ_e, ε_e	napětí a deformace v pružině
σ_v, ε_v	napětí a deformace v tlumiči

Mechanika kompozitních materiálů

RVE	reprezentativní objemový vzorek
\underline{y}	vektor souřadnic bodu v makroskopickém měřítku
\underline{x}	vektor souřadnic bodu v mikroskopickém měřítku
$\Omega(\underline{y})$	oblast vymežující RVE, který je umístěný v bodě \underline{y}
$ \Omega $	objem oblasti Ω
$\partial\Omega$	hranice oblasti Ω
$\langle f(\underline{x}) \rangle_{\Omega}$	prostorový průměr funkce $f(\underline{x})$ v oblasti Ω
$\sigma(\underline{x}), \sigma_{ij}(\underline{x})$	mikroskopický tenzor napětí v bodě \underline{x}
$\varepsilon(\underline{x}), \varepsilon_{ij}(\underline{x})$	mikroskopický tenzor deformace v bodě \underline{x}
$\Sigma, \langle \sigma \rangle, \langle \sigma \rangle_{ij}$	makroskopický tenzor napětí
$E, \langle \varepsilon \rangle, \langle \varepsilon \rangle_{ij}$	makroskopický tenzor deformace
$C(\underline{x}), C_{ijkl}(\underline{x})$	mikroskopický tenzor materiálové tuhosti v bodě \underline{x}
$A(\underline{x}), A_{ijkl}(\underline{x})$	mikroskopický koncentrační tenzor deformace v bodě \underline{x}
$B(\underline{x}), B_{ijkl}(\underline{x})$	mikroskopický koncentrační tenzor napětí v bodě \underline{x}
ω_r	oblast vymežující r -tou fází v oblasti Ω
f_r	objemový podíl r -té fáze
$C_r, C_{ijkl}^{(r)}$	tenzor materiálové tuhosti r -té homogenní fáze
$J_r, J_{ijkl}^{(r)}$	tenzor materiálové poddajnosti r -té homogenní fáze
$A_r, A_{ijkl}^{(r)}$	koncentrační tenzor deformace r -té homogenní fáze
$B_r, B_{ijkl}^{(r)}$	koncentrační tenzor napětí r -té homogenní fáze
$S_r, S_{ijkl}^{(r)}$	Eshelbyho tenzor r -té homogenní fáze
A_r^v	objemový koncentrační faktor deformace r -té fáze
B_r^v	objemový koncentrační faktor napětí r -té fáze
A_r^d	deviatorický koncentrační faktor deformace r -té fáze
B_r^d	deviatorický koncentrační faktor napětí r -té fáze
α_m	objemová část Eshelbyho tenzoru
β_m	deviatorická část Eshelbyho tenzoru
C_0, C_{ijkl}^0	tenzor materiálové tuhosti referenčního média
J_0, J_{ijkl}^0	tenzor materiálové poddajnosti referenčního média
C_i, C_{ijkl}^i	tenzor materiálové tuhosti inkluze
J_i, J_{ijkl}^i	tenzor materiálové poddajnosti inkluze
C_m, C_{ijkl}^m	tenzor materiálové tuhosti matrice
J_m, J_{ijkl}^m	tenzor materiálové poddajnosti matrice
$C_{\text{eff}}, C_{ijkl}^*$	efektivní tenzor materiálové tuhosti

$\mathbb{J}_{\text{eff}}, J_{ijkl}^*$	efektivní tenzor materiálové poddajnosti
k_{eff}, k^*	efektivní objemový modul pružnosti
μ_{eff}, μ^*	efektivní smykový modul pružnosti
$J_{\text{eff}}^{\text{v}}, J_{\text{v}}^*$	efektivní objemová poddajnost
$J_{\text{eff}}^{\text{d}}, J_{\text{d}}^*$	efektivní smyková poddajnost
k_{V}^*	Voigtova mez efektivního objemového modulu pružnosti
μ_{V}^*	Voigtova mez efektivního smykového modulu pružnosti
k_{R}^*	Reussova mez efektivního objemového modulu pružnosti
μ_{R}^*	Reussova mez efektivního smykového modulu pružnosti
ζ_r	tenzor vlastního napětí r -té homogenní fáze
ϵ_r	tenzor vlastní deformace r -té homogenní fáze
ζ_{eff}	efektivní tenzor vlastního napětí
ϵ_{eff}	efektivní tenzor vlastní deformace
\mathbf{a}_r	koncentrační tenzor deformace vlastního napětí r -té fáze
\mathbf{b}_r	koncentrační tenzor napětí vlastní deformace r -té fáze
a_r^{v}	objemový koncentrační faktor vlastního napětí
b_r^{v}	objemový koncentrační faktor vlastní deformace
a_r^{d}	deviatorický koncentrační faktor vlastního napětí
b_r^{d}	deviatorický koncentrační faktor vlastní deformace
$\mathbb{C}_{\text{eff}}(t), C_{ijkl}^*(t)$	tenzor efektivní relaxační funkce
$\mathbb{J}_{\text{eff}}(t), J_{ijkl}^*(t)$	tenzor efektivní funkce poddajnosti
$k_{\text{eff}}(t), k^*(t)$	efektivní objemová relaxační funkce
$\mu_{\text{eff}}(t), \mu^*(t)$	efektivní smyková relaxační funkce
$J_{\text{eff}}^{\text{v}}(t), J_{\text{v}}^*(t)$	efektivní objemová funkce poddajnosti
$J_{\text{eff}}^{\text{d}}(t), J_{\text{d}}^*(t)$	efektivní smyková funkce poddajnosti
ϵ_{ij}^{t}	tenzor beznapěťové transformační deformace
ϵ_{ij}^{e}	tenzor součtu elastických deformací
V	oblast s nehomogenním materiálovým chováním
∂V	hranice oblasti V
\tilde{u}_i	vektor předepsaného přemístění na ∂V
\bar{u}_i	vektor rozdílu polí přemístění
$\bar{\epsilon}_{ij}, \bar{\epsilon}$	tenzor rozdílu polí deformací
$\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}$	tenzor rozdílu polí napětí
$\epsilon_{ij}^*, \epsilon^*$	tenzor ekvivalentní vlastní deformace

Exponenciální algoritmus

ϑ_j	1. pomocná konstanta j -tého Kelvinova-Voigtova článku
ψ_j	2. pomocná konstanta j -tého Kelvinova-Voigtova článku
$\Delta\epsilon$	přírůstek deformace za konstantního napětí
$\Delta\sigma$	úbytek napětí za konstantní deformace
\check{E}	algoritmická tuhost celého řetězce
\check{E}_{eff}	algoritmická efektivní tuhost
$\Delta\gamma$	přírůstek smykové deformace za konstantního napětí
$\Delta\tau$	úbytek smykového napětí za konstantní deformace
$\check{\mu}$	algoritmická smyková tuhost celého řetězce
$\check{\mu}_{\text{eff}}$	algoritmická smyková efektivní tuhost

Kapitola 1

Kompozitní materiály

1.1 Definice a vymezení kompozitů

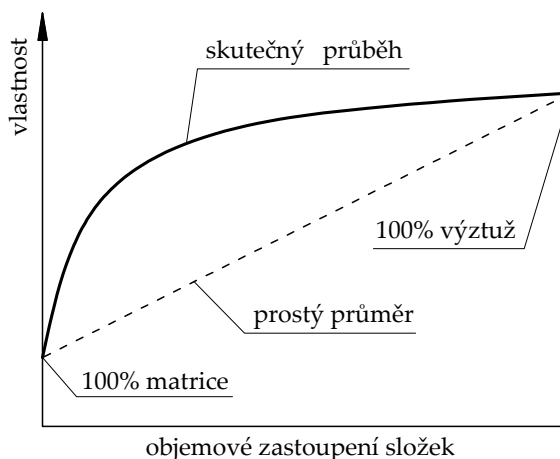
Fyzikálním spojením dvou a více fází rozdílného chemického složení vznikají *heterogenní materiály*. Pokud takové smísení materiálů, s odlišnými mechanickými a fyzikálními vlastnostmi, vede ke vzniku soudržné struktury s materiálovými charakteristikami nedosažitelnými samostatně žádnou ze složek, jsou tyto materiálové systémy označovány jako *kompozitní materiály (složené materiály)*. Jak řada definic kompozitních materiálů (některé lze nalézt v [27]) zdůrazňuje, vlastnosti jednotlivých fází se, s přihlédnutím k jejich tvaru a vzájemnému geometrickému uspořádání, vhodně doplňují a vzniká tak materiál s přídatnými nebo lepšími vlastnostmi, než jaké mají jednotlivé složky samostatně nebo pouze náhodně smíšené dohromady.

Při výrobě materiálů pro průmyslové použití se tak do popředí dostává i další podstatná výhoda kompozitních materiálů, kterou je účinnější využití materiálové hmoty a tím i snižování surovinové a energetické náročnosti výroby materiálů požadovaných vlastností. S rozvojem technologických možností zpracování a výroby materiálů nacházejí kompozitní materiály stále větší uplatnění v technické praxi. A je možno říci, že v současné době většina materiálů používaných ve stavebnictví má charakter kompozitu.

Jednotlivé materiálové složky se obvykle liší nejen svými vlastnostmi, ale i svým tvarem a geometrickým uspořádáním. Většinou je jedna fáze kompozitu spojitá a nazývá se *matrice*. Nespojité fáze se nazývá *inkluze* a má nejčastěji charakter *výztuže*. Matrice většinou má v porovnání se zpevňující fází nižší pevnostní charakteristiky, avšak vyšší plasticitu a houževnatost. Výztuž pak má oproti matici obvykle výrazně lepší mechanické parametry (modul pružnosti, pevnost, tvrdost).

Pro kompozitní materiály je charakteristický tzv. *synergický efekt*, kdy vzájemné spolupůsobení fází kompozitu způsobuje, že vlastnosti kompozitu jsou lepší, než by odpovídalo prostému průměru vlastností jednotlivých složek (viz obr. 1.1). Pomocí jednoduchých směšovacích pravidel lze

stanovit pouze některé základní parametry kompozitů, např. objemovou hmotnost. Většinu jejich vlastností, vč. tuhosti, pevnosti a tvrdosti, už synergické působení značně ovlivňuje a jejich přesnější určení není jednoduché. Synergický efekt u kompozitních materiálů souvisí buď s jejich strukturou danou geometrickým uspořádáním jednotlivých složek, nebo interakcí mezi povrchy jednotlivých fází.



Obrázek 1.1: Synergický efekt u kompozitního materiálu.

Kompozitní materiály nejsou jen umělé produkty vyrobené člověkem, ale hojně se vyskytují i v přírodě, a to někdy ve velmi sofistikované podobě. Typickým představitelem přírodního kompozitu je dřevo, které je tvořeno celulóзовými vlákny uloženými v ligninu. Ale kompozitní charakter mají i některé živočišné tkáně, jimiž jsou tvořeny např. cévní stěny. Umělé kompozitní materiály se vyrábějí mechanickým mísením nebo spojováním jednotlivých složek. Tím se odlišují od slitin, u kterých jednotlivé fáze vznikají fázovými přeměnami při tuhnutí. Nejznámější umělý kompozit je bezpochyby beton, bez kterého si lze dnešní stavebnictví jen těžko představit.

1.2 Rozdělení kompozitů

Vzhledem k tomu, že vlastnosti kompozitních materiálů ovlivňuje mnoho různých faktorů, lze jejich klasifikaci provést podle celé řady parametrů. Rozdělení kompozitů tak může být provedeno dle vzájemného uspořádání jednotlivých fází, tvaru a materiálu výztuže, materiálu matrice, technologie výroby apod.

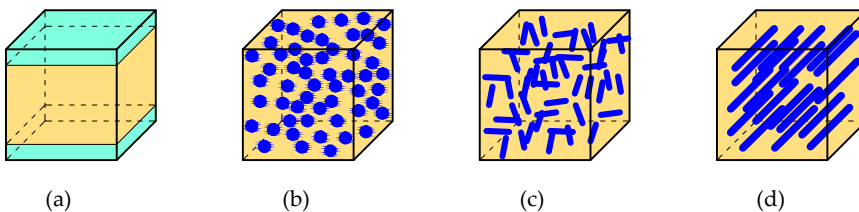
S ohledem na problematiku řešenou v této práci a terminologii používanou v dalších kapitolách je zde zmíněno rozdělení podle vzájemného uspořádání jednotlivých fází a geometrického tvaru výztuže. Z tohoto hlediska lze kompozity rozdělit na:

vrstvené kompozity (sendvičové kompozity) – jsou tvořené dvěma nebo více vrstvami (lamelami) s rozdílnými vlastnostmi. Vrchní vrstva zde často slouží k určité ochraně vrstvy zakryté, která pak zpravidla zajišťuje vlastní funkci kompozitu. Může se pak jednat o zvýšení odolnosti základní vrstvy proti mechanickému opotřebení, korozi, tepelnému působení apod.

kompozity částicové – jsou tvořeny matricí a v ní rovnoměrně, nebo náhodně rozmístěnými inkluzemi u nichž jeden rozměr nesmí výrazně přesahovat ostatní. Vyztužující částice mají tvar kulovitý, destičkovitý, tyčinkovitý, popř. nepravidelný. Z makroskopického hlediska pak lze tyto kompozity považovat za materiály izotropní.

kompozity vláknové (s krátkými vlákny) – jsou rovněž tvořeny matricí a inkluzemi (vlákny), které jsou však v jednom směru výrazně rozměrnější než v ostatních směrech. Délka vláken je však výrazně menší v porovnání s celkovou velikostí výrobku. Z makroskopického hlediska za izotropní lze tyto kompozity považovat jen v případě, že vyztužná vlákna jsou v matrici rozmístěna zcela náhodně. V opačném případě je již třeba počítat s anizotropním chováním.

kompozity vláknové (s dlouhými, kontinuálními vlákny) – u tohoto typu kompozitu je délka vláken srovnatelná s rozměry výrobku. Uspořádání kontinuálních vláken má řadu variant. Vlákna mohou být v matrici uspořádána v jednom nebo více směrech, popř. i spletena do rohoží, kde pak již matrice ani nemusí mít významnou roli. V každém případě je však tento kompozit nutné považovat za materiály anizotropní.



Obrázek 1.2: Rozdělení kompozitů: (a) vrstvený kompozit, (b) částicový kompozit, (c) izotropní vláknový kompozit (s krátkými vlákny), (d) anizotropní vláknový kompozit (s dlouhými vlákny).

1.3 Matrice a vláknové výztuže kompozitů

Jak je uvedeno v předchozím bodě, lze kompozitní materiály (s částicovými a vláknovými inkluzemi) dělit i podle materiálu použitého jako matrice. Na způsob homogenizace kompozitů mají zásadní význam reologické vlastnosti matrice, které jsou samozřejmě dané použitým materiálem. Schopnost dotvarování mají především silikátové a polymerní matrice. U silikátů jsou však viskoelastické vlastnosti silně závislé na stáří materiálu, s čímž tato studie nepočítá. Pro zde řešené příklady je uvažováno s matricí polymerní. Avšak kromě faktu, že se jedná o viskoelastickou matici bez stárnutí s určitými materiálovými parametry, není pro srovnání metod výpočtu odezvy třeba bližší specifikace matrice, a proto je zde toto rozdělení (převzaté z [27]) uvedeno spíše pro představu o v současné době používaných materiálech.

Kovové matrice: Jako kovové matrice jsou nejčastěji používané lehké slitiny hliníku (případně hořčíku a titanu) s výztuží z bórových, uhlíkových nebo křemíkokarbidových vláken. Kovové matrice mají řadu výhod, jakými jsou elektrická a tepelná vodivost, nehořlavost, smyková pevnost, tvárnost, odolnost proti obrusu, možnost povlakování, spojování, tvarování, vyšší tepelná odolnost, odolnost vůči erozi a povrchovému poškození.

Keramické matrice: Keramické matrice jsou materiály lehké a tvrdé, většinou však křehké. Jejich výhodou je vysoká pevnost i při vysokých teplotách a odolnost proti oxidaci. Jako výztuž pro keramickou matici jsou použitelná pouze některá vlákna, kvůli nebezpečí nesoudržnosti mezi maticí a vlákny. Odolnost proti teplotnímu šoku může zlepšit použití vláken s vyšší tepelnou vodivostí než má matrice.

Silikátové matrice: Jedná se o materiály na bázi cementové pasty a sádry. Matrice na bázi portlandského cementu je silně alkalická, což způsobuje korozi většiny skleněných vláken. Proto musí být skleněná výztužná vlákna buď chráněna, nebo se používají speciální typy alkalicko-odolných skel. V sádrové matici jsou skleněná vlákna obvykle pokryta polyvinylacetátovým povlakem, který zvyšuje soudržnost s maticí. Klasickým příkladem kompozitního materiálu se silikátovou maticí a rozptýlenou výztuží je vláknobeton.

Polymerní matrice: Vláknové kompozity na bázi polymerních matic mají nejdelší tradici. Jejich vlastnosti i výrobní postup se výrazně liší podle toho, je-li použitý polymer termoplast nebo termoset (reaktoplast).

Termoplastové matrice: Výhodou termoplastových matic je jejich nízká cena daná snadným způsobem jejich výroby i při složitých tvarech finálních produktů. Další výhody spočívají v poměrně dobré dimenzionální stabilitě,

malém obrusu, zvýšené pevnosti, modulu pružnosti a houževnatosti. Pro vyztužení vlákný se nejčastěji používají jako matrice polyamidy (nylon), polyethylen, polypropylen, polykarbonát, polysulfon. K jejich vyztužení se používají vlákna skleněná, uhlíková, aramidová nebo jejich kombinace (hybridní kompozity).

Termosetové (reaktoplastové) matrice: Termosety vyztužené vlákny jsou nesporně nejrozšířenější konstrukční kompozity. Matricemi jsou nejčastěji polyesterové, epoxidové, melaminové a siloxylové pryskyřice. Výztužná vlákna jsou buď cíleně uspořádána, nebo náhodně orientována. Nejvíce se uplatňují vlákna uhlíková, bórová, keramická, kovová, aramidová nebo jejich kombinace. Při aplikaci skleněných vláken není dosahováno dostatečné tuhosti výsledného kompozitu. Pro některé aplikace (zejména z důvodu snížení ceny) se využívají i přírodní vlákna (juta, sisal), nejčastěji v kombinaci se skleněnými vlákny.

Vláknové výztuže kompozitů: Pro vyztužování matrice je k dispozici široké spektrum vláken. Materiál vlákna má být pevný, tuhý, lehký a z technologického hlediska výroby kompozitů často musí mít vysokou teplotu tání. Vedle přírodních vláken z bavlny či celulosy se používají vlákna kovová, slitinová, whiskery z keramických a metalických materiálů, polykrystalická vlákna z různých keramických materiálů, skleněná a minerální vlákna, polymerní vlákna. Podle typu struktury materiálu lze vlákna dělit na amorfní (sklo, křemen, bór), monokrystalická (keramická, kovová), polykrystalická (keramická, kovová, uhlíková), multifázová (amorfní B na C nebo W, karbidy) a makromolekulární (organická).

Z hlediska zkoumání mechanických vlastností kompozitů je důležité, že pro vlastnosti vláken je charakteristická anizotropie. Pevnost i modul pružnosti bývají ve směru osy vyšší než ve směru kolmém k ose, a proto mají kompozity nejvyšší pevnost ve směru vyztužujících vláken. Vyztužení vlákný je tak využíváno zejména ke zvýšení pevnosti, modulu pružnosti (tuhosti) a v některých případech rovněž houževnatosti.

Kapitola 2

Viskoelasticita

2.1 Základní vztahy

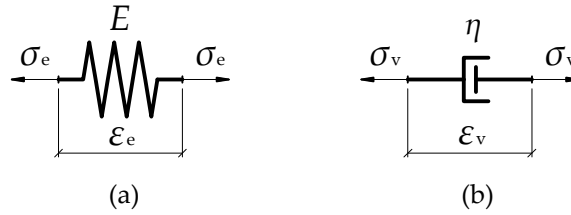
U řady materiálů bylo pozorováno, že u nich pod vlivem konstantního napětí dochází k trvalému nárůstu jejich deformace. Tento jev je označován jako *dotvarování*. Rovněž při konstantní deformaci u těchto materiálů dochází k postupnému úbytku napětí, které tuto deformaci vyvolalo. Tento jev je označován jako *relaxace*. Dotvarování a relaxace spolu úzce souvisí a jsou způsobeny skutečností, že přetvárné procesy v těchto materiálech probíhají s určitým zpožděním. Zde uvedený teoretický úvod do viskoelasticity je omezen na problémy řešené v této práci a do značné míry čerpá z [19], kde lze nalézt podrobnější a komplexnější informace.

Nejjednodušší teorií popisující časově závislé chování materiálů je *teorie lineární viskoelasticity*, která představuje nejjednodušší rozšíření teorie lineární pružnosti. I zde jsou tudíž hlavním předmětem zájmu vztahy mezi napětím a deformací, které jsou však funkcemi času.

Základním předpokladem lineární viskoelasticity je platnost principu superpozice. V tomto případě jsou vlastnosti materiálu jednoznačně popsány funkcí $J(t, t_0)$, nazvanou *funkce poddajnosti*, popř. s ní související funkcí $R(t, t_0)$, nazvanou *relaxační funkce*.

Chování materiálu je možno, s jistou mírou přesnosti, popsat matematickými vztahy, které odpovídají určitému reologickému modelu. Reologické modely jsou tvořeny sériovým a paralelním skládáním základních reologických článků. Těmi jsou *pružný článek (pružina)* a *viskózní článek (tlumič)*, které jsou znázorněny na obr. 2.1.

Pro tyto články platí následující konstitutivní vztahy (je uvažován nejjednodušší případ jednoosé napjatosti pro izotropní materiál bez stárnutí):



Obrázek 2.1: Základní reologické články: (a) pružný článek, (b) viskózní článek.

- pružný článek (pružina)

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) \quad (2.2)$$

kde E je Youngův modul pružnosti.

- viskózní článek (tlumič)

$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

kde η je viskozita. Vzhledem k tomu, že pro lineárně viskózní tlumič je napětí dle (2.3) úměrné derivaci deformace podle času, tj. její rychlosti, je jednotkou viskozity Pa s.

Sériovým spojením pružného a viskózního článku vzniká reologické schéma nazývané *Maxwellův model*. Z obrázku 2.2 je zřejmé, že napětí působící v jednotlivých člancích je stejné a rovné celkovému napětí. Celková deformace modelu je však rovna součtu deformací jednotlivých článků, tj.

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) = \sigma_v(t) \quad (2.5)$$

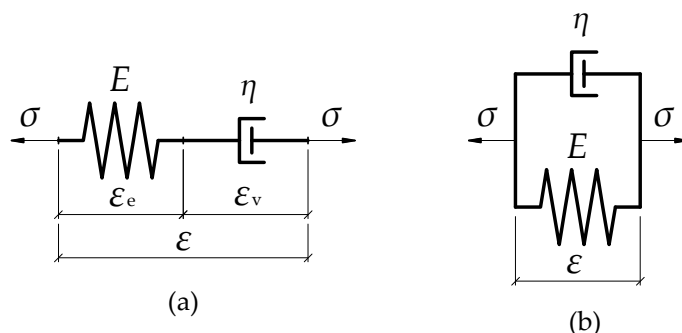
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) \quad (2.6)$$

kde napětí a deformace v pružině je označeno indexem e a v tlumiči indexem v .

Paralelním spojením jednotlivých článků vzniká *Kelvinův-Voigtův model*. Zde je z obrázku 2.2 zřejmé, že vztahy pro celkové napětí a deformaci jsou přesně opačné než u Maxwellova modelu, tj.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) = \varepsilon_v(t) \quad (2.7)$$

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_v(t) \quad (2.8)$$



Obrázek 2.2: Základní reologické modely: (a) Maxwellův model, (b) Kelvinův-Voigtův model.

Jak již bylo zmíněno na začátku tohoto oddílu, hlavním předmětem zájmu lineární viskoelastivity jsou vztahy mezi napětím a deformací, tj. matematicky zapsáno jako následující funkční závislosti

$$\varepsilon(t) = f(\sigma(t)) \quad \text{resp.} \quad \sigma(t) = f(\varepsilon(t))$$

Základem je zjištění odezvy na vážený jednotkový skok, tj. případ kdy řídicí veličina v určitém čase t_0 , začne náhle působit a udržuje se dále na své konstantní hodnotě. Jeho matematická definice je uvedena v dodatku B.

Zjištění průběhu deformace, jako odezvy na skokový nárůst napětí je prováděno tzv. *dotvarovací zkouškou*, tj. je hledána funkce $\varepsilon(t)$ pro $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \mathcal{H}(t - t_0)$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ Průběh deformace je pak možno zapsat ve tvaru

$$\varepsilon(t) = \tilde{\sigma} J(t, t_0) \quad (2.9)$$

kde $J(t, t_0)$ je již výše zmíněná funkce poddajnosti.

Pokud je jako řídicí veličina uvažována předepsaná deformace a jako odezva zjišťováno napětí jedná se o tzv. *relaxační zkoušku*. Pak pro $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \mathcal{H}(t - t_0)$, kde $\tilde{\varepsilon} = \text{konst.}$ je hledána funkce $\sigma(t)$ a závislost je možno zapsat vztahem

$$\sigma(t) = \tilde{\varepsilon} R(t, t_0) \quad (2.10)$$

kde $R(t, t_0)$ je rovněž již výše zmíněná relaxační funkce.

Jelikož funkce poddajnosti a relaxační funkce mají v teorii viskoelastivity zcela zásadní význam je vhodné pro základní modely uvést jejich odvození. Tak jako u vztahů (2.1) až (2.4) je dále rovněž uvažován případ jednoosé napjatosti pro izotropní materiál bez stárnutí. Za nestárnoucí je považován

materiál, jehož materiálové vlastnosti (tj. zde modul pružnosti E a viskozita η) se s časem nemění. Pak je funkci poddajnosti, popř. relaxační funkci (obecně funkce dvou proměnných tj. stáří materiálu t a počátku působení napětí, resp. deformace t_0) možno zapsat jako

$$J(t, t_0) = J_0(t - t_0) \quad \text{resp.} \quad R(t, t_0) = R_0(t - t_0)$$

tj. funkci pouze jedné proměnné (doby působení napětí, resp. deformace).

Odvození je provedeno jednak „klasickým“ způsobem řešením diferenciálních rovnic a jednak použitím Laplaceovy transformace (ilustrující zde její hlavní sílu při řešení integrodiferenciálních rovnic). Dále však bude ukázáno mnohem důmyslnější použití Laplaceovy transformace při zjišťování časové závislosti mezi deformací a napětím pro lineárně viskoelastický materiál.

2.2 Maxwellův model

Vzhledem k rovnosti napětí dle vztahu (2.5) jsou u Maxwellova modelu neznámé okamžité hodnoty těchto proměnných: $\varepsilon_e(t)$, $\varepsilon_v(t)$, $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$. K jejich řešení jsou k dispozici tři rovnice (2.1), (2.3) a (2.6). Pro přehlednost jsou zde zopakovány

$$\sigma_e(t) = \sigma(t) = E \varepsilon_e(t) \quad (2.11)$$

$$\sigma_v(t) = \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}_v(t) \quad (2.12)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) \quad (2.13)$$

Pro určení funkce poddajnosti je uvažována dotvarovací zkouška, tj. působení napětí $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ a pro zjednodušení je uvažováno $t_0 = 0$. Pak pro deformaci pružiny lze dle (2.11) jednoduše zapsat

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad (2.14)$$

a dle (2.12) pro rychlost deformace tlumiče

$$\dot{\varepsilon}_v(t) = \frac{d\varepsilon_v(t)}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta} = \frac{\tilde{\sigma}}{\eta} \quad (2.15)$$

Integrací této rovnice se dostává výraz pro deformaci tlumiče jako

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{\eta} t + C \quad (2.16)$$

kde C je integrační konstanta. Tu je možno určit z počáteční podmínky, která tak doplní tři výše uvedené rovnice pro řešení problému o čtyřech neznámých. Tlumič reálně není schopen okamžité skokové deformace a tak v okamžiku počátku působení napětí $t = 0$ je jeho deformace nulová. Z počáteční podmínky $\varepsilon_v(0) = 0$ pak vyplývá, že $C = 0$.

Dosazením vztahů pro dílčí deformace do (2.13) se získá vztah popisující celkovou deformaci modelu jako

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{E} + \frac{\tilde{\sigma}}{\eta} t = \tilde{\sigma} \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (2.17)$$

Tento funkční vztah je již ve tvaru rovnice (2.9) a jelikož byl uvažován model bez stárnutí (čímž bylo samozřejmě umožněno i takto jednoduché řešení) lze funkci poddajnosti pro Maxwellův model zapsat jako

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \mathcal{H}(t) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.18)$$

kde vynásobení Heavisideovou funkcí $\mathcal{H}(t)$ odpovídá skutečnosti, že řešení bylo provedeno pro $t \geq 0$, zatímco pro $t < 0$ je deformace nulová. Dále je zde zaveden charakteristický (zde tzv. relaxační) čas $\tau = \eta/E$, ve kterém je poddajnost pružiny $1/E$ rovna poddajnosti tlumiče τ/η .

Pro použití Laplaceovy transformace je vhodné nejprve určit Laplaceovy obrazy konstitutivních vztahů (2.1) až (2.4) pro základní reologické články. Pro vztahy u pružného článku je to záležitost zcela triviální, pro vztahy u tlumiče je třeba použít větu o obrazu derivace předmětu a větu o obrazu integrace předmětu dle dodatku B. Pak pro

- pružný článek (pružinu)

$$\hat{\sigma}(p) = \mathcal{L}\{E \varepsilon(t)\} = E \hat{\varepsilon}(p) \quad (2.19)$$

$$\hat{\varepsilon}(p) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{E} \sigma(t) \right\} = \frac{1}{E} \hat{\sigma}(p) \quad (2.20)$$

- viskózní článek (tlumič)

$$\hat{\sigma}(p) = \mathcal{L}\{\eta \dot{\varepsilon}(t)\} = \eta p \hat{\varepsilon}(p) - \eta \varepsilon(0_+) \quad (2.21)$$

$$\hat{\varepsilon}(p) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\xi) d\xi \right\} = \frac{1}{\eta} \frac{1}{p} \hat{\sigma}(p) \quad (2.22)$$

Dále, vzhledem k lineárnosti Laplaceovy transformace, lze rovnici (2.13) zapsat v obrazovém tvaru jako

$$\hat{\varepsilon}(p) = \hat{\varepsilon}_e(p) + \hat{\varepsilon}_v(p) \quad (2.23)$$

a dosazením za obrazy deformací pružiny a tlumiče z (2.20) a (2.22), s uvážením, že rovnost napětí přenášeného sériově spojenými články platí samozřejmě i pro jeho Laplaceův obraz, se již získává obrazový konstitutivní vztah pro Maxwellův model jako

$$\hat{\varepsilon}(p) = \frac{1}{E} \hat{\sigma}(p) + \frac{1}{p\eta} \hat{\sigma}(p) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{p\eta} \right) \hat{\sigma}(p) \quad (2.24)$$

Pro odvození funkce poddajnosti je nutno za působící napětí uvažovat vážený jednotkový skok, tj. $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$, jehož Laplaceův obraz je dle dodatku B

$$\hat{\sigma}(p) = \mathcal{L}\{\tilde{\sigma} \mathcal{H}(t)\} = \tilde{\sigma} \frac{1}{p} \quad (2.25)$$

Obrazovou deformaci, jako odezvu na skokový průběh napětí lze pak vyjádřit jako

$$\hat{\varepsilon}(p) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{p\eta} \right) \frac{1}{p} \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \frac{1}{E} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2\tau} \right) \quad (2.26)$$

kde relaxační čas je i v Laplaceově prostoru, vzhledem k časově nezávislým materiálovým charakteristikám pro nestárnoucí materiál, určen jako $\tau = \eta/E$.

Obrazovou funkci poddajnosti pro Maxwellův model lze tedy zapsat jako

$$\hat{J}_0(p) = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2\tau} \right) \quad (2.27)$$

a inverzí do časové oblasti, např. dle slovníku v dodatku B, se dostává

$$J_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2\tau} \right) \right\} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.28)$$

tj. stejný vztah jako v (2.18).

Pro určení relaxační funkce je uvažována relaxační zkouška, tj. $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\varepsilon} = \text{konst.}$ a pro zjednodušení je opět uvažováno $t_0 = 0$. Je tedy nutné vyjádřit závislost napětí $\sigma(t)$, při sériovém zapojení přenášeného jak pružným, tak viskózním článkem, na celkové deformaci $\varepsilon(t)$, která je dle podmínky kompatibility (2.13) součtem deformací jednotlivých článků. Pro pružný článek je závislost přímo dána rovnicí (2.11). Pro viskózní článek je však dle rovnice (2.12) napětí závislé na rychlosti deformace. Pro řešení je pak možno rovnice (2.11) a (2.13) zderivovat podle času a získá se tak

$$\dot{\sigma}(t) = E \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.29)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_v(t) \quad (2.30)$$

Dosazením vztahů $\dot{\varepsilon}_e(t) = \dot{\sigma}(t)/E$ a $\dot{\varepsilon}_v(t) = \sigma(t)/\eta$ získaných z (2.12) a (2.29) do (2.30) se dostává diferenciální rovnice

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) = \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.31)$$

Ta vyjadřuje závislost napětí na obecném časovém vývoji předepsané deformace. Pro případ relaxační zkoušky, kde $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} = \text{konst.}$ pro $t \geq 0$, se však podstatně zjednoduší na tvar s nulovou pravou stranou

$$\frac{1}{E} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) = 0 \quad (2.32)$$

a jejím obecným řešením je

$$\sigma(t) = C e^{-\frac{E}{\eta} t} = C e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.33)$$

kde $\tau = \eta/E$ je již výše zmíněný relaxační čas a C je integrační konstanta. Tu je nutné určit opět z vhodné počáteční podmínky. Při skokové změně deformace připadá celá její hodnota nejprve na deformaci pružiny, protože skoková deformace tlumiče by v něm vyvolala nekonečné napětí. Pak napětí v pružině v čase $t = 0$ je $\sigma(0) = E \tilde{\varepsilon}$, což je požadovaná počáteční podmínka a po její aplikaci v rovnici (2.33) se získá $C = E \tilde{\varepsilon}$. Dosazením do (2.33) se již dostává vztah popisující průběh napětí v čase jako

$$\sigma(t) = E \tilde{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.34)$$

Tento funkční vztah je již ve tvaru rovnice (2.10) a pro materiál bez stárnutí je možno relaxační funkci pro Maxwellův model zapsat jako

$$R_0(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{H}(t) \quad (2.35)$$

Pro odvození relaxační funkce Maxwellova modelu pomocí Laplaceovy transformace je již možno vyjít z obrazového konstitutivního vztahu (2.24), který se upraví do formy závislosti napětí na deformaci

$$\hat{\sigma}(p) = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{p\eta}} \hat{\varepsilon}(p) = \frac{E p \eta}{p \eta + E} \hat{\varepsilon}(p) \quad (2.36)$$

Laplaceův obraz váženého jednotkového skoku při aplikaci relaxační zkoušky, tj. $\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\varepsilon} = \text{konst.}$, je analogicky k (2.25)

$$\hat{\varepsilon}(p) = \mathcal{L}\{\tilde{\varepsilon} \mathcal{H}(t)\} = \tilde{\varepsilon} \frac{1}{p} \quad (2.37)$$

Obraz napětí, jako odezvy na tento skok, je pak

$$\hat{\sigma}(p) = \frac{E p \eta}{p \eta + E} \frac{1}{p} \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \frac{E \eta}{p \eta + E} = \tilde{\varepsilon} E \frac{\tau}{p \tau + 1} = \tilde{\varepsilon} E \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \quad (2.38)$$

a odtud obrazová relaxační funkce pro Maxwellův model je dána výrazem

$$\widehat{R}_0(p) = E \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \quad (2.39)$$

a inverzí do časové oblasti se získává

$$R_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ E \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right\} = E e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{H}(t) \quad (2.40)$$

tj. opět stejný vztah jako v (2.35).

2.3 Kelvinův-Voigtův model

Pro určení funkce poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův model je možno do značné míry postupovat analogicky k výše uvedenému postupu. Zde jsou však vzhledem k rovnosti deformací dle vztahu (2.7) neznámé okamžité hodnoty těchto proměnných: $\sigma_e(t)$, $\sigma_v(t)$, $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$. K jejich řešení jsou k dispozici tři rovnice (2.1), (2.3) a (2.8). Pro přehlednost jsou zde opět zopakovány

$$\sigma_e(t) = E \varepsilon_e(t) = E \varepsilon(t) \quad (2.41)$$

$$\sigma_v(t) = \eta \dot{\varepsilon}_v(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (2.42)$$

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_v(t) \quad (2.43)$$

Dosazením vztahů (2.41) a (2.42) pro neznámá napětí v pružině a tlumiči do (2.43) se získává následující diferenciální rovnice, která vyjadřuje závislost deformace na obecném časovém vývoji předepsaného napětí.

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \sigma(t) \quad (2.44)$$

Pro případ dotvarovací zkoušky, kde $\sigma(t) = \tilde{\sigma} = \text{konst.}$ pro $t \geq 0$, přechází do tvaru s konstantní pravou stranou

$$E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) = \tilde{\sigma} \quad (2.45)$$

a její obecné řešení má tvar

$$\varepsilon(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{E} + C e^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} + C e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.46)$$

kde C je integrační konstanta a $\tau = \eta/E$ je opět charakteristický (zde tzv. retardační) čas. Integrační konstantu lze určit z podobné počáteční podmínky jako u Maxwellova modelu. Zde však z nulové deformace tlumiče v čase $t = 0$ vyplývá i celková nulová deformace, tj. počáteční podmínka $\varepsilon(0) = 0$ a z ní se určí, že $C = -\tilde{\sigma}/E$.

Finální vztah popisující časový vývoj deformace pro Kelvinův-Voigtův model, při dotvarovací zkoušce, je tak

$$\varepsilon(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{E} - \frac{\tilde{\sigma}}{E} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.47)$$

a z něj je možno funkci poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův model zapsat ve tvaru

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \mathcal{H}(t) \quad (2.48)$$

Při použití Laplaceovy transformace pro odvození funkce poddajnosti Kelvinova-Voigtova modelu lze rovnici (2.43), vzhledem k lineárnosti Laplaceovy transformace, zapsat v obrazovém tvaru jako

$$\hat{\sigma}(p) = \hat{\sigma}_e(p) + \hat{\sigma}_v(p) \quad (2.49)$$

a nyní do ní dosadit za obrazy napětí vztahy (2.19) a (2.21), čímž se dostává

$$\hat{\sigma}(p) = E \hat{\varepsilon}(p) + \eta p \hat{\varepsilon}(p) - \eta \varepsilon(0_+) \quad (2.50)$$

Jak je již výše uvedeno, počáteční podmínka je zde určena jako $\varepsilon(0) = 0$ a pak se vztah (2.50) zjednoduší na následující obrazový konstitutivní vztah pro Kelvinův-Voigtův model

$$\hat{\sigma}(p) = E \hat{\varepsilon}(p) + \eta p \hat{\varepsilon}(p) = (E + \eta p) \hat{\varepsilon}(p) \quad (2.51)$$

tj. ve formě závislosti deformace na napětí jako

$$\hat{\varepsilon}(p) = \frac{1}{(E + \eta p)} \hat{\sigma}(p) \quad (2.52)$$

Dosazením obrazu váženého jednotkového skoku napětí dle (2.25) se již dostává funkční vztah pro jím vyvolanou obrazovou deformaci

$$\hat{\varepsilon}(p) = \frac{1}{(E + \eta p)} \frac{1}{p} \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \frac{1}{E\tau} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \quad (2.53)$$

Obrazovou funkci poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův model lze pak zapsat jako

$$\hat{J}_0(p) = \frac{1}{E\tau} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \quad (2.54)$$

a inverzí do časové oblasti, se dostává

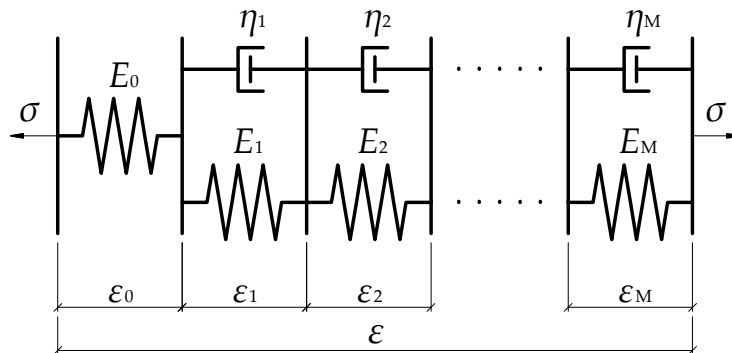
$$J_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{E\tau} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)} \right\} = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \mathcal{H}(t) \quad (2.55)$$

tj. opět stejný vztah jako v (2.48).

Je zřejmé, že tento model není schopen zachytit okamžitou deformaci po skokovém nárůstu napětí. Pro získání reologického modelu, který přesněji (a v delším časovém intervalu) vystihuje viskoelastické chování určitého reálného materiálu, je třeba přejít k poněkud složitější kombinaci pružných a viskózních článků, než jaký nabízejí Maxwellův a Kelvinův-Voigtův model.

2.4 Kelvinův-Voigtův řetězec

Další části tohoto textu jsou zaměřeny na sledování funkční časové závislosti deformace $\varepsilon(t)$, jako odezvy na obecný průběh předepsaného napětí $\sigma(t)$. Pro účely takového zkoumání je velmi vhodný zobecněný Kelvinův-Voigtův model, neboli Kelvinův-Voigtův řetězec. Ten je tvořen sériovým zapojením pružného a několika Kelvinových-Voigtových článků (viz obr. 2.3). Pružný článek eliminuje hlavní nedostatek Kelvinova-Voigtova modelu, tj. neschopnost zachytit okamžitou deformaci.



Obrázek 2.3: Kelvinův-Voigtův řetězec.

Pro Kelvinův-Voigtův řetězec složený z jedné pružiny o tuhosti E_0 a M Kelvinových-Voigtových článků s tuhostmi E_j a viskozitami η_j , kde $j = 1, 2, \dots, M$ je celková deformace modelu rovna součtu deformací jednotlivých článků, tj.

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_M(t) \quad (2.56)$$

Každá jednotka však přenáší stejné celkové napětí $\sigma(t)$, které je samozřejmě pro Kelvinovy-Voigtovy články rozděleno na část přenášenou pružinou $\sigma_e(t)$ a část přenášenou tlumičem $\sigma_v(t)$. Pak je možno podmínky rovnováhy pro napětí zapsat jako

$$\sigma(t) = \sigma_{0,e}(t) \quad \sigma(t) = \sigma_{j,e}(t) + \sigma_{j,v}(t) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.57)$$

Dosažením vztahů (2.1) a (2.3) se získává soustava vzájemně nezávislých diferenciálních rovnic

$$E_0 \varepsilon_0(t) = \sigma(t) \quad E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \sigma(t) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.58)$$

Výpočtem deformací jednotlivých článků $\varepsilon_j(t)$ z rovnic (2.58) a jejich součtem dle (2.56) se získá celková deformace řetězce $\varepsilon(t)$, jako odezva na obecný průběh zatížení $\sigma(t)$.

Pro určení funkce poddajnosti Kelvinova-Voigtova řetězce je opět aplikováno zatížení $\sigma(t) = \tilde{\sigma} = \text{konst.}$ pro $t \geq 0$ a rovnice (2.58) přejdou na tvar

$$E_0 \varepsilon_0(t) = \tilde{\sigma} \quad E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \tilde{\sigma} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (2.59)$$

Řešení diferenciální rovnice tohoto tvaru již bylo uvedeno v (2.47) a sumací dle (2.56) se získává časový průběh celkové deformace řetězce jako

$$\varepsilon(t) = \frac{\tilde{\sigma}}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{\tilde{\sigma}}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (2.60)$$

kde $\tau_j = \eta_j / E_j$ jsou retardační časy jednotlivých článků.

Funkci poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec je pak možno zapsat ve tvaru

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (2.61)$$

tj. jedná se o součet poddajností jednotlivých článků.

Pro úplnost je zde vhodné uvést i Laplaceův obraz funkce poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec. Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace se jedná o vztah

$$\hat{J}_0(p) = \frac{1}{p E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau_j}\right)} \quad (2.62)$$

2.5 Odezva na obecné zatížení

S využitím principu superpozice je možno definovat funkční závislost časového vývoje deformace $\varepsilon(t)$ na libovolném průběhu předepsaného zatížení $\sigma(t)$. Při znalosti funkce poddajnosti $J(t, t_0)$, která popisuje vývoj deformace jako odezvu na skokový nárůst napětí z nulové hodnoty na hodnotu $\bar{\sigma} = \text{konst.}$ v časovém okamžiku t_0 , se odpovídající deformace v čase $t \geq t_0$ vypočítá jako $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} J(t, t_0)$.

Nyní je možno přistoupit k úvaze, že obecný průběh funkce $\sigma(t)$ lze aproximovat součtem dílčích skoků jako

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k \mathcal{H}(t - t_k) \quad (2.63)$$

a odpovídající vývoj deformace lze pak vyjádřit jako

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k J(t, t_k) \quad (2.64)$$

Přesnost aproximace funkce $\sigma(t)$ dle (2.63) je samozřejmě dána délkou intervalu, ve kterém je spojitý průběh funkce nahrazen skokovými přírůstky. Snižováním délky intervalu mezi sousedními skoky a současným zmenšováním velikosti těchto skoků se, pro spojitě diferencovatelnou funkci $\sigma(t)$, ze sumy v (2.64) limitním přechodem stane integrál a vztah pro výpočet deformace (2.64) lze zapsat jako

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t J(t, \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (2.65)$$

kde t_0 je časový okamžik od kterého začalo napětí působit, tj. pro $t < t_0$ je $\sigma(t) = 0$. Diskrétní průběh času, reprezentovaný v (2.64) konečným počtem časových okamžiků t_k , zde byl nahrazen spojitou integrační proměnnou ξ a konečné přírůstky napětí $\Delta\sigma_k$ byly nahrazeny infinitezimálními přírůstky $d\sigma = \dot{\sigma}(\xi) d\xi$.

Pro případ, kdy se napětí změní skokem na počátku zatěžování, tj. v čase t_0 z nuly na σ_0 , a dále se vyvíjí spojitě, je nutno vztah pro výpočet deformace rozšířit na

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0) \sigma_0 + \int_{t_0}^t J(t, \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (2.66)$$

Pro materiál bez stárnutí, tj. s funkcí poddajnosti $J_0(t - t_0)$, se pro závislost časového průběhu deformace $\varepsilon(t)$ na obecném průběhu zatěžovacího napětí $\sigma(t)$ (nemění-li se napětí skokem a počátek zatěžování je v okamžiku $t_0 = 0$) dostává konvoluční integrál

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J_0(t - \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (2.67)$$

2.6 Korespondenční princip lineární viskoelastivity

Použitím Laplaceovy transformace, podle věty o obrazu konvoluce předmětů a věty o obrazu derivace předmětu (viz dodatek B), lze vztah (2.67) v Laplaceově prostoru zapsat jako závislost obrazu deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ na obrazu obecného průběhu zatěžovacího napětí $\hat{\sigma}(p)$

$$\hat{\varepsilon}(p) = \hat{J}_0(p) \hat{\sigma}(p) = p \hat{J}_0(p) \hat{\sigma}(p) \quad (2.68)$$

Použitím Laplaceovy transformace je tak v konstitutivních vztazích eliminována časová závislost a vztah (2.68) je tak analogický elastickému konstitutivnímu zákonu ve formě $\varepsilon = (1/E) \sigma$. To je základem tzv. *korespondenčního principu*, podle kterého lze viskoelastické problémy řešit jako „korespondenční“ elastické problémy v Laplaceově prostoru.

Výpočet vývoje deformace, jako odezvy na obecné průběhy zatížení, reprezentované funkční závislostí $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$ a lichoběžníkovým zatížením, je pro Kelvinův-Voigtův model podrobně provedeno v dodatcích C a D. A to jak přímou integrací konvolučního integrálu, tak pomocí korespondenčního principu s použitím Laplaceovy transformace.

Kapitola 3

Mechanika kompozitů

Zde uvedený stručný úvod do mechaniky kompozitních materiálů je zaměřen výhradně na tzv. *homogenizaci kompozitů*, tj. určení materiálových vlastností heterogenních (složených) materiálů, při sledování jejich chování na makroskopické úrovni, kdy je celé těleso uvažováno jako materiál homogenní. A i obecně značně rozsáhlá oblast homogenizace je zde omezena na lineární elastické a viskoelastické chování materiálů, tj. pouze na problematiku řešenou v této práci. Z hlediska účelu zde uváděného teoretického základu mechaniky kompozitů je pomínuta problematika vrstvených kompozitů, nelineárního materiálového chování a ani další pokročilejší úvahy, jako např. problematika nesoudržnosti mezi maticí a inkluzí nebo poškození. Celý postup homogenizace je nejprve ukázán pro elastické materiálové vlastnosti a v závěru je provedeno zobecnění na vlastnosti viskoelastické, s použitím již známých principů uváděných v předchozí kapitole pro homogenní materiál. Podrobnější informace k problematice homogenizace kompozitů lze nalézt mimo jiné v [29, 13, 10, 4, 21, 28, 12, 9], odkud bylo při zpracování této kapitoly čerpáno.

3.1 Mikromechanická analýza kompozitů

Z hlediska mechaniky je možno kompozity charakterizovat jako makroskopicky homogenní tělesa s heterogenní strukturou na mikroskopické úrovni. Volba rozměrového měřítka pro makroskopickou a mikroskopickou úroveň je samozřejmě značně variabilní, závislá na struktuře konkrétního heterogenního materiálu. Základním úkolem je pak zjistit jak tato mikrostruktura ovlivňuje materiálové chování na makroskopické úrovni. Těmito problémy se zabývá *mikromechanika kontinua*.

Řešení je založeno na předpokladu, že za určitých podmínek je možno heterogenní mikrostrukturu „rozmělnit“ a materiál na makroúrovni popsat jako homogenní s prostorově konstantními *efektivními* vlastnostmi. Ty pak pro mikrostrukturu mají význam určitých průměrných hodnot. Tento pře-

chod od známých vlastností jednotlivých složek mikrostruktury k „průměrným“ vlastnostem celého tělesa je pak nazýván *homogenizace*.

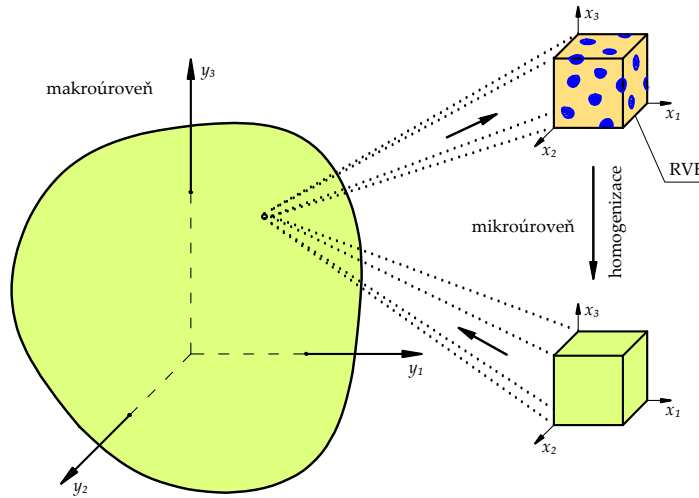
Pro odhady efektivních elastických vlastností kompozitů mohou být použity různé principy. Za nejreálnější jsou pak považovány energetické principy, které vycházejí z předpokladu, že součet energií jednotlivých fází se rovná celkové energii tělesa jako celku. Zde uváděný postup vyplývá z Hillova pojetí kompozitů [14, 15], který nevychází přímo z energetických úvah, ale je k nim do značné míry analogický.

Mikromechanická analýza heterogenních materiálů může být rozdělena do tří základních kroků. Prvním krokem je určení objemového a geometrického zastoupení jednotlivých složek kompozitu a jejich materiálových vlastností. Dalším krokem je tzv. *lokalizace*, což je analýza mikroskopické odezvy napětí a deformace na makroskopicky aplikované okrajové podmínky. Získá se tak vztah mezi veličinami na jednotlivých fázích a průměrovanými veličinami. Výsledkem tohoto postupu jsou tzv. *koncentrační (lokalizační) faktory*, tj. obecně tenzory 4. řádu, pomocí kterých lze z průměrných napětí a deformací získat napětí a deformace na mikroúrovni heterogenního tělesa. Pak již lze přistoupit k poslednímu kroku, tj. vlastní *homogenizaci*, kdy se pomocí již známých koncentračních tenzorů určí tenzory efektivní (homogenizované) tuhosti, resp. poddajnosti. Tyto jednotlivé kroky homogenizace kompozitů jsou dále probrány podrobněji.

3.2 Průměrné veličiny

Role makroskopické a mikroskopické úrovně, s jejich charakteristickými rozměrovými měřítky, v souvislosti s procesem homogenizace je ilustrována na obr. 3.1. V nějakém libovolném bodě \underline{y} na makroskopické úrovni může být materiál popsán jako homogenní s konstantními efektivními vlastnostmi. Při dostatečném zvětšení tělesa v místě tohoto bodu však vyjde najevo prostorová heterogenita na mikroskopické úrovni. Jestliže je zde zaveden další souřadný systém, může být mikrostruktura popsána závislostí tenzoru materiálové tuhosti, dále značeného $\mathbb{C}(\underline{x})$ nebo $C_{ijkl}(\underline{x})$, na souřadném systému této mikrostruktury. Předpokládá se, že materiálové chování složek na mikroúrovni je lineárně elastické a známé.

Dále je na mikroskopické úrovni uvažován objem, který musí *reprezentovat* veškerý materiál celého tělesa. V procesu homogenizace je pak tato oblast Ω použita k určení makroskopických vlastností materiálu, tj. prostorově konstantního *efektivního tenzoru materiálové tuhosti*, dále značeného \mathbb{C}_{eff} nebo C_{ijkl}^* . Podmínkou homogenizace je tak *statisticky homogenní* rozložení heterogenit (defektů) v celém materiálu. Tím je zajištěno, že výsledný tenzor \mathbb{C}_{eff} je nezávislý na bodu \underline{y} určující makroskopickou polohu detailu mikrostruktury, který je popsán tenzorem $\mathbb{C}(\underline{x})$. Tenzor \mathbb{C}_{eff} nesmí být rovněž závislý



Obrázek 3.1: Reprezentativní objemový vzorek a princip homogenizace.

na velikosti nebo tvaru vybraného objemu. Z toho vyplývá, že v případě nepravidelné mikrostruktury (rozložení heterogenit) musí oblast Ω obsahovat dostatečné množství defektů. Na druhé straně však musí být oblast Ω dostatečně malá, aby mohla být na makroskopické úrovni považována za bod.

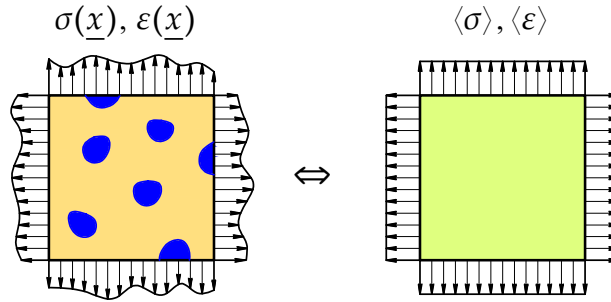
Splňuje-li vybraný objem tyto podmínky, je nazýván *reprezentativní objemový vzorek*, označovaný jako RVE (representative volume element). Všechny úvahy jsou dále prováděny právě na RVE.

Při uvažování dvou prostorových měřítek, a s nimi korespondujících dvou souřadných systémů, je materiálový bod \underline{y} na makroskopické úrovni vztahen k oblasti Ω na mikroskopické úrovni, kde se deformace a napětí projevují jako mikropole. *Makroskopické deformace* \mathbf{E} a *napětí* $\mathbf{\Sigma}$, které charakterizují mechanický stav makroskopického materiálového bodu, jsou definovány jako objemové průměry mikroskopických polí

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \, d\Omega \quad (3.1)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \, d\Omega \quad (3.2)$$

kde symbol $\langle \cdot \rangle$ znamená průměrnou hodnotu sledované veličiny, Ω je definiční oblast (přes kterou je veličina průměrována), $|\Omega|$ je objem oblasti, $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ je tenzor deformací na mikroúrovni, $\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$ je tenzor napětí na mikroúrovni, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ jsou souřadnice bodů v $\Omega \cup \partial\Omega$ (kde $\partial\Omega$ je hranice oblasti Ω). Význam těchto vztahů je zřejmý i z obr. 3.2.



Obrázek 3.2: RVE s proměnnými mikropoli napětí a deformace a jejich průměrnými hodnotami.

3.3 Lokalizace

Jak již bylo výše uvedeno, lokalizace v principu spočívá v určení mikroskopických napětí, resp. deformací jako funkcí makroskopicky aplikovaných okrajových podmínek. V nejjednodušším případě, tj. pro lineárně elastické problémy, jsou mikroskopické a makroskopické napětí, resp. deformace lineárně závislé prostřednictvím následujících lokalizačních vztahů

$$\varepsilon(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (3.3)$$

$$\sigma(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.4)$$

kde $\mathbb{A}(\underline{x})$, resp. $\mathbb{B}(\underline{x})$ je *koncentrační (lokalizační) tenzor* deformace, resp. napětí.

Dosažením (3.3) do (3.1) a (3.4) do (3.2) se dostává

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \mathbb{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \mathbf{E} &\Rightarrow & \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \langle \mathbb{B}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \boldsymbol{\Sigma} &\Rightarrow & \langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \end{aligned}$$

kde \mathbb{I} je jednotkový tenzor 4. řádu.

Koncentrační tenzory závisejí na mikrostruktuře v oblasti Ω a jak bylo právě dokázáno, průměrnou hodnotou těchto funkcí je jednotkový tenzor. Pro explicitní popis materiálové heterogenity je nutno použít jejího idealizovaného tvaru.

Dále je uvažován kompozit složený z n homogenních fází a předpokládá se, že $n - 1$ fází je rovnoměrně rozmístěných ve zbývající fázi – matici. Veličiny r -té fáze jsou označovány indexem r a oblast vymežující r -tou fází ω_r . Jelikož RVE je z makroskopického hlediska statisticky homogenní vzorek, je v něm zastoupení jednotlivých fází kompozitu konstantní a pro průměrné

hodnoty deformací a napětí na r -té fázi platí

$$\langle \varepsilon_r \rangle = \mathbb{A}_r : \mathbf{E} \quad \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbb{A}_r = \mathbb{I} \quad (3.5)$$

$$\langle \sigma_r \rangle = \mathbb{B}_r : \boldsymbol{\Sigma} \quad \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbb{B}_r = \mathbb{I} \quad (3.6)$$

kde $f_r = \omega_r/\Omega$ je objemový podíl a \mathbb{A}_r a \mathbb{B}_r jsou koncentrační tenzory r -té fáze kompozitu.

Koncentrační tenzory $\mathbb{A}(\underline{x})$ a $\mathbb{B}(\underline{x})$ mohou být v některých případech určeny řešením elastické okrajové úlohy (boundary value problem). V jiných případech mohou být aproximovány variačními metodami. Nejčastěji se však lze setkat s případem odhadu koncentračního tenzoru s pomocí *Eshelbyho řešení problému inkluze*, tj. případu kdy je elipsoidální inkluze zabudovaná v elastickém médiu, vystavenému konstantní deformaci v nekonečnu (viz dodatek G). Toto referenční řešení poskytuje odhad koncentračního tenzoru r -té fáze kompozitu, který je pak konstantní $\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_r} \equiv \mathbb{A}_r$, jako

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_r &= \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_r : (\mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} : \left\langle \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_r : (\mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \\ &= \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_r : (\mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} : \left[\sum_r f_r \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_r : (\mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

kde \mathbb{C}_r je tenzor tuhosti r -té fáze, \mathbb{C}_0 je tenzor tuhosti referenčního média a \mathbb{S}_r je *Eshelbyho tenzor* r -té fáze.

Ač sumace přes r ve výrazu (3.7) se vztahuje i na referenční médium, takto stanovený odhad koncentračního tenzoru obecně platí jen pro fáze inkluze. Pro určení koncentračního tenzoru referenčního média, tj. $\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_0}$, je dále uvažováno s kompozitem s jedním druhem inkluze s konstantním tenzorem tuhosti \mathbb{C}_i , která je zabudována v matici s konstantním tenzorem tuhosti \mathbb{C}_m . Dle (3.5) platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} &= f_0 \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_0} + f_i \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_i} = \mathbb{I} \\ \Rightarrow f_0 \langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_0} &= \mathbb{I} - f_i \mathbb{A}_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde bylo použito $\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_i} \equiv \mathbb{A}_i = \text{konst.}$ Po dosazení za \mathbb{A}_i ze vztahu (3.7) se elementárními algebraickými operacemi pro koncentrační tenzor referenčního média dostává

$$\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_0} = \left[\sum_{r \in 0,i} f_r \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_r : (\mathbb{C}_0^{-1} : \mathbb{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right]^{-1} \quad (3.9)$$

Podle zvoleného referenčního média se odlišují dvě nejběžnější metody homogenizace. Těmi jsou *metoda Mori-Tanaka*, ve které je za referenční médium uvažována matrice, tj. $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{C}_m$ a *Self-konzistentní metoda*, ve které je za referenční médium vybrán RVE a pak $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{C}_{\text{eff}}$.

3.4 Homogenizace

Po určení koncentračních tenzorů je v mikromechanice kontinua posledním krokem vlastní homogenizace, tj. určení materiálových vlastností na makroskopické úrovni pro těleso uvažované jako materiál homogenní. To zahrnuje vyjádření makroskopické deformace a napětí jako funkce deformace a napětí mikroskopického.

Pro Hookeův zákon na mikroskopické úrovni platí

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbf{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{J}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \quad (3.11)$$

Na makroskopické úrovni analogicky platí

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_{\text{eff}} : \mathbf{E} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{E} = \mathbb{J}_{\text{eff}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.13)$$

tj. lineární vztah mezi makroskopickým napětím a deformací. Kde \mathbf{C}_{eff} je *efektivní tenzor materiálové tuhosti* a $\mathbb{J}_{\text{eff}} = \mathbf{C}_{\text{eff}}^{-1}$ *efektivní tenzor materiálové poddajnosti*.

Cílem homogenizace je nalézt právě \mathbf{C}_{eff} , resp. \mathbb{J}_{eff} pokud jsou známy tenzory tuhosti \mathbf{C}_r , resp. poddajnosti \mathbb{J}_r jednotlivých fází.

Dosazením (3.10) do (3.1), resp. (3.11) do (3.2) a do vzniklého výrazu za $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})$ ze (3.3), resp. $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ ze (3.4) se dostává

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbf{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{C}(\underline{x}) : \mathbf{A}(\underline{x}) : \mathbf{E} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{C}(\underline{x}) : \mathbf{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \mathbf{E} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{E} = \langle \mathbb{J}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{J}(\underline{x}) : \mathbf{B}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{J}(\underline{x}) : \mathbf{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.15)$$

Porovnáním vztahů (3.14) a (3.12), resp. (3.15) a (3.13) se získává vyjádření tenzoru efektivní materiálové tuhosti, resp. tenzoru efektivní materiálové poddajnosti jako

$$\mathbf{C}_{\text{eff}} = \langle \mathbf{C}(\underline{x}) : \mathbf{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (3.16)$$

$$\mathbb{J}_{\text{eff}} = \langle \mathbb{J}(\underline{x}) : \mathbf{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (3.17)$$

Těmito vztahy jsou určeny makroskopické materiálové parametry v závislosti na obecném rozložení materiálové tuhosti $\mathbf{C}(\underline{x})$, resp. poddajnosti

$\mathbb{J}(\underline{x})$ na mikroúrovni v rámci RVE.

Dále je uvažován kompozit složený z n homogenních složek. Pomocí objemových (procentuálních) částí f_r jednotlivých fází lze průměrné napětí a deformaci zapsat jako

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_r f_r \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_r f_r \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r \rangle \quad (3.18)$$

kde platí $\sum_r f_r = 1$.

Pro každou r -tou homogenní fázi kompozitu platí Hookeův zákon

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle = \mathbf{C}_r : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r \rangle \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r \rangle = \mathbb{J}_r : \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle \quad (3.19)$$

kde \mathbf{C}_r , resp. \mathbb{J}_r jsou tenzory materiálové tuhosti, resp. poddajnosti r -té fáze.

Dosazením do (3.18) se dostává

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_r f_r \mathbf{C}_r : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r \rangle \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sum_r f_r \mathbb{J}_r : \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle \quad (3.20)$$

Jak již bylo výše uvedeno lze průměrnou deformaci, resp. napětí na jednotlivých fázích vyjádřit pomocí koncentračních tenzorů jako

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_r \rangle = \mathbf{A}_r : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle = \mathbf{B}_r : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.21)$$

kde $\sum_r f_r \mathbf{A}_r = \mathbb{I}$ a $\sum_r f_r \mathbf{B}_r = \mathbb{I}$.

Dosazením do (3.20) se pro průměrné napětí a deformaci získává

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \underbrace{\sum_r f_r \mathbf{C}_r : \mathbf{A}_r}_{\mathbf{C}_{\text{eff}}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \underbrace{\sum_r f_r \mathbb{J}_r : \mathbf{B}_r}_{\mathbb{J}_{\text{eff}}} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.22)$$

kde výrazy

$$\mathbf{C}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbf{C}_r : \mathbf{A}_r \quad \mathbb{J}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbb{J}_r : \mathbf{B}_r \quad (3.23)$$

vyjadřují efektivní (homogenizované) materiálové vlastnosti kompozitu složeného z n složek, kde f_r je objemový podíl a \mathbf{C}_r , resp. \mathbb{J}_r jsou tenzory materiálové tuhosti, resp. poddajnosti r -té fáze.

Pro kompozit s morfologií typu matrice-inkluze se pak efektivní tenzor materiálové tuhosti určí jako

$$\mathbf{C}_{\text{eff}} = f_0 \mathbf{C}_0 : \langle \mathbf{A}(\underline{x}) \rangle_{\omega_0} + f_i \mathbf{C}_i : \mathbf{A}_i \quad (3.24)$$

a po dosažení odhadů koncentračních tenzorů pro referenční médium a inkluzi z (3.7) a (3.9) se elementárními úpravami dostává

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{eff}} &= \left[\sum_{r \in 0,i} f_r \mathbf{C}_r : \left[\mathbb{I} + \mathbf{S}_r : (\mathbf{C}_0^{-1} : \mathbf{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right] \\ &: \left[\sum_{r \in 0,i} f_r \left[\mathbb{I} + \mathbf{S}_r : (\mathbf{C}_0^{-1} : \mathbf{C}_r - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

kde pro metodu Mori-Tanaka je $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{C}_m$ a pro Self-konzistentní metodu $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{C}_{\text{eff}}$.

3.5 Statisticky izotropní kompozity

Pro analýzu mechanických vlastností kompozitních materiálů je klíčové, zda se jedná o kompozity částicové nebo vláknové (s dlouhými, kontinuálními vlákny) a tím spojenou izotropii, nebo anizotropii materiálových vlastností.

Obecně jsou efektivní elastické vlastnosti definovány již výše uvedenými¹ lineárními vztahy

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (3.26)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = J_{ijkl}^* \langle \sigma_{kl} \rangle \quad (3.27)$$

kde C_{ijkl}^* je efektivní tenzor materiálové tuhosti a J_{ijkl}^* je efektivní tenzor materiálové poddajnosti.

Pokud jsou tyto efektivní konstitutivní vztahy nezávislé na volbě souřadného systému, jedná se o statisticky izotropní kompozit. V tomto případě, podobně jako pro homogenní elastický materiál, se výraz (3.26) redukuje na formu

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle e_{ij} \rangle \quad (3.28)$$

kde λ a μ jsou materiálové konstanty nazývané Laméovy koeficienty, δ_{ij} je Kronekerovo delta a $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ a $\langle \sigma_{ij} \rangle$ lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \langle \hat{\varepsilon} \rangle \delta_{ij} + \langle e_{ij} \rangle & \text{kde} & \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{3} \langle \varepsilon_{kk} \rangle \\ \langle \sigma_{ij} \rangle &= \langle \hat{\sigma} \rangle \delta_{ij} + \langle s_{ij} \rangle & \text{kde} & \quad \langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{3} \langle \sigma_{kk} \rangle \end{aligned}$$

¹Pro výrazy v předcházejícím textu bylo pro větší přehlednost použito *symbolické (kompaktní) značení tenzorů*. Zde je naopak pro zvýraznění vztahů mezi jednotlivými veličinami a i pro zřetelné odlišení tenzorů a skalárů použito *indexové značení*. Je zde rovněž uvažována tzv. *Einsteinova sumační konvence*, podle které vyskytuje-li se v jednom členu nějaký index dvakrát, znamená to sečíst tyto členy postupně pro všechny hodnoty opakovaného indexu. Symbol sumace se v tomto případě nepíše. Např. ve výrazu $a_{jk} b_s c_{ls}$ je index s sčítací. Tento výraz má tedy význam: $a_{jk} b_s c_{ls} = \sum_{s=1}^3 a_{jk} b_s c_{ls} = a_{jk} b_1 c_{l1} + a_{jk} b_2 c_{l2} + a_{jk} b_3 c_{l3}$.

Pak je možno vztah (3.28) rozdělit na samostatnou objemovou a deviatorickou část

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = 3 k^* \langle \hat{\varepsilon} \rangle \quad \langle s_{ij} \rangle = 2 \mu^* \langle e_{ij} \rangle \quad (3.29)$$

kde k^* je efektivní objemový modul pružnosti, μ^* je efektivní smykový modul pružnosti, $\langle \hat{\sigma} \rangle$, $\langle \hat{\varepsilon} \rangle$ je střední napětí, deformace objemové části a $\langle s_{ij} \rangle$, $\langle e_{ij} \rangle$ je deviatorická část tenzorů průměrného napětí, deformace. Ostatní efektivní elastické vlastnosti tj. E^* a ν^* jsou definovány obvyklým způsobem.

Jak je z výše uvedeného patrné, pro izotropní a makroskopicky homogenní těleso stačí uvažovat dva typy základní deformace a dvě lineárně nezávislé materiálové konstanty, např. k^* a μ^* . Zatížení a jím vyvolanou odezvu na vnitřní stavy ve složeném materiálu lze pak rozdělit na:

- **Čisté normálové zatížení**

Čisté protažení nebo zkrácení lze provést pro libovolný směr. Vztahy (3.20) se pak redukuje na

$$\langle \sigma \rangle = \sum_r f_r k_r \langle \varepsilon_r \rangle \quad \langle \varepsilon \rangle = \sum_r f_r \frac{1}{k_r} \langle \sigma_r \rangle \quad (3.30)$$

a vztahy (3.21) se změní na následující skalární vyjádření

$$\langle \varepsilon_r \rangle = A_r^v \langle \varepsilon \rangle \quad \langle \sigma_r \rangle = B_r^v \langle \sigma \rangle \quad (3.31)$$

kde A_r^v, B_r^v jsou *koncentrační faktory* pro jednosměrné normálové namáhání, pro které rovněž platí $\sum_r f_r A_r^v = 1$ a $\sum_r f_r B_r^v = 1$.

Rovnice (3.23) je pak možno zapsat rovněž ve skalárním vyjádření a pro efektivní objemový modul k^* se tak dostává

$$k^* = \sum_r f_r A_r^v k_r \quad \frac{1}{k^*} = \sum_r \frac{f_r B_r^v}{k_r} \quad (3.32)$$

- **Čisté smykové zatížení**

Při čistém smyku se Hookeův zákon redukuje na vztah $\langle \tau \rangle = \mu^* \langle \gamma \rangle$.

Stejným postupem jako v předchozím případě se pro efektivní smykový modul μ^* dostává

$$\mu^* = \sum_r f_r A_r^d \mu_r \quad \frac{1}{\mu^*} = \sum_r \frac{f_r B_r^d}{\mu_r} \quad (3.33)$$

kde však koncentrační faktory A_r^d, B_r^d mají charakter poměrů smykových napětí, resp. deformací na fázích a celkových smykových napětí, resp. smykových deformací.

3.5.1 Voigtovy a Reusovy meze

Hrubá aproximace efektivních hodnot materiálových konstant může být provedena za předpokladu, že deformace obou složek kompozitu je totožná, nebo naopak za předpokladu, že totožné je napětí přenášené jednotlivými složkami kompozitu.

Za předpokladu konstantní deformace je $A_r = 1$ a z (3.32) a (3.33) se dostává tzv. *Voigtova mez* efektivního materiálového parametru

$$k_V^* = \sum_r f_r k_r \quad \mu_V^* = \sum_r f_r \mu_r \quad (3.34)$$

Naopak za předpokladu konstantního napětí je $B_r = 1$ a z (3.32) a (3.33) se dostává tzv. *Reusova mez* efektivního materiálového parametru

$$\frac{1}{k_R^*} = \sum_r \frac{f_r}{k_r} \quad \frac{1}{\mu_R^*} = \sum_r \frac{f_r}{\mu_r} \quad (3.35)$$

Pro kompozit s homogenními složkami charakterizovanými rozdílnými elastickými vlastnostmi není přirozeně ani jeden předpoklad zcela správný. Napětí za konstantní deformace podle Voigta způsobí nespojitost povrchových sil na přechodu mezi fázemi. Naopak deformace při konstantním napětí podle Reusse způsobí nespojitost posuvů na přechodu mezi fázemi. Avšak protože platí $\sum_r f_r = 1$, je vždy $k_V^* > k_R^*$ a $\mu_V^* > \mu_R^*$. Voigtova mez je tak horním a Reusova mez dolním odhadem efektivních hodnot materiálových konstant.

3.5.2 Metoda Mori-Tanaka

Jak již bylo zmíněno výše, určení koncentračních tenzorů lze provést několika způsoby. Pro kompozit s inkluzí elipsoidálního tvaru v kontinuální matici je často používána metoda Mori-Tanaka [25]. Předpokladem této metody je uvažování umístění inkluze v homogenním poli. To je platné pouze pro malé objemové množství inkluzí (defektů), které jsou od sebe dostatečně vzdálené.

Při uvažování matrice jako referenčního média (tj. $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{C}_m$) se výraz (3.25) pro \mathbf{C}_{eff} zjednoduší na

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{eff}} = & \left[f_m \mathbf{C}_m + f_i \mathbf{C}_i : \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}_i : (\mathbf{C}_m^{-1} : \mathbf{C}_i - \mathbf{I}) \right]^{-1} \right] \\ & : \left[f_m \mathbf{I} + f_i \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}_i : (\mathbf{C}_m^{-1} : \mathbf{C}_i - \mathbf{I}) \right]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pro efektivní tenzor poddajnosti \mathbb{J}_{eff} se pak s uvažáním $\mathbb{J} = \mathbb{C}^{-1}$ dostává

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\text{eff}} &= \left[f_m \mathbb{I} + f_i \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_i : (\mathbb{J}_i^{-1} : \mathbb{J}_m - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right] \\ &: \left[f_m \mathbb{J}_m^{-1} + f_i \mathbb{J}_i^{-1} : \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_i : (\mathbb{J}_i^{-1} : \mathbb{J}_m - \mathbb{I}) \right]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Za předpokladu izotropní elasticity, lze tenzory tuhosti inkluze a matrice zapsat jako součet jejich deviatorické a objemové části

$$\mathbb{C}_i = 3k_m \mathbb{I}^v + 2\mu_i \mathbb{I}^d \quad \mathbb{C}_m = 3k_m \mathbb{I}^v + 2\mu_m \mathbb{I}^d \quad (3.38)$$

kde k_i , μ_i , k_m a μ_m jsou objemový a smykový modul pružnosti inkluze a matrice a \mathbb{I}^v a \mathbb{I}^d jsou objemová a deviatorická část jednotkového tenzoru čtvrtého řádu, tzv. objemový a deviatorický projekční tenzor².

Rovněž tak lze rozložit i tenzory poddajnosti inkluze a matrice, pro které platí $\mathbb{J}_i = \mathbb{C}_i^{-1}$ a $\mathbb{J}_m = \mathbb{C}_m^{-1}$. Z (3.38) se pak dostává

$$\mathbb{J}_i = \frac{1}{3} J_i^v \mathbb{I}^v + \frac{1}{2} J_i^d \mathbb{I}^d \quad \mathbb{J}_m = \frac{1}{3} J_m^v \mathbb{I}^v + \frac{1}{2} J_m^d \mathbb{I}^d \quad (3.39)$$

kde J_i^v , J_i^d , J_m^v a J_m^d jsou objemová a smyková poddajnost inkluze a matrice, definované jako $J^v = 1/k$ a $J^d = 1/\mu$.

Pokud jsou dále předpokládány kulové inkluze lze Eshelbyho tenzor vyjádřit jako

$$\mathbb{S}_i = \alpha_m \mathbb{I}^v + \beta_m \mathbb{I}^d \quad (3.40)$$

kde α_m a β_m jsou konstanty závislé na materiálových parametrech matrice následovně

$$\alpha_m = \frac{1 + \nu_m}{3(1 - \nu_m)} = \frac{3k_m}{3k_m + 4\mu_m} = \frac{3J_m^d}{3J_m^d + 4J_m^v} \quad (3.41)$$

$$\beta_m = \frac{2(4 - 5\nu_m)}{15(1 - \nu_m)} = \frac{6(k_m + 2\mu_m)}{5(3k_m + 4\mu_m)} = \frac{6(J_m^d + 2J_m^v)}{5(3J_m^d + 4J_m^v)} \quad (3.42)$$

Po dosazení (3.38) a (3.40) do (3.36), popř. (3.39) a (3.40) do (3.37) a rozdělení na samostatnou objemovou a deviatorickou část se získávají odhady efektivních materiálových konstant, tj. objemového a smykového modulu

²Pro projekční tenzory \mathbb{I}^v a \mathbb{I}^d platí: $\mathbb{I}^v + \mathbb{I}^d = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}^v : \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbb{I}^d : \mathbf{1} = 0$

pružnosti, popř. objemové a smykové poddajnosti jako

$$k_{\text{eff}} = \frac{f_m k_m + f_i k_i \left(1 + \alpha_m \left(\frac{k_i}{k_m} - 1\right)\right)^{-1}}{f_m + f_i \left(1 + \alpha_m \left(\frac{k_i}{k_m} - 1\right)\right)^{-1}} \quad (3.43)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{f_m \mu_m + f_i \mu_i \left(1 + \beta_m \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)\right)^{-1}}{f_m + f_i \left(1 + \beta_m \left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right)\right)^{-1}} \quad (3.44)$$

$$J_{\text{eff}}^v = \frac{f_m + f_i \left(1 + \alpha_m \left(\frac{J_m^v}{J_i^v} - 1\right)\right)^{-1}}{\frac{f_m}{J_m^v} + \frac{f_i}{J_i^v} \left(1 + \alpha_m \left(\frac{J_m^v}{J_i^v} - 1\right)\right)^{-1}} \quad (3.45)$$

$$J_{\text{eff}}^d = \frac{f_m + f_i \left(1 + \beta_m \left(\frac{J_m^d}{J_i^d} - 1\right)\right)^{-1}}{\frac{f_m}{J_m^d} + \frac{f_i}{J_i^d} \left(1 + \beta_m \left(\frac{J_m^d}{J_i^d} - 1\right)\right)^{-1}} \quad (3.46)$$

3.6 Homogenizace kompozitů s vlastními poli

Je uvažován kompozit složený z n homogenních fází a je předpokládána existence vlastního napětí ζ_r a vlastní deformace ϵ_r r -té fáze. Jedná se o známé tenzory, konstantní na příslušné fázi. Cílem je vyčíslit efektivní vlastnosti kompozitu a pole makroskopické deformace a napětí od vlastní deformace a napětí nebo jejich průměry na jednotlivých fázích. Tato problematika je detailně řešena v [23, 20, 7, 3], v kontextu termoelastického chování kompozitů.

Odezva r -té homogenní fáze je určena konstitutivními vztahy

$$\langle \sigma_r \rangle = \mathbf{C}_r : \langle \epsilon_r \rangle + \zeta_r \quad \langle \epsilon_r \rangle = \mathbb{J}_r : \langle \sigma_r \rangle + \epsilon_r \quad (3.47)$$

kde \mathbf{C}_r , resp. \mathbb{J}_r jsou tenzory materiálové tuhosti, resp. poddajnosti r -té fáze. Aby bylo zajištěno $\mathbf{C}_r : \mathbb{J}_r = \mathbb{I}$, musí platit

$$\zeta_r = -\mathbf{C}_r : \epsilon_r \quad \epsilon_r = -\mathbb{J}_r : \zeta_r \quad (3.48)$$

Na makroskopické úrovni je RVE uvažován jako homogenní médium popsané konstitutivními vztahy

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}_{\text{eff}} : \langle \epsilon \rangle + \zeta_{\text{eff}} \quad \langle \epsilon \rangle = \mathbb{J}_{\text{eff}} : \langle \sigma \rangle + \epsilon_{\text{eff}} \quad (3.49)$$

kde ζ_{eff} , resp. ϵ_{eff} jsou efektivní tenzory vlastního napětí, resp. deformace. Aby bylo zajištěno $\mathbf{C}_{\text{eff}} : \mathbb{J}_{\text{eff}} = \mathbb{I}$, musí platit

$$\zeta_{\text{eff}} = -\mathbf{C}_{\text{eff}} : \epsilon_{\text{eff}} \quad \epsilon_{\text{eff}} = -\mathbb{J}_{\text{eff}} : \zeta_{\text{eff}} \quad (3.50)$$

Pro efektivní tenzory vlastního napětí a deformace lze odvodit vztahy závislé na elastických koncentračních tenzorech \mathbb{A}_r a \mathbb{B}_r

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbb{A}_r^{\text{T}} : \boldsymbol{\zeta}_r \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r \mathbb{B}_r^{\text{T}} : \boldsymbol{\epsilon}_r \quad (3.51)$$

S pomocí koncentračních tenzorů lze objemové průměry polí deformace a napětí na r -té fázi zapsat jako

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}_r \rangle = \mathbb{A}_r : \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle + \mathbf{a}_r \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle = \mathbb{B}_r : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \mathbf{b}_r \quad (3.52)$$

kde \mathbf{a}_r a \mathbf{b}_r je koncentrační deformační a napěťový tenzor r -té fáze vlastního napětí a deformace.

Vzhledem k tomu, že pro makroskopickou deformaci a napětí platí

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle = \sum_r f_r \langle \boldsymbol{\epsilon}_r \rangle \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_r f_r \langle \boldsymbol{\sigma}_r \rangle \quad (3.53)$$

a pro elastické koncentrační tenzory platí

$$\sum_r f_r \mathbb{A}_r = \mathbb{I} \quad \sum_r f_r \mathbb{B}_r = \mathbb{I} \quad (3.54)$$

pro koncentrační tenzory vlastního napětí a deformace se z dosazení (3.53) a následně (3.54) do (3.52) dostává

$$\sum_r f_r \mathbf{a}_r = 0 \quad \sum_r f_r \mathbf{b}_r = 0 \quad (3.55)$$

Pro efektivní tenzory vlastního napětí a deformace lze také odvodit vztahy závislé na koncentračních tenzorech vlastního napětí a deformace \mathbf{a}_r a \mathbf{b}_r

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r (\boldsymbol{\zeta}_r + \mathbb{C}_r : \mathbf{a}_r) \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r (\boldsymbol{\epsilon}_r + \mathbb{J}_r : \mathbf{b}_r) \quad (3.56)$$

Pro dvojfázový kompozit se složkami α a β lze koncentrační tenzory vlastního napětí a deformace r -té fáze určit jako

$$\mathbf{a}_r = (\mathbb{I} - \mathbb{A}_r) : (\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_\beta)^{-1} : (\boldsymbol{\zeta}_\beta - \boldsymbol{\zeta}_\alpha) \quad (3.57)$$

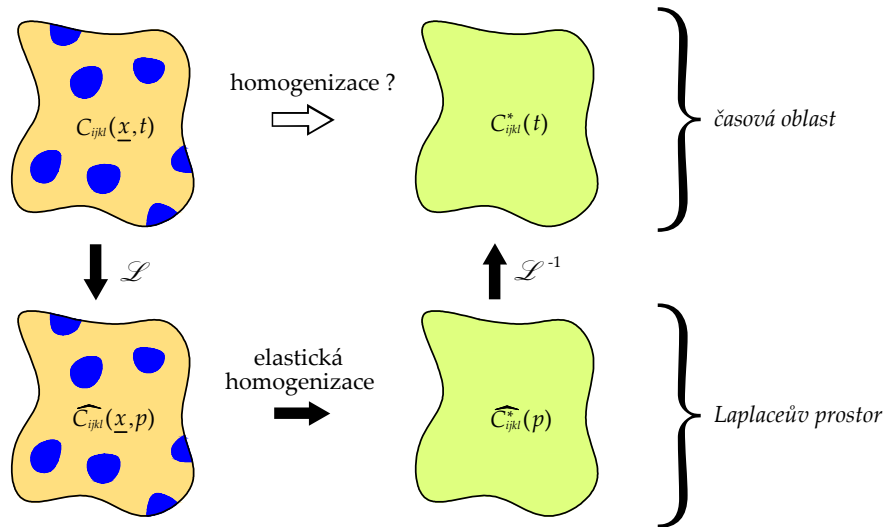
$$\mathbf{b}_r = (\mathbb{I} - \mathbb{B}_r) : (\mathbb{J}_\alpha - \mathbb{J}_\beta)^{-1} : (\boldsymbol{\epsilon}_\beta - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha) \quad (3.58)$$

V případě makroskopicky izotropního kompozitu lze dále jednoduše provést jejich rozklad na samostatnou objemovou a deviatorickou část, a to obdobným postupem jako v předchozím oddílu.

3.7 Homogenizace viskoelastických kompozitů

Jelikož celá řada kompozitů má polymerní matici, má značný význam i analýza viskoelastického chování kompozitních materiálů. Pro polymery jsou totiž časově závislé jevy velmi časté a jejich význam narůstá se vzrůstající teplotou.

Analýza vlastností viskoelastických kompozitů má úzký vztah k analýze elastických kompozitů a pro zde uváděné základní formulace lineární teorie viskoelastivity je tak používáno značení odpovídající dřívějšímu značení pro elasticitu. Je to tak učiněno i se záměrem ilustrovat, jak formulace pro problém viskoelastických kompozitů může být snadno získána z korespondenční formulace k elastické teorii. Názorný příklad použití korespondenčního principu je uveden v [24, 28, 22] a tento postup je zřejmý i z obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Schéma korespondenčního principu homogenizace kompozitních materiálů.

Analogicky k viskoelastické teorii homogenních materiálů je vhodné nejprve definovat vztahy pro odezvu makroskopického napětí, resp. deformace na vážený jednotkový skok průměrné (makroskopické) deformace $\langle \varepsilon_{kl} \rangle(t) = \tilde{\varepsilon}_{kl} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\varepsilon}_{kl} = \text{konst.}$, resp. napětí $\langle \sigma_{kl} \rangle(t) = \tilde{\sigma}_{kl} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\sigma}_{kl} = \text{konst.}$ Makroskopické odezvy napětí a deformace je možno zapsat jako

$$\langle \sigma_{ij} \rangle(t) = C_{ijkl}^*(t) \tilde{\varepsilon}_{kl} \quad (3.59)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle(t) = J_{ijkl}^*(t) \tilde{\sigma}_{kl} \quad (3.60)$$

kde $C_{ijkl}^*(t)$ je tenzor efektivní relaxační funkce a $J_{ijkl}^*(t)$ je tenzor efektivní

funkce poddajnosti. Je zřejmé, že jak tyto funkce, tak makroskopické průměrné napětí $\langle \sigma_{ij} \rangle(t)$ a deformace $\langle \varepsilon_{ij} \rangle(t)$ jsou tenzory jejichž složky jsou časově závislé.

Pro odezvu na obecný průběh deformace $\langle \varepsilon_{kl} \rangle(t)$, resp. napětí $\langle \sigma_{kl} \rangle(t)$, které jsou popsány hladkou funkcí, která je nulová pro $t < 0$ a bez skokové diskontinuity v $t = 0$ je možno konstitutivní vztah zapsat ve formulaci

$$\langle \sigma_{ij} \rangle(t) = \int_0^t C_{ijkl}^*(t - \zeta) \langle \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.61)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle(t) = \int_0^t J_{ijkl}^*(t - \zeta) \langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.62)$$

Efektivní relaxační funkce a funkce poddajnosti souvisejí s efektivními tenzory tuhosti a poddajnosti elastického heterogenního média a analogicky viskoelastickému chování homogenního materiálu lze i zde uplatnit korepondenční princip teorie lineární viskoelastivity s použitím Laplaceovy transformace. Vztahy (3.61) a (3.62) lze pak v Laplaceově prostoru zapsat jako

$$\widehat{\langle \sigma_{ij} \rangle}(p) = \widehat{C}_{ijkl}^*(p) \widehat{\langle \dot{\varepsilon}_{kl} \rangle}(p) = p \widehat{C}_{ijkl}^*(p) \widehat{\langle \varepsilon_{kl} \rangle}(p) \quad (3.63)$$

$$\widehat{\langle \varepsilon_{ij} \rangle}(p) = \widehat{J}_{ijkl}^*(p) \widehat{\langle \dot{\sigma}_{kl} \rangle}(p) = p \widehat{J}_{ijkl}^*(p) \widehat{\langle \sigma_{kl} \rangle}(p) \quad (3.64)$$

Jestliže je kompozit statisticky izotropní, výrazy (3.61) a (3.62) se redukují na obvyklé izotropní formy

$$\langle \dot{\sigma} \rangle(t) = 3 \int_0^t k^*(t - \zeta) \langle \dot{\varepsilon} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.65)$$

$$\langle s_{ij} \rangle(t) = 2 \int_0^t \mu^*(t - \zeta) \langle \dot{e}_{ij} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.66)$$

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle(t) = \frac{1}{3} \int_0^t J_v^*(t - \zeta) \langle \dot{\sigma} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.67)$$

$$\langle e_{ij} \rangle(t) = \frac{1}{2} \int_0^t J_d^*(t - \zeta) \langle \dot{s}_{ij} \rangle(\zeta) d\zeta \quad (3.68)$$

kde $\langle \dot{\sigma} \rangle(t)$, $\langle \dot{\varepsilon} \rangle(t)$ je střední napětí, deformace objemové části a $\langle s_{ij} \rangle(t)$, $\langle e_{ij} \rangle(t)$ je deviatorická část tenzorů průměrného napětí, deformace. Jejich definice

je již uvedena výše, tentokrát se však jedná o vztahy časově závislé. Veličiny $k^*(t)$ a $\mu^*(t)$ jsou pak efektivní objemová a smyková relaxační funkce, zatímco $J_v^*(t)$ a $J_d^*(t)$ jsou efektivní objemová a smyková funkce poddajnosti.

Použitím Laplaceovy transformace lze opět získat obrazy vztahů (3.65) až (3.68) jako

$$\widehat{\langle \sigma \rangle}(p) = 3 p \widehat{k^*}(p) \widehat{\langle \varepsilon \rangle}(p) \quad (3.69)$$

$$\widehat{\langle s_{ij} \rangle}(p) = 2 p \widehat{\mu^*}(p) \widehat{\langle e_{ij} \rangle}(p) \quad (3.70)$$

$$\widehat{\langle \varepsilon \rangle}(p) = \frac{1}{3} p \widehat{J_v^*}(p) \widehat{\langle \sigma \rangle}(p) \quad (3.71)$$

$$\widehat{\langle e_{ij} \rangle}(p) = \frac{1}{2} p \widehat{J_d^*}(p) \widehat{\langle s_{ij} \rangle}(p) \quad (3.72)$$

Dosažením Laplaceových obrazů efektivních materiálových parametrů, tj. zde výrazů (3.43) až (3.46) získaných metodou Mori-Tanaka, a obrazu příslušné řídicí funkce, tj. předepsaného průběhu deformace nebo napětí, do konstitutivních vztahů (3.69) až (3.72) se již získávají obrazy odpovídající odezvy kompozitního tělesa na makroskopické úrovni. Jejich inverzi do časové oblasti lze však provést analyticky jen pro omezený počet případů. A to především v závislosti na volbě reologického modelu viskoelastických fází, který pak dále komplikuje již tak poměrně složité formulace pro odhad koncentračních faktorů. Pro již jen trochu sofistikovanější reologické modely je pak nutno provést inverzi numericky.

Kapitola 4

Materiálový bod

4.1 Přístupy k výpočtu odezvy

Jak již napovídá název této práce je jejím předmětem porovnání dvou rozdílných přístupů k výpočtu odezvy kompozitů s viskoelastickou maticí. Prováděná homogenizace je zde pak logicky vztažena na reologické vlastnosti kompozitních materiálů, konkrétně na jev dotvarování a s ním související časovou závislost poddajnosti materiálu. Jako vhodný reologický model je zde uvažován Kelvinův-Voigtův řetězec, který je schopen, v určitém časovém intervalu, dostatečně přesně popsat chování skutečného materiálu při jeho dotvarování.

Přístupy k výpočtu odezvy jsou zde myšleny dvě rozdílné techniky, které je možno použít k vyčíslení vývoje deformace $\varepsilon(t)$ pro daný průběh předepsaného napětí $\sigma(t)$, kterými jsou

- korespondenční princip s použitím Laplaceovy transformace
- exponenciální algoritmus

Hlavním cílem je tak především ověřit funkčnost a přesnost numerického exponenciálního algoritmu, jehož princip je popsán v dodatku F. Postup založený na korespondenčním principu je zde považován za prověřený a vedoucí ke „správným“ výsledkům.

Je však zřejmé, že i v případě korespondenčního principu se jedná o řešení semi-analytické, neboť obrazová funkce poddajnosti kompozitního materiálu s viskoelastickou fází je již příliš komplikovaná pro řešení inverze Laplaceova obrazu deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ do časové oblasti v uzavřeném tvaru. To by bylo přinejmenším neúměrně pracné a na řadu tak přichází numerické řešení inverzní Laplaceovy transformace, které je podrobněji diskutováno v dodatku E.

Ve své podstatě se zde pak jedná o porovnání dvou numerických metod (algoritmů). Proto, než se přistoupí k samotnému porovnání výsledků těchto dvou postupů pro kompozit s viskoelastickou maticí, je nanejvýš vhodné nejprve ověřit jejich funkčnost srovnáním s určitým přesným analytickým řešením. K tomuto účelu je proto nejprve uvažována úroveň materiálového bodu (odpovídající viskoelastickému homogennímu materiálu), u které je možno bez větších problémů získat řešení v uzavřeném tvaru.

Za předepsané zatížení je zvoleno zatížení se sinusovým průběhem, tj. funkční vztah $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ Takto definovanou zatěžovací funkci je možno považovat za dostatečně obecnou k otestování spolehlivosti exponenciálního algoritmu a zároveň lze, pro materiálový bod, problém snadno vyřešit analyticky. Analytické řešení bylo provedeno jednak vyřešením konvolučního integrálu a rovněž pomocí Laplaceovy transformace při použití korespondenčního principu (podrobný výpočetní postup je uveden v dodatku C). Tento průběh zatížení je pak samozřejmě uvažován i pro dále řešené modely kompozitů.

4.2 Parametry Kelvinova-Voigtova řetězce

Jak je odvozeno v kapitole 2 lze funkci poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec zapsat jako

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (4.1)$$

a její Laplaceův obraz jako

$$\hat{J}_0(p) = \frac{1}{p E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau_j} \right)} \quad (4.2)$$

kde $\tau_j = \eta_j / E_j$ jsou charakteristické (retardační) časy jednotlivých článků. Ty je vhodné volit v geometrické posloupnosti s kvocientem 10. Jak je uváděno v [19], pro dobrou aproximaci funkce poddajnosti v určitém časovém intervalu (t_{\min}, t_{\max}) je třeba pro nejmenší a největší z nich splnit podmínku $\tau_1 \leq 3 t_{\min}$ a $\tau_M \geq 0,5 t_{\max}$. Suma exponenciálních členů, která se ve funkci poddajnosti Kelvinova-Voigtova řetězce objevuje, bývá v matematické terminologii označována jako Dirichletova řada.

Příklad materiálových vlastností umělého kompozitu je uveden v tabulce 4.1 převzaté z [33, 34]. Časově závislé materiálové vlastnosti epoxidové matrice byly získány experimentálně ze série dobře ošetřovaných vzorků, takže vliv stárnutí materiálu je zanedbatelný. Výsledná experimentální data byly aproximovány Findleyho vyjádřením funkce poddajnosti

$$J_0(t) = a + b t^n \quad (4.3)$$

kde a, b a n jsou konstanty uvedené v tabulce 4.1.

fáze	E [GPa]	ν_0	a [GPa] ⁻¹	b [GPa] ⁻¹	n
vlákna	386	0,41	–	–	–
matrice	–	0,40	0,0474	0,00214	0,3526

Tabulka 4.1: Lineární viskoelastické materiálové parametry epoxidového systému T30.

Materiálové parametry funkce poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec, tj. moduly pružnosti E_0, E_1, \dots, E_M , pro zvolené charakteristické časy, lze získat metodou nejmenších čtverců z vektoru hodnot funkce poddajnosti vyčíslených z (4.3), pro vektor časů od $t_{\min} = 0,001$ dne po $t_{\max} = 100$ dní a to v logaritmickém dělení (aby tak byl zajištěn přibližně stejný počet hodnot „odpovídajících“ každému charakteristickému času).

Při znalosti Poissonova součinitele ν je možno vyčíslit i další dva materiálové parametry, kterými jsou smykový modul pružnosti μ a objemový modul pružnosti k . Pro ně platí vztahy

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{a} \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Tyto materiálové parametry jsou potřeba pro zjištění odezvy kompozitu při smykovém zatížení a homogenizaci metodou Mori-Tanaka, což bude předmětem následujících kapitol.

Problémem je zde časová závislost Poissonova součinitele ν . Vzhledem k charakteru výpočtů prováděných v této práci je však možno výše zmíněné Findleyho vyjádření funkce poddajnosti použít i pro smykovou poddajnost. Pro formální soulad mezi Youngovým modulem pružnosti E a smykovým modulem pružnosti μ je použit přepočít s použitím pružného Poissonova součinitele ν_0 z tabulky 4.1. Pro zatížení čistým smykem je navíc objemové dotvarování zanedbáno a ve výpočtech je používán pouze objemový modul pružnosti k_0 . Získávají se tak parametry Dirichletovy řady funkce poddajnosti Kelvinova-Voigtova řetězce, které jsou shrnuty v tabulce 4.2.

4.3 Parametry zatěžovací funkce

Jak je již výše zmíněno, má zatěžovací funkce tvar sinusoidy a lze ji popsat funkčním vztahem

$$\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t \quad (4.4)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\hat{\sigma}(p) = \tilde{\sigma} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (4.5)$$

j	τ_j [den]	E_j [GPa]	η_j [GPa den]	μ_j [GPa]	k_j [GPa]
0	–	21,04	–	7,51	35,06
1	0,001	9 901,57	9,90	3 536,28	–
2	0,01	3 840,73	38,41	1 371,69	–
3	0,1	1 911,03	191,10	682,51	–
4	1	746,89	746,89	266,75	–
5	10	403,58	4 035,76	144,13	–
6	100	105,11	10 510,70	37,54	–

Tabulka 4.2: Parametry funkce poddajnosti Kelvinova-Voigtova řetězce.

kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ je amplituda napětí, kterou je možno přiměřeně uvažovat¹ $\tilde{\sigma} = 5 \text{ MPa}$ a ω je úhlová frekvence.

Pro účely srovnání metod výpočtu odezvy je volen průběh zatěžovací funkce v rozsahu první půlperrody funkce sinus, tj. v intervalu $(0, \pi)$ pro parametr ωt . Právě v počátečních periodách funkce $\sin \omega t$ použitý algoritmus pro numerickou inverzní Laplaceovu transformaci vykazuje téměř absolutní shodu s funkčními hodnotami vzoru. Pro $t_{\max} = 100$ dní je tak třeba zvolit $\omega = \pi/100$.

4.4 Řešení korespondenčním principem

Jak je uvedeno v kapitole 2 pro závislost obrazu deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ na obrazu obecného průběhu zatěžovacího napětí $\hat{\sigma}(p)$ v Laplaceově prostoru (při nulových počátečních podmínkách) platí vztah

$$\hat{\varepsilon}(p) = p \hat{J}_0(p) \hat{\sigma}(p) \quad (4.6)$$

Dosazením obrazů $\hat{J}_0(p)$ a $\hat{\sigma}(p)$ z (4.2) a (4.5) je problém v Laplaceově prostoru vyřešen. Nyní je třeba obraz deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ invertovat do časové oblasti. To lze jednoduše provést v systému GNU Octave za pomoci funkce `invlap.m`, jejíž použití je popsáno v dodatku E. Výsledkem jsou funkční hodnoty deformace $\varepsilon(t)$ pro definovaný vektor časů t . Kompletní skript pro řešení této úlohy je uveden v dodatku H.

4.5 Řešení exponenciálním algoritmem

Princip exponenciálního algoritmu je podrobněji popsán v dodatku F. Zde je vhodné připomenout, že je založen na numerickém řešení diferenciální

¹Tak, aby s ohledem na epoxidovou matici bylo možno deformaci materiálu považovat za lineárně pružnou. Pro zde prováděné porovnání výpočetních postupů je tato podmínka však spíše formálního rázu.

rovnice popisující chování Kelvinova-Voigtova článku. Deformace $\varepsilon(t)$ po i -tém kroku, tj. v čase $t_i = \sum_{k=1}^i \Delta t_k$, je popsána rekurzivním zápisem

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{\check{E}^{(i)}} \quad (4.7)$$

kde $\check{E}^{(i)}$ je algoritmická tuhost celého řetězce, vyjádřená jako

$$\check{E}^{(i)} = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{E_j} \right)^{-1}$$

přičemž pro rychlost deformace j -tého článku platí

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \vartheta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \vartheta_j^{(i)}}{\Delta t_i E_j} \Delta \sigma^{(i)}$$

a kde $\vartheta_j^{(i)}$ a $\psi_j^{(i)}$ jsou pomocné konstanty definované jako

$$\vartheta_j^{(i)} = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}} \quad \text{a} \quad \psi_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} \left(1 - \vartheta_j^{(i)} \right)$$

Pro zde zkoumaný problém je předpokládána konstantní délka kroku $\Delta t_i = \text{konst.}$, a pak i pomocné konstanty ϑ_j a ψ_j jsou konstantní, závislé na délce kroku Δt a charakteristickém času j -tého článku τ_j .

Vztah pro deformaci (4.7) lze poměrně snadno převést do kódu systému GNU Octave, který je rovněž uveden v dodatku H.

4.6 Porovnání výsledků s analytickým řešením

Pro porovnání funkčních hodnot deformace $\varepsilon(t)$ získaných numerickými metodami s přesným analytickým řešením je vhodné se ještě zamyslet nad vektorem časových okamžiků, pro které jsou tyto hodnoty vyčíslovány.

Jak je již výše uvedeno, funkce zatížení $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$ má následující parametry $\tilde{\sigma} = 5 \text{ MPa}$ a $\omega = \pi/100$. Zatěžovací funkce působí v délce první půlperrody funkce sinus, tj. pro $t \in \langle 0, 100 \rangle$ dní a v tomto intervalu lze tudíž i její odezvu vyhodnocovat. Avšak u funkce `invlap.m` lze největší hodnotu pólu nastavit minimálně na nulu a tudíž pro $t = 0$ nelze inverzní Laplaceovu transformaci provést. Navíc retardační čas prvního článku Kelvinova-Voigtova řetězce je zvolen $\tau_1 = 0,001$ dne a pro nižší časy již takto nastavený model ztrácí svoji vypovídající hodnotu. A pro zde použitý průběh zatížení (postupně narůstající od nuly) nemá sledování odezvy v čase těsně po $t = 0$ ani smysl.

Pro přehledné a zároveň dostatečně vypovídající srovnání je zvoleno deset časových okamžiků, rovnoměrně rozdělující sledovaný interval na osminy. Jen první časový okamžik $t = 0$ je nahrazen časem $t = 0,1$. Jedná se pak o časy 0,1; 12,5; 25; ...; 100. U exponenciálního algoritmu je výpočet proveden pro časový krok $\Delta t = 0,01$, tj. 10 000 dělení intervalu, a pro $\Delta t = 0,001$, tj. 100 000 dělení intervalu. Výsledky testu jsou shrnuty v tabulce 4.3. Vzhledem k vysoké přesnosti obou algoritmů, je pro ně uvedena pouze relativní chyba jejich výsledku vůči analytickému řešení.

t	$\sigma(t)$	$\varepsilon(t)$	korespondenční princip		exponenciální algoritmus	
			$tol = 10^{-9}$	$tol = 10^{-12}$	$\Delta t = 0,01$	$\Delta t = 0,001$
[den]	[MPa]	[10^{-6}]	relativní chyba [10 ⁻⁹]		relativní chyba [10 ⁻⁹]	
0,1	0,02	0,76	5,06	0,01	-0,09	0,00
12,5	1,91	98,15	2,63	0,00	-0,60	-0,01
25,0	3,54	185,58	-0,92	0,00	-0,77	-0,01
37,5	4,62	247,11	-0,47	0,00	-0,91	-0,01
50,0	5,00	272,77	0,97	0,00	-1,05	-0,01
62,5	4,62	258,35	-0,33	0,00	-1,23	-0,01
75,0	3,54	205,85	-0,97	0,00	-1,50	-0,02
87,5	1,91	123,11	1,93	0,00	-2,14	-0,02
100,0	0,00	22,58	0,78	0,00	-8,22	-0,08

Tabulka 4.3: Výsledky srovnávacího testu pro materiálový bod.

Jak je z výsledků patrné, oba postupy vykazují velmi vysokou přesnost. Pokud jde o rychlost jednotlivých algoritmů,² je provedení inverzní Laplaceovy transformace prakticky okamžité ($\sim 0,06$ s, bez ohledu na nastavenou toleranci dosažení pólu), zatímco průběh exponenciálního algoritmu je, i pro 10 000 dělení intervalu, výrazně pomalejší ($\sim 1,53$ s).³

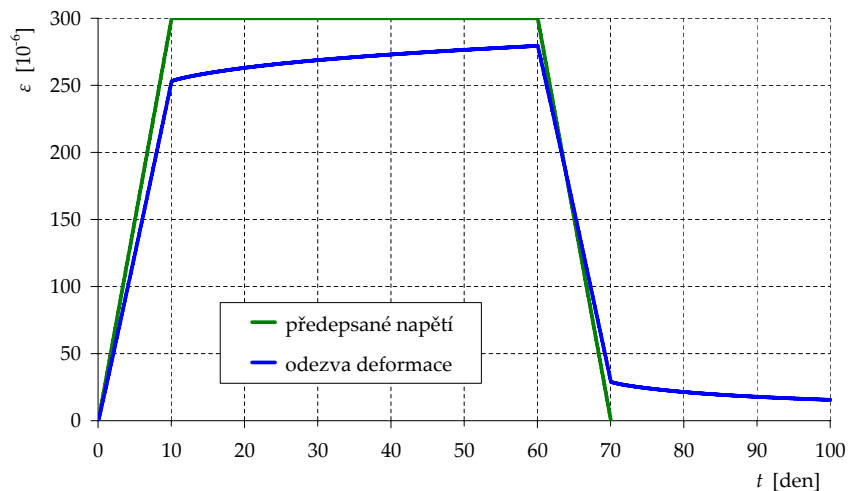
Mohlo by se tak zdát, že použití korespondenčního principu s provedením numerické inverzní Laplaceovy transformace je jednoznačně výhodnější. Je však třeba upozornit, že vzhledem k principu de Hoogova algoritmu založeném na rozkladu do Fourierovy řady, je funkce sinus, navíc ve své první půlperiodě, zvolena mimořádně výhodně. Například pro lichoběžníkové zatížení, které je v technické praxi rovněž velmi časté, vyka-

²Realizovaných na běžném PC: CPU Intel® Core™ 2 Duo T7100 1.80 GHz, 2 GB RAM, Windows Vista™ 32-bit.

³Uváděné časy je třeba brát s určitou rezervou. Jejich poměr je jistě závislý na použitém programovacím jazyku a schopnostech programátora. Určitě však dávají alespoň hrubou představu o výpočetní náročnosti porovnávaných algoritmů.

zuje tento algoritmus oproti analytickému řešení v určitých časových intervalech nezanedbatelné nepřesnosti. A snižování parametru numerické tolerance dosažení pólu u funkce `invlap.m` nemá na dosahovanou přesnost již prakticky žádný vliv.

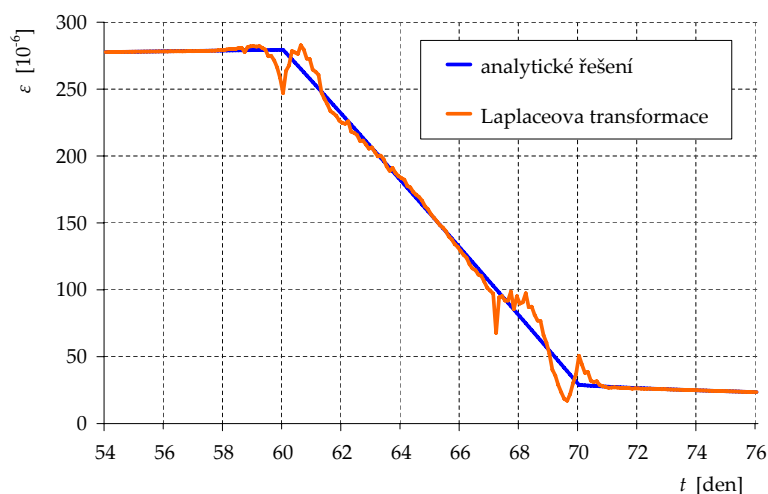
Vzhledem k tomu, že grafické znázornění odezvy na sinusový průběh zatížení pro materiálový bod není nikterak zajímavé a je navíc uváděno v následující kapitole jako limitní případ kompozitu složeného ze 100 % viskoelastické matrice, je zde pro zajímavost pozornost zaměřena právě na lichoběžníkové zatížení. Jak je uvedeno v dodatku F, exponenciální algoritmus pro tento typ zatížení, složený prakticky ze dvou lineárních průběhů, dává zcela přesné řešení nezávislé na délce kroku.⁴ Odezva deformace je zobrazena na obr. 4.1.



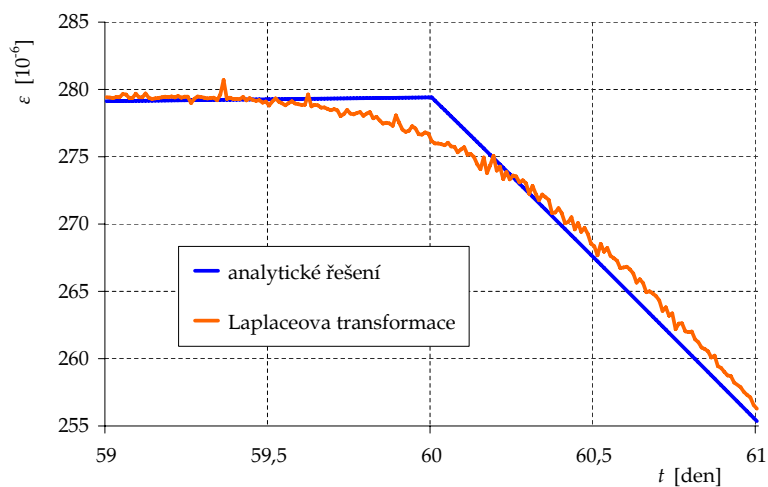
Obrázek 4.1: Odezva deformace na lichoběžníkové zatížení (předepsané napětí je zobrazeno pouze pro ilustraci kdy a jak působí a nemá k hodnotám na svislé ose žádný vztah).

Algoritmus pro inverzní Laplaceovu transformaci vykazuje, zcela podle předpokladů, nepřesnosti v časových intervalech kolem náhlých změn průběhu zatížení a tím i odezvy deformace. Maximální relativní chyba však dosahuje jen cca 1 % a z inženýrského hlediska je tak algoritmus možno považovat za přesný. Detail odezvy deformace pro odtěžovací větev je zobrazen na obr. 4.2. A ještě podrobnější detail odezvy při přechodu z udržovacího napětí na sestupnou větev je zobrazen na obr. 4.3.

⁴Analytické řešení pro lichoběžníkové zatížení, vyřešením konvolučního integrálu i pomocí Laplaceovy transformace při použití korespondenčního principu, je podrobně popsáno v dodatku D. Shodné výsledky dosahované exponenciálním algoritmem tak rovněž potvrzují správnost jeho odvození i naprogramování.



Obrázek 4.2: Nepřesnost de Hoogova algoritmu pro odezvu deformace pro časový interval odtěžovací větve (při časovém kroku $\Delta t = 0,1$ dne). Absolutní chyba algoritmu je pro větší názornost $10\times$ zvětšena.



Obrázek 4.3: Detail časového intervalu s největší nepřesností algoritmu (při časovém kroku $\Delta t = 0,01$ dne).

Cílem této práce, jak již bylo uvedeno na začátku této kapitoly, však není říci, která metoda je obecně nejlepší, ale především ověřit funkčnost a přesnost exponenciálního algoritmu. Ten, i přes svoji nevýhodu časové náročnosti, vykazuje ze své podstaty značnou robustnost vůči zvolené zatěžovací funkci. Testy na úrovni materiálového bodu pak prokázaly dostatečnou spolehlivost obou algoritmů, což umožňuje jejich použití pro zjišťování viskoelastické odezvy kompozitů. To je předmětem následujících kapitol.

Kapitola 5

Vláknový kompozit při jednoosé napjatosti

5.1 Jednoduchý model kompozitu

Po ověření funkčnosti a spolehlivosti obou srovnávaných algoritmů ke zjištění vývoje deformace $\varepsilon(t)$ pro daný průběh předepsaného napětí $\sigma(t)$ na homogenním viskoelastickém materiálu, je možno přistoupit k zobecnění použitých metod na kompozitní materiál. To je nejprve provedeno pro jednoduchý reologický model kompozitu s viskoelastickou maticí a elastickou inkluzí. Takovýmto vhodným modelem je bezpochyby vláknový kompozit namáhaný tahem ve směru vláken, pro který je provedení homogenizace velmi jednoduché.

Za předpokladu dokonalé soudržnosti obou fází je zřejmé, že deformace matrice a vláken musí být shodné, tj.

$$\varepsilon_m(t) = \varepsilon_i(t) = \varepsilon(t) \quad (5.1)$$

Celkové napětí lze podle Voigtovy meze rozdělit jako

$$\sigma(t) = f_m \sigma_m(t) + f_i \sigma_i(t) \quad (5.2)$$

kde f_m a f_i jsou objemové podíly matrice a inkluze (vláken), pro které platí $f_m + f_i = 1$.

Pro homogenizaci, zde konkrétně určení funkce poddajnosti homogenizovaného materiálu, tohoto modelu kompozitu je nejprve předpokládán průběh zatížení opět jako vážený jednotkový skok, tj. $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \mathcal{H}(t)$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ Pak pro $t \geq 0$ lze vztah (5.2) vyjádřit jako

$$\tilde{\sigma} = f_m \tilde{\sigma}_m + f_i \tilde{\sigma}_i \quad (5.3)$$

a deformace jednotlivých fází kompozitu, pomocí jejich funkcí poddajnosti, jako

$$\varepsilon_m(t) = J_{0,m}(t) \tilde{\sigma}_m \quad \text{a} \quad \varepsilon_i(t) = J_{0,i}(t) \tilde{\sigma}_i \quad (5.4)$$

Napětí přenášené jednotlivými složkami je pak

$$\tilde{\sigma}_m = \frac{1}{J_{0,m}(t)} \varepsilon_m(t) \quad \text{a} \quad \tilde{\sigma}_i = \frac{1}{J_{0,i}(t)} \varepsilon_i(t) \quad (5.5)$$

Dosažením takto vyjádřených napětí do (5.3) a využitím (5.1) se dostává

$$\tilde{\sigma} = f_m \frac{1}{J_{0,m}(t)} \varepsilon_m(t) + f_i \frac{1}{J_{0,i}(t)} \varepsilon_i(t) = \left(\frac{f_m}{J_{0,m}(t)} + \frac{f_i}{J_{0,i}(t)} \right) \varepsilon(t) \quad (5.6)$$

A z této rovnosti vyjádřený vývoj deformace je popsán vztahem

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{f_m}{J_{0,m}(t)} + \frac{f_i}{J_{0,i}(t)} \right)^{-1} \tilde{\sigma} = J_{0,\text{eff}}(t) \tilde{\sigma} \quad (5.7)$$

kde $J_{0,\text{eff}}(t)$ je efektivní (homogenizovaná) funkce poddajnosti odpovídající Reussově mezi, tj.

$$\frac{1}{J_{0,\text{eff}}(t)} = \frac{f_m}{J_{0,m}(t)} + \frac{f_i}{J_{0,i}(t)} \quad \Rightarrow \quad J_{0,\text{eff}}(t) = \left(\frac{f_m}{J_{0,m}(t)} + \frac{f_i}{J_{0,i}(t)} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

kde $J_{0,m}(t)$ a $J_{0,i}(t)$ jsou známé funkce poddajnosti jednotlivých složek.

Matrice je uvažována jako viskoelastický materiál popsáný funkcí poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec jako

$$J_{0,m}(t) = \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (5.9)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{J_{0,m}}(p) = \frac{1}{p E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau_j} \right)} \quad (5.10)$$

kde materiálové parametry Kelvinova-Voigtova řetězce jsou uvedeny v tabulce 4.2 v předcházející kapitole.

Inkluze (vlákna) jsou uvažovány jako materiál pružný, jehož konstitutivní vztah je popsán Hookeovým zákonem a jeho funkce poddajnosti je

$$J_{0,i}(t) = \frac{1}{E_{i,0}} \mathcal{H}(t) \quad (5.11)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{J}_{0,i}(p) = \frac{1}{p E_{i,0}} \quad (5.12)$$

kde Youngův modul pružnosti vláken $E_{i,0}$ je uveden v tabulce 4.1 rovněž v předcházející kapitole.

Jak již bylo výše zmíněno, obecný průběh předepsaného zatížení je samozřejmě i pro tento model kompozitu zvolen totožný jako u materiálového bodu pro který byly numerické algoritmy otestovány. Jedná se tudíž o zatížení popsané funkčním vztahem

$$\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t \quad (5.13)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{\sigma}(p) = \tilde{\sigma} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (5.14)$$

kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ je amplituda napětí a ω je úhlová frekvence. Průběh zatěžovací funkce je opět volen v rozsahu jedné půlperrody funkce sinus, tj. v intervalu $(0, \pi)$ pro parametr ωt a pro $t_{\max} = 100$ dní je tak třeba opět zvolit $\omega = \pi/100$. S ohledem na vyztužení epoxidové matrice je pouze amplituda zatížení navýšena na $\tilde{\sigma} = 20$ MPa.

5.2 Řešení korespondenčním principem

Stejně jako v předcházející kapitole je řešení touto metodou v principu opět velmi jednoduché. Pro závislost obrazu deformace $\widehat{\varepsilon}(p)$ na obrazu obecného průběhu zatěžovacího napětí $\widehat{\sigma}(p)$ v Laplaceově prostoru (při nulových počátečních podmínkách) platí i pro kompozit vztah

$$\widehat{\varepsilon}(p) = p \widehat{J}_{0,\text{eff}}(p) \widehat{\sigma}(p) \quad (5.15)$$

kde $\widehat{J}_{0,\text{eff}}(p)$ je Laplaceův obraz efektivní (homogenizované) funkce poddajnosti. Ten lze dle vzoru (5.8) zapsat jako

$$\widehat{J}_{0,\text{eff}}(p) = \left(\frac{f_m}{\widehat{J}_{0,m}(p)} + \frac{f_i}{\widehat{J}_{0,i}(p)} \right)^{-1} \quad (5.16)$$

Dosažením za $\widehat{J}_{0,m}(p)$ a $\widehat{J}_{0,i}(p)$ z (5.10) a (5.12) se získává

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_{0,\text{eff}}(p) &= \left(\frac{f_m}{\frac{1}{p E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau_j})}} + \frac{f_i}{\frac{1}{p E_{i,0}}} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{f_m}{\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}}} + \frac{f_i}{E_{i,0}} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{f_m \frac{1}{E_{i,0}} + f_i \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)}{\frac{1}{E_{i,0}} \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{p} \frac{\frac{1}{E_{i,0}} \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)}{f_m \frac{1}{E_{i,0}} + f_i \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Dosažením obrazů $\widehat{J}_{0,\text{eff}}(p)$ a $\widehat{\sigma}(p)$ z (5.17) a (5.14) do (5.15) se pro obraz deformace $\widehat{\varepsilon}(p)$ dostává

$$\widehat{\varepsilon}(p) = \frac{\frac{1}{E_{i,0}} \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)}{f_m \frac{1}{E_{i,0}} + f_i \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j \tau_j} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_j}} \right)} \widehat{\sigma} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (5.18)$$

Tímto je problém v Laplaceově prostoru vyřešen, avšak obraz deformace $\widehat{\varepsilon}(p)$ je již natolik komplikovaný, že provést inverzi do časové oblasti analyticky by bylo přinejmenším neúměrně náročné. To je pak stejně jako u materiálového bodu provedeno numericky v systému GNU Octave za pomoci funkce `invlap.m`. V kódu, který je rovněž uveden v dodatku H, došlo přitom jen k drobné úpravě spočívající ve složitěji popsané funkci poddajnosti.

5.3 Řešení exponenciálním algoritmem

Princip exponenciálního algoritmu modifikovaný pro vláknový kompozit při jednoosé napjatosti je podrobněji popsán v dodatku F. Ve výsledku je deformace $\varepsilon(t)$ po i -tém kroku, tj. v čase $t_i = \sum_{k=1}^i \Delta t_k$, popsána následujícím rekurzivním zápisem analogickým k (4.6) pro materiálový bod

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + f_m \frac{\check{E}_m^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (5.19)$$

přičemž pro rychlost deformace j -tého článku opět zcela analogicky platí

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \vartheta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \vartheta_j^{(i)}}{\Delta t_i E_j} \Delta \sigma_m^{(i)}$$

kde přírůstek napětí v matici lze určit ze vztahu (5.2), platném i pro přírůstek napětí, jako

$$\Delta \sigma_m^{(i)} = \frac{\Delta \sigma^{(i)} - f_i \Delta \sigma_i^{(i)}}{f_m} = \frac{\Delta \sigma^{(i)} - f_i E_{i,0} \Delta \varepsilon^{(i)}}{f_m}$$

Algoritmická efektivní tuhost \check{E}_{eff} je, v souladu s Voigtovou mezí, definována jako

$$\check{E}_{\text{eff}}^{(i)} = f_m \check{E}_m^{(i)} + f_i E_{i,0}$$

kde algoritmická tuhost matrice je zcela analogicky materiálovému bodu vyjádřena jako

$$\check{E}_m^{(i)} = \left(\frac{1}{E_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{E_j} \right)^{-1}$$

Ostatní parametry algoritmu zůstávají oproti materiálovému bodu nezměněny. Jde především o pomocné konstanty $\vartheta_j^{(i)}$ a $\psi_j^{(i)}$, vyplývající z materiálových parametrů matrice. I zde je uvažována konstantní délka kroku $\Delta t_i = \text{konst.}$, a pak i pomocné konstanty ϑ_j a ψ_j jsou opět konstantní.

Kód pro systém GNU Octave, s drobnými úpravami dle vztahu (5.19) oproti verzi pro materiálový bod, je rovněž uveden v dodatku H.

5.4 Porovnání výsledků

Pro porovnání funkčních hodnot deformace $\varepsilon(t)$ získaných oběma numerickými metodami je opět zvoleno devět časových okamžiků, tj. časy 0,1; 12,5; 25; ... ; 100. Vyhodnocení je provedeno pro kompozit s 20% podílem vláken. Nyní se porovnávají dva algoritmy, které jsou zcela jistě zatíženy určitou chybou a nelze ani s jistotou říci, který z nich je přesnější. Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly 4, za referenční je v tomto případě zvoleno řešení korespondenčním principem. Inverzní Laplaceova transformace je provedena s parametrem numerické tolerance dosažení pólu u funkce `invlap.m` nastaveným na $tol = 10^{-12}$. S tímto parametrem byly hodnoty relativní chyby, se sledovanou mírou 10^{-9} , pro model materiálového bodu prakticky nulové (viz tab. 4.3). U exponenciálního algoritmu je výpočet proveden pro časové kroky $\Delta t = 0,01$ a $\Delta t = 0,001$, tj. 10 000 a 100 000 dělení intervalu. Výsledky

testu jsou shrnuty v tabulce 5.1. Relativní chyba exponenciálního algoritmu je vyčíslena vůči inverzní Laplaceově transformaci, která je zde považována za přesné řešení.

		korespondenční princip	exponenciální algoritmus	
		$tol = 10^{-12}$	$\Delta t = 0,01$	$\Delta t = 0,001$
t	$\sigma(t)$	$\varepsilon(t)$	relativní chyba	
[den]	[MPa]	[10^{-6}]	[10^{-9}]	
0,1	0,06	0,67	-24,02	-0,26
12,5	7,65	82,48	-0,15	0,00
25,0	14,14	153,00	-0,15	0,00
37,5	18,48	200,54	-0,16	0,00
50,0	20,00	217,77	-0,18	0,00
62,5	18,48	202,03	-0,21	0,00
75,0	14,14	155,69	-0,25	0,00
87,5	7,65	85,77	-0,38	-0,01
100,0	0,00	2,92	-7,10	-0,07

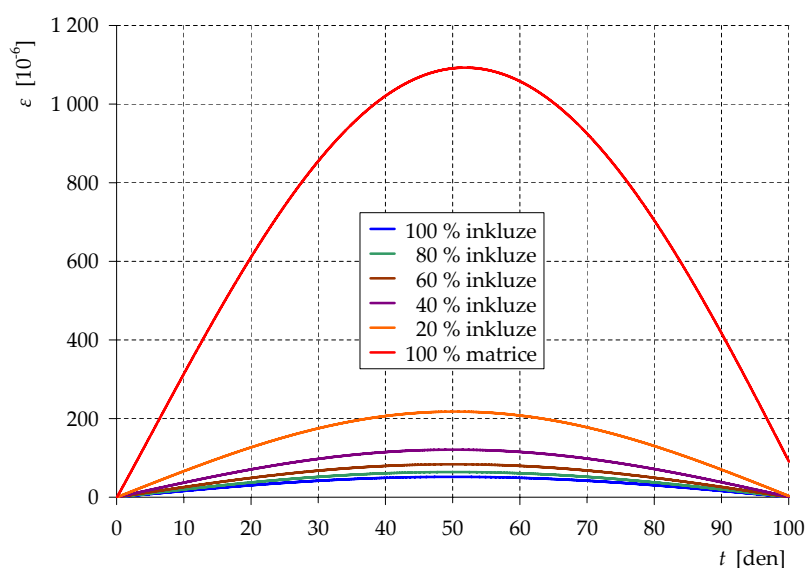
Tabulka 5.1: Výsledky srovnávacího testu pro vláknový kompozit.

Jak je z výsledků patrné, relativní chyba exponenciálního algoritmu je i pro délku kroku $\Delta t = 0,01$ zanedbatelná a s navýšením počtu kroků o jeden řád se snižuje přibližně o dva řády, tj. obdobně jako u materiálového bodu.¹ Lze tak vyslovit předpoklad, že výsledky získané korespondenčním principem s použitím numerické inverzní Laplaceovy transformace je možno považovat za přesné řešení a exponenciální algoritmus k nim konverguje. Potvrdila se tak použitelnost obou numerických metod i pro jednoduchý model kompozitu.

Pokud jde o rychlost testovaných algoritmů, je provedení inverzní Laplaceovy transformace prakticky okamžité ($\sim 0,08$ s), zatímco exponenciální algoritmus je výrazně pomalejší ($\sim 1,89$ s pro 10 000 dělení intervalu). Oba sledované algoritmy jsou však jen mírně pomalejší oproti verzím pro materiálový bod.

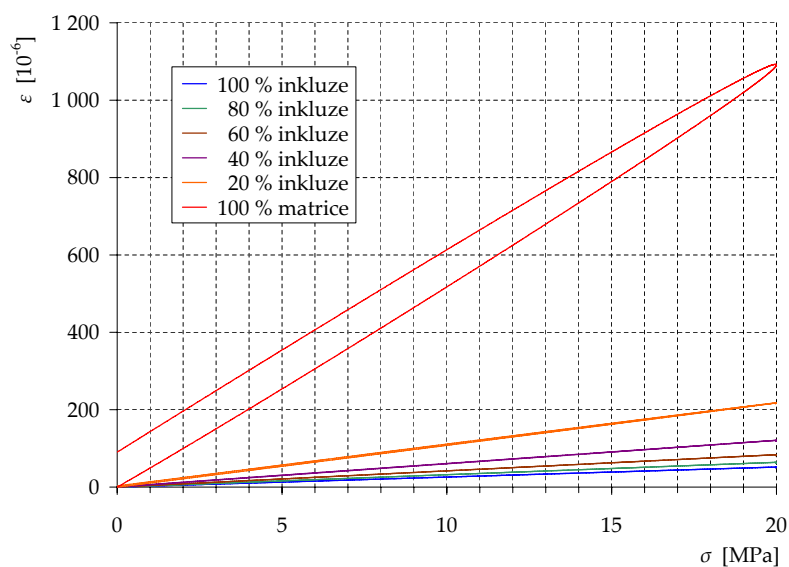
¹Je zajímavé, že dosahovaná relativní přesnost je zde, až na časový okamžik $t = 0,1$ dne, vyšší než relativní přesnost vůči analytickému řešení u modelu materiálového bodu. K vyloučení pochybností o bezchybnosti verze algoritmu pro materiálový bod, byl proveden i výpočet upraveným algoritmem pro vláknový kompozit s parametry z předcházející kapitoly, tj. se 100% podílem matrice a $\bar{\sigma} = 5$ MPa. Výsledky relativní přesnosti exponenciálního algoritmu vůči analytickému řešení jsou shodné s hodnotami v tab. 4.3 a těmto hodnotám navíc odpovídají i relativní přesnosti exponenciálního algoritmu vůči korespondenčnímu principu. To opět potvrzuje jak bezchybnost naprogramování exponenciálního algoritmu, tak značnou přesnost numerické inverzní Laplaceovy transformace pomocí funkce `invlap.m`

Grafické srovnání jednotlivých algoritmů nemá, vzhledem k jejich mimořádné přesnosti, ani v tomto případě jednoduchého reologického modelu kompozitu smysl. Je však zajímavé znázornit hodnoty poměrné deformace pro měnící se objemový podíl tuhých vláken v poměrně poddajné matici. To je pro pět variant různých objemových podílů inkluze a matrice zobrazeno na obr. 5.1.

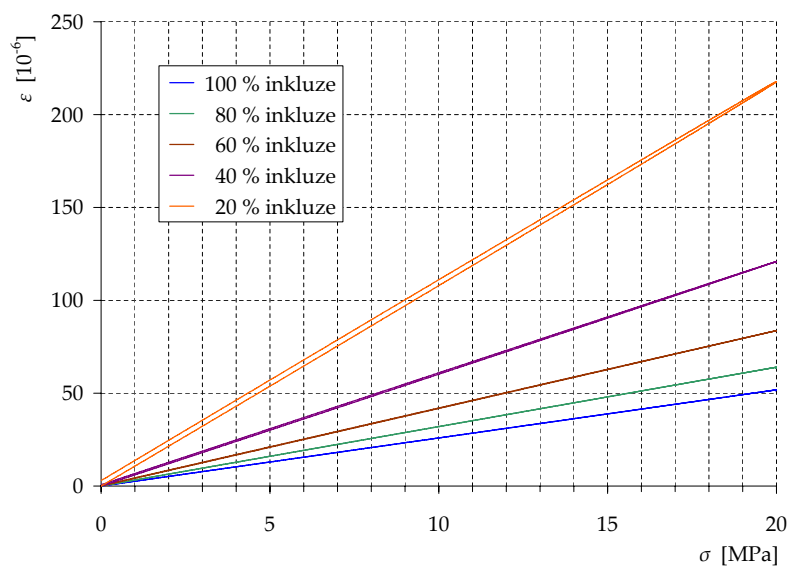


Obrázek 5.1: Odezva deformace na sinusové zatížení při měnícím se podílu inkluze-matrice.

Vliv dotvarování je zřejmý i z pracovního diagramu kompozitu, zobrazeném na obr. 5.2. A aby byl tento jev dobře patrný i pro varianty s určitým podílem inkluze, jejíž byť i minimální podíl výrazně ovlivňuje odezvu kompozitu (což pro zvolený model zcela odpovídá předpokladům), je na obr. 5.3 v „detailu“ zobrazen ten samý graf jen bez varianty se 100 % matrice.



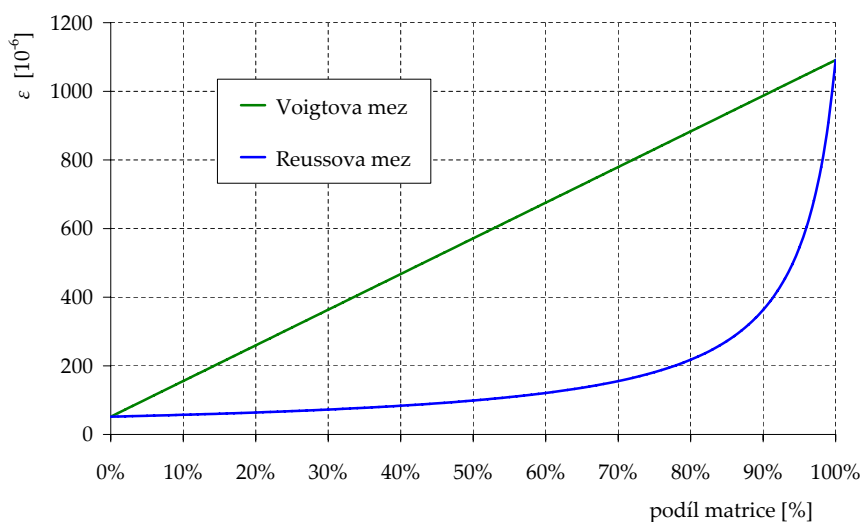
Obrázek 5.2: Pracovní diagram kompozitního materiálu při měnícím se podílu inkluze-matrice.



Obrázek 5.3: Pracovní diagram kompozitního materiálu při měnícím se podílu inkluze-matrice bez varianty se 100 % matrice.

Již pohledem na tyto grafy je zřejmé, že závislost mezi objemovým podílem inkluze a efektivní poddajností kompozitního materiálu je nelineární.

V grafu na obr. 5.4 je zobrazena deformace $\varepsilon(t)$ pro čas $t = 50$, tj. pro amplitudu zatížení. Deformace je zde vyčíslena pro, u tohoto případu přesnou, homogenizovanou funkci poddajnosti podle Reussovy meze dle (5.8) a pro její odhad dle Voigtovy meze, odpovídající váženému aritmetickému průměru podle jednotlivých fází.



Obrázek 5.4: Synergický efekt vláknového kompozitu.

Z grafu je zřejmé, že pro jednoosé namáhání ve směru vláken dochází u kompozitu k výrazně nižší deformaci, než by odpovídalo poměrnému zastoupení jeho jednotlivých složek. Na tomto příkladu je názorně ukázán synergický efekt, zmiňovaný v kapitole 1 věnované kompozitním materiálům jako jejich základní charakteristická vlastnost.

Kapitola 6

Částicový kompozit při smykovém namáhání

6.1 Obecný model kompozitu

Po úspěšném otestování obou numerických metod pro nejjednodušší model kompozitu provedeném v předcházející kapitole, je možno přistoupit ke zjištění viskoelastické odezvy složitějšího modelu kompozitu homogenizovaného pomocí některé z obecných metod homogenizace. Vzhledem k tomu, že pro zvolený materiál matrice je objemová část dotvarování mnohem menší než deviatorická, je zde uvažována pouze deviatorická část deformace a předepsané zatěžovací napětí je pak logicky rovněž předpokládáno pouze jako jeho deviatorická složka. Za vhodný model kompozitu je zde vybrán *částicový kompozit při namáhání čistým smykem*.

Vzhledem k tomu, že doposud bylo uvažováno pouze jednoosé namáhání, tj. pro konstitutivní vztahy byl uvažován *Hookeův zákon* jen ve svém základním tvaru $\sigma = E \varepsilon$, popř. v jeho zobecnění pro viskoelastický materiál na vztah $\sigma(t) = R_0(t) \dot{\varepsilon}$ nebo v inverzní formulaci na $\varepsilon(t) = J_0(t) \dot{\sigma}$, je v dodatku A připomenuta elementární problematika, týkající se vzájemného vztahu mezi jednotlivými složkami deformace a napětí při obecné napatosti. Z ohledem na problémy řešené v této práci je zde však pozornost věnována pouze rozkladu napětí a deformace na objemovou a deviatorickou část a příslušným konstitutivním vztahům.

Ilustrace principů této problematiky je provedena pro lineární teorii pružnosti, s uvažováním homogenního elastického materiálu. Tento předpoklad je platný i pro statisticky izotropní kompozitní těleso, při sledování napětí a deformace na jeho makroskopické úrovni. Výrazy pro rozklad napětí a deformace lze pak již uvažováním časové závislosti jednotlivých veličin jednoduše zobecnit pro lineární teorii viskoelasticity. Samozřejmě je zde pak nutno vzít v úvahu specifičnost operátorů pro viskoelastické konstitutivní vztahy.

6.2 Konstitutivní vztahy

Je tudíž uvažován kompozit s viskoelastickou maticí a kulovými, rovnoměrně rozmístěnými elastickými inkluzemi, namáhaný čistým smykem. Jelikož se z makroskopického hlediska jedná o kompozit izotropní, není volba souřadného systému a rovina působení smyku podstatná a tak u smykového napětí τ a smykové deformace (zkosení) γ nejsou dále pro větší přehlednost uváděny indexy specifikující rovinu smyku.

Ze vztahů pro deviatorickou část zobecněného Hookeova zákona uvedených v dodatku A se získávají následující konstitutivní vztahy pro čistý smyk u izotropního elastického materiálu

$$\tau = \mu \gamma \quad \gamma = J^d \tau \quad (6.1)$$

kde μ je smykový modul pružnosti a $J^d = 1/\mu$ je smyková poddajnost.

Tak jako u předcházejících viskoelastických modelů, bude dále předmětem zájmu pouze vývoj deformace pro daný průběh předepsaného napětí. Pro časový vývoj průměrné smykové deformace $\langle \gamma \rangle(t)$, jako odezvy na obecný předepsaný průběh makroskopického smykového napětí $\langle \tau \rangle(t)$ platí

$$\langle \gamma \rangle(t) = \int_0^t J_{\text{eff}}^d(t - \xi) \langle \dot{\tau} \rangle(\xi) d\xi \quad (6.2)$$

kde $J_{\text{eff}}^d(t)$ je efektivní smyková funkce poddajnosti.

Pro určení efektivní smykové funkce poddajnosti se vyjde z odhadu dle vztahu (3.46) pro elastický kompozit, který byl odvozen metodou Mori-Tanaka jako

$$J_{\text{eff}}^d = \frac{f_m + f_i \left(1 + \beta_m \left(\frac{J_m^d}{J_i^d} - 1\right)\right)^{-1}}{\frac{f_m}{J_m^d} + \frac{f_i}{J_i^d} \left(1 + \beta_m \left(\frac{J_m^d}{J_i^d} - 1\right)\right)^{-1}} \quad (6.3)$$

kde f_m a f_i jsou objemové části matrice a inkluze (koulí), pro které platí $f_m + f_i = 1$, J_i^d a J_m^d jsou smyková poddajnost inkluze a matrice a β_m je konstanta závislá na materiálových parametrech matrice

$$\beta_m = \frac{6(k_m + 2\mu_m)}{5(3k_m + 4\mu_m)} = \frac{6(J_m^d + 2J_m^v)}{5(3J_m^d + 4J_m^v)} \quad (6.4)$$

kde k_m a μ_m jsou objemový a smykový modul pružnosti matrice a J_m^v a J_m^d jsou objemová a smyková poddajnost matrice, pro elastický materiál definované jako $J_m^v = 1/k_m$ a $J_m^d = 1/\mu_m$. Zde je vhodné si povšimnout, že

efektivní smyková poddajnost je závislá, kromě smykové poddajnosti inkluze a matrice, i na objemové poddajnosti matrice.

Matrice je opět uvažována jako viskoelastický materiál popsaný smykovou funkcí poddajnosti pro Kelvinův-Voigtův řetězec jako

$$J_m^d(t) = \left(\frac{1}{\mu_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{\mu_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t) \quad (6.5)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{J}_m^d(p) = \frac{1}{p \mu_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{\mu_j \tau_j} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau_j} \right)} \quad (6.6)$$

Objemové dotvarování matrice je zde zanedbáno a její objemový modul pružnosti je tak uvažován jako konstanta. Objemovou funkci poddajnosti matrice lze tudíž vyjádřit jako

$$J_m^v(t) = \frac{1}{k_{m,0}} \mathcal{H}(t) \quad (6.7)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{J}_m^v(p) = \frac{1}{p k_{m,0}} \quad (6.8)$$

Materiálové parametry matrice, tj. smykový a objemový modul pružnosti pro jednotlivé články Kelvinova-Voigtova řetězce, jsou uvedeny v tabulce 4.2 v kapitole 4.

Inkluze (koule) jsou uvažovány jako materiál pružný, stejný jako vlákna v předcházející kapitole, a jejich smyková funkce poddajnosti je definována jako

$$J_i^d(t) = \frac{1}{\mu_{i,0}} \mathcal{H}(t) \quad (6.9)$$

a její Laplaceův obraz je

$$\widehat{J}_i^d(p) = \frac{1}{p \mu_{i,0}} \quad (6.10)$$

kde smykový modul pružnosti inkluzí $\mu_{i,0}$ se vyčíslí z Youngova modulu pružnosti E a Poissonova součinitele ν , uvedených v tabulce 4.1 rovněž v kapitole 4, jako

$$\mu_{i,0} = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} = \frac{386}{2(1+0,41)} = 137 \text{ GPa}$$

Obecný průběh předepsaného zatížení je i pro tento model kompozitu zvolen stejného typu jako u předcházejících dvou modelů. Jen místo normálového napětí σ je zde uvažováno napětí smykové τ . Zatížení je tak popsáno funkčním vztahem

$$\langle \tau \rangle(t) = \tilde{\tau} \sin \omega t \quad (6.11)$$

a jeho Laplaceův obraz je

$$\widehat{\langle \tau \rangle}(p) = \tilde{\tau} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (6.12)$$

kde $\tilde{\tau} = \text{konst.}$ je amplituda napětí a ω je úhlová frekvence. Průběh zatěžovací funkce je opět volen v rozsahu jedné půlperrody funkce sinus, tj. v intervalu $(0, \pi)$ pro parametr ωt a pro $t_{\max} = 100$ dní je tak třeba opět zvolit $\omega = \pi/100$. Amplituda zatížení je zvolena $\tilde{\tau} = 5$ MPa.

6.3 Řešení korespondenčním principem

Výpočet odezvy touto metodou je v principu opět velmi jednoduchý. Pro závislost obrazu průměrné smykové deformace $\widehat{\langle \gamma \rangle}(p)$ na obrazu obecného průběhu makroskopického zatěžovacího napětí $\widehat{\langle \tau \rangle}(p)$ v Laplaceově prostoru (při nulových počátečních podmínkách) platí i pro kompozit homogenizovaný metodou Mori-Tanaka vztah

$$\widehat{\langle \gamma \rangle}(p) = p \widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p) \widehat{\langle \tau \rangle}(p) \quad (6.13)$$

kde $\widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p)$ je Laplaceův obraz efektivní smykové funkce poddajnosti. Ten lze dle vzoru pro elastický kompozit (6.3) zapsat jako¹

$$\widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p) = \frac{f_m + f_i \left(1 + \widehat{\beta}_m(p) \left(\frac{\widehat{J}_m^{\text{d}}(p)}{\widehat{J}_i^{\text{d}}(p)} - 1 \right) \right)^{-1}}{\frac{f_m}{\widehat{J}_m^{\text{d}}(p)} + \frac{f_i}{\widehat{J}_i^{\text{d}}(p)} \left(1 + \widehat{\beta}_m(p) \left(\frac{\widehat{J}_m^{\text{d}}(p)}{\widehat{J}_i^{\text{d}}(p)} - 1 \right) \right)^{-1}} \quad (6.14)$$

kde $\widehat{\beta}_m(p)$ je Laplaceův obraz konstanty, který je dle vzoru pro elastický kompozit (6.4) definovaný jako

$$\widehat{\beta}_m(p) = \frac{6 \left(\widehat{k}_m(p) + 2\widehat{\mu}_m(p) \right)}{5 \left(3\widehat{k}_m(p) + 4\widehat{\mu}_m(p) \right)} = \frac{6 \left(\widehat{J}_m^{\text{d}}(p) + 2\widehat{J}_m^{\text{v}}(p) \right)}{5 \left(3\widehat{J}_m^{\text{d}}(p) + 4\widehat{J}_m^{\text{v}}(p) \right)} \quad (6.15)$$

¹Analogickou definici obrazu efektivní smykové funkce poddajnosti lze nalézt v [28, 22].

Dosazením obrazů příslušných funkcí poddajnosti z (6.6), (6.8) a (6.10) do (6.15) a posléze do (6.14) se získá obraz efektivní smykové funkce poddajnosti $\widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p)$. Po jeho dosazení a po dosazení obrazu zatěžovací funkce $\widehat{\langle \tau \rangle}(p)$ z (6.12) do (6.13) se pro obraz deformace $\widehat{\langle \gamma \rangle}(p)$ dostává

$$\widehat{\langle \gamma \rangle}(p) = p \widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p) \bar{\tau} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (6.16)$$

Vzhledem k tomu, že inverze této odezvy do časové oblasti bude, stejně jako u jednoduchého modelu kompozitu, provedena numericky v systému GNU Octave za pomoci funkce `invlap.m`, není nutné a ani účelné funkci $\widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p)$ podrobněji rozepisovat. V kódu, který je rovněž uveden v dodatku H, došlo opět jen k úpravě definice funkce poddajnosti.

6.4 Řešení exponenciálním algoritmem

Princip exponenciálního algoritmu pro částicový kompozit namáhaný čistým smykem je odvozen v dodatku F a je do značné míry shodný s algoritmem pro vláknový kompozit při jednoosé napjatosti. Kromě triviální změny v označení jednotlivých veličin, došlo pouze k zavedení elastických koncentračních faktorů A_{m}^{d} a A_{i}^{d} a koncentračních faktorů vlastního napětí a_{m}^{d} a a_{i}^{d} do vztahů vyjadřujících deformace jednotlivých fází prostřednictvím deformace celkové.

Výsledná smyková deformace $\gamma(t)$ po i -tém kroku, tj. v čase $t_i = \sum_{k=1}^i \Delta t_k$, je popsána rekurzivním zápisem

$$\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)} + f_{\text{m}} \frac{A_{\text{m}}^{\text{d}(i)} \check{\mu}_{\text{m}}^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\gamma}_j^{(i-1)} + \frac{\Delta \tau^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (6.17)$$

přičemž pro rychlost deformace j -tého článku platí

$$\dot{\gamma}_j^{(i)} = \vartheta_j^{(i)} \dot{\gamma}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \vartheta_j^{(i)}}{\Delta t_i \mu_j} \Delta \tau_{\text{m}}^{(i)}$$

kde přírůstek smykového napětí v matici lze určit jako

$$\Delta \tau_{\text{m}}^{(i)} = \check{\mu}_{\text{m}}^{(i)} \left(\Delta \gamma_{\text{m}}^{(i)} - \Delta \check{\gamma}_{\text{m}}^{(i)} \right) = \check{\mu}_{\text{m}}^{(i)} \left(A_{\text{m}}^{\text{d}(i)} \Delta \gamma^{(i)} + \Delta a_{\text{m}}^{\text{d}(i)} - \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\gamma}_j^{(i-1)} \right)$$

kde $\Delta a_{\text{m}}^{\text{d}}$ je přírůstek koncentračního faktoru vlastního napětí matrice definovaný jako

$$\Delta a_{\text{m}}^{\text{d}(i)} = \left(1 - A_{\text{m}}^{\text{d}(i)} \right) \left(\check{\mu}_{\text{m}}^{(i)} - \mu_{\text{i},0} \right)^{-1} \check{\mu}_{\text{m}}^{(i)} \Delta \check{\gamma}_{\text{m}}^{(i)} \quad (6.18)$$

Algoritmická efektivní smyková tuhost $\check{\mu}_{\text{eff}}$ je definována jako

$$\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)} = f_m A_m^{\text{d}(i)} \check{\mu}_m^{(i)} + f_i A_i^{\text{d}(i)} \mu_{i,0}$$

kde A_m^{d} a A_i^{d} jsou elastické koncentrační faktory určené metodou Mori-Tanaka jako

$$A_m^{\text{d}(i)} = \frac{1}{f_m + f_i \left(1 + \beta_m^{(i)} \left(\frac{\mu_{i,0}}{\check{\mu}_m^{(i)}} - 1 \right) \right)^{-1}} \quad (6.19)$$

$$A_i^{\text{d}(i)} = \frac{\left(1 + \beta_m^{(i)} \left(\frac{\mu_{i,0}}{\check{\mu}_m^{(i)}} - 1 \right) \right)^{-1}}{f_m + f_i \left(1 + \beta_m^{(i)} \left(\frac{\mu_{i,0}}{\check{\mu}_m^{(i)}} - 1 \right) \right)^{-1}} \quad (6.20)$$

u kterých je β_m konstanta závislá na materiálových parametrech matrice následovně

$$\beta_m^{(i)} = \frac{6 \left(k_{m,0} + 2\check{\mu}_m^{(i)} \right)}{5 \left(3k_{m,0} + 4\check{\mu}_m^{(i)} \right)}$$

a algoritmická smyková tuhost matrice je vyjádřena jako

$$\check{\mu}_m^{(i)} = \left(\frac{1}{\mu_{m,0}} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{\mu_j} \right)^{-1}$$

Pomocné konstanty $\vartheta_j^{(i)}$ a $\psi_j^{(i)}$, vyplývající z materiálových parametrů matrice, jsou zcela analogicky materiálovému bodu definovány jako

$$\vartheta_j^{(i)} = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}} \quad \text{a} \quad \psi_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} \left(1 - \vartheta_j^{(i)} \right)$$

I u tohoto modelu je uvažována konstantní délka kroku $\Delta t_i = \text{konst.}$, a pak i pomocné konstanty ϑ_j a ψ_j , a tím i všechny na nich závislé parametry, jsou opět konstantní.

Kód pro systém GNU Octave, s výše zmíněnými úpravami oproti verzi pro vláknový kompozit při jednoosé napjatosti, je rovněž uveden v dodatku H.

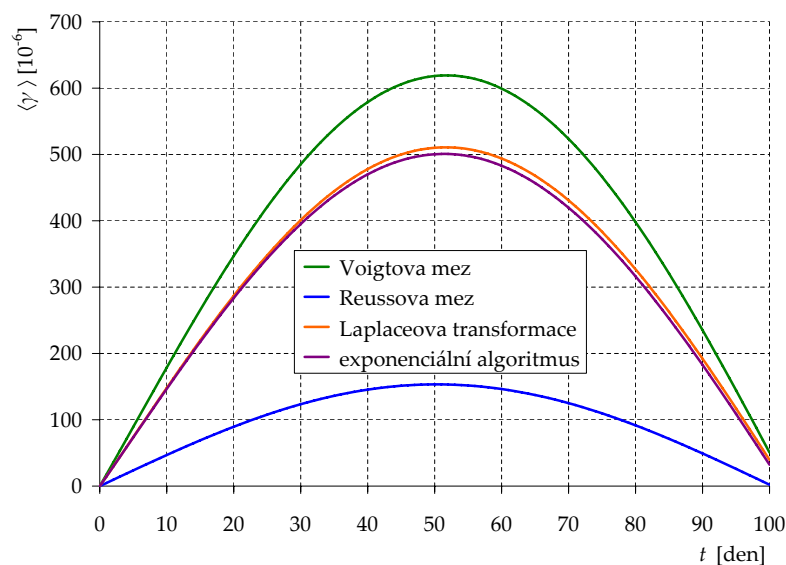
6.5 Porovnání výsledků

Tak jako v předcházející kapitole, je i pro částicový kompozit namáhaný čistým smykem, pro porovnání funkčních hodnot makroskopické smykové deformace $\langle \gamma \rangle(t)$ získaných pomocí obou přístupů, zvoleno devět časových okamžiků, tj. časů 0,1; 12,5; 25; ... ; 100. Vyhodnocení je provedeno opět pro kompozit s 20% podílem inkluze, tentokrát kulového tvaru. Stejně jako u vláknového kompozitu je za referenční řešení zvolen korespondenční princip, kde inverzní Laplaceova transformace je provedena s parametrem numerické tolerance dosažení pólu u funkce `invlap.m` nastaveným na $tol = 10^{-12}$. U exponenciálního algoritmu je výpočet proveden pro časové kroky $\Delta t = 0,01$, $\Delta t = 0,001$ a $\Delta t = 0,0001$, tj. 10 000, 100 000 a 1 000 000 dělení intervalu. Výsledky testu jsou shrnuty v tabulce 6.2.

		kor. prin. $tol = 10^{-12}$	exp. alg. (a) $\Delta t = 0,01$	exp. alg. (b) $\Delta t = 0,001$	(a) - (b)	exp. alg. (c) $\Delta t = 0,0001$	(b) - (c)
t [den]	$\langle \tau \rangle(t)$ [MPa]	$\langle \gamma \rangle(t)$ [10^{-6}]	$\langle \gamma \rangle(t)$ [10^{-6}]	$\langle \gamma \rangle(t)$ [10^{-6}]	rozdíl [10^{-9}]	$\langle \gamma \rangle(t)$ [10^{-6}]	rozdíl [10^{-9}]
0,1	0,02	1,426	1,424	1,424	0,68	1,423	0,19
12,5	1,91	184,289	182,448	182,357	91,75	182,331	25,69
25,0	3,54	347,901	343,261	343,085	176,24	343,036	49,35
37,5	4,62	462,679	455,209	454,971	237,72	454,904	66,56
50,0	5,00	510,076	500,349	500,083	265,85	500,009	74,44
62,5	4,62	482,350	471,370	471,114	255,88	471,042	71,64
75,0	3,54	383,376	372,394	372,185	209,01	372,126	58,52
87,5	1,91	227,951	218,264	218,131	132,13	218,094	36,99
100,0	0,00	39,507	32,254	32,217	36,73	32,207	10,28

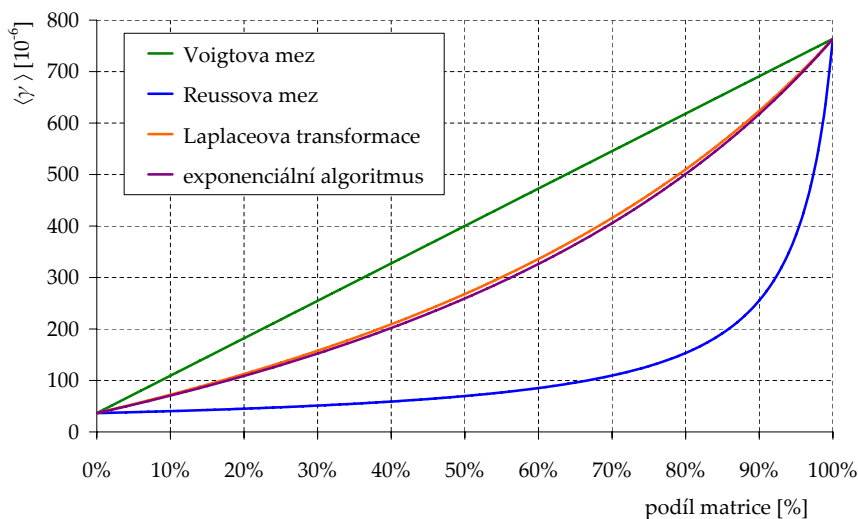
Tabulka 6.1: Výsledky srovnávacího testu pro částicový kompozit.

Z výsledků je zřejmé, že hodnoty celkové smykové deformace $\langle \gamma \rangle(t)$ získané jednotlivými principy se již na první pohled liší. Ze snižujícího se rozdílu mezi hodnotami smykové deformace, získané exponenciálním algoritmem vždy s rozdílem kroku o řád, je možno usuzovat, že exponenciální algoritmus konverguje. Konverguje však k hodnotám, které se od výsledků korespondenčního principu ještě více vzdalují. Zde je tak již vhodné provést grafické srovnání vývoje smykové deformace, získané jednotlivými principy, pro sledovaný časový interval. To je zobrazeno, současně s grafy vývoje smykové deformace pro funkci smykové poddajnosti odhadovanou podle Voigtovy a Reusovy meze, na obr. 6.1. Ač rozdíly nejsou fatální, relativní chyba exponenciálního algoritmu vůči inverzní Laplaceově transformaci se pohybuje v řádech procent a z inženýrského hlediska se tak jedná o akceptovatelnou přesnost, je tato odchylka v kontextu téměř absolutní shody u jednoduchého reologického modelu zarážející.



Obrázek 6.1: Odezva smykové deformace dle jednotlivých přístupů.

V grafu na obr. 6.2 je zobrazena deformace $\langle \gamma \rangle(t)$ pro čas $t = 50$ dní, tj. pro amplitudu zatížení, v závislosti na objemovém podílu matrice. A to opět pro odhady funkce efektivní smykové poddajnosti metodou Mori-Tanaka, pomocí obou srovnávaných algoritmů, a odhady dle Voigtovy a Reussovy meze. Z grafu, a samozřejmě i z vlastních číselných hodnot, je patrné, že pro mezní případy 100% podílu matrice a 100% podílu inkluze oba algoritmy dosahují přesných hodnot.



Obrázek 6.2: Synergický efekt částicového kompozitu.

K vyloučení pochybnosti o správnosti provedení inverzní Laplaceovy transformace pomocí funkce `invlap.m` je inverze provedena rovněž pomocí funkce `gavsteh.m` [31]. Ta vychází z tzv. Gaver-Stehfest algoritmu [32], který je založen na kombinaci Gaverových funkcionálů. Tento algoritmus je používán i v [28] pro problém podobný zde řešenému a funkce `gavsteh.m` a `invlap.m` jsou pro vybrané funkce testovány v [30].

Nastavení parametru funkce `gavsteh.m` a ověření její přesnosti je provedeno pro funkci $f(t) = 500 \sin \omega t$ v intervalu $(0, \pi)$, kde $\omega = \pi/100$, tj. funkci odpovídající tvaru zatížení reprezentující v této práci zatížení obecné. Její Laplaceův obraz je $\hat{f}(p) = 500 \omega / (p^2 + \omega^2)$. Porovnání výsledků inverze pomocí funkce `gavsteh.m`, při nastavení parametru $L = 22$, s analytickým řešením je uvedeno v tabulce 6.2. Z ní je zřejmá uspokojující přesnost funkce `gavsteh.m`, ačkoliv funkce `invlap.m` dosahuje v tomto případě prakticky absolutní shody.

algoritmus: anal. řeš. (a)		de Hoog et al. (b)		(a) - (b)		Gaver-Stehfest (c)		(a) - (c)	
funkce:		invlap.m				gavsteh.m			
t	$f(t)$	$f(t)$	rozdíl	$f(t)$	rozdíl				
[den]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]				
0,1	1,57	1,57	0,00	1,57	0,00				
12,5	191,34	191,34	0,00	191,36	-0,02				
25,0	353,55	353,55	0,00	353,56	-0,01				
37,5	461,94	461,94	0,00	461,96	-0,02				
50,0	500,00	500,00	0,00	500,01	-0,01				
62,5	461,94	461,94	0,00	461,98	-0,04				
75,0	353,55	353,55	0,00	353,57	-0,02				
87,5	191,34	191,34	0,00	190,94	0,40				
100,0	0,00	0,00	0,00	-0,23	0,23				

Tabulka 6.2: Přesnost funkcí `invlap.m` a `gavsteh.m` pro funkci se sinusovým průběhem.

Srovnání výsledků funkcí `invlap.m` a `gavsteh.m` při aplikaci na inverzi odezvy při použití korespondenčního principu je uvedeno v tabulce 6.3. I přes drobné nepřesnosti vykazují obě funkce, založené na různých principech, zřejmou shodu. Navíc při uvážení nepřesností funkce `gavsteh.m`, pro funkci se sinusovým průběhem, dle tabulky 6.2, lze vyslovit předpoklad, že funkce `invlap.m` vykazuje pro řešený problém opět vynikající přesnost. Pochybnost, zda rozdíl výsledků korespondenčního principu a exponenciálního algoritmu není způsoben selháním funkce `invlap.m` při podstatně složitější funkci poddajnosti než u vláknového kompozitu, lze tak prakticky vyloučit.

Za předpokladu, že Laplaceův obraz efektivní smykové funkce poddaj-

algoritmus:		de Hoog et al. (a)	Gaver-Stehfest (b)	(a) - (b)
funkce:		invlap.m	gavsteh.m	
t	$\langle \tau \rangle(t)$	$\langle \gamma \rangle(t)$	$\langle \gamma \rangle(t)$	rozdíl
[den]	[MPa]	[10^{-6}]	[10^{-6}]	[10^{-6}]
0,1	0,02	1,426	1,426	0,000
12,5	1,91	184,289	184,290	-0,001
25,0	3,54	347,901	347,898	0,003
37,5	4,62	462,679	462,759	-0,081
50,0	5,00	510,076	510,106	-0,030
62,5	4,62	482,350	482,448	-0,098
75,0	3,54	383,376	383,359	0,017
87,5	1,91	227,951	227,385	0,566
100,0	0,00	39,507	39,124	0,383

Tabulka 6.3: Srovnání provedení inverze funkcí invlap.m a gavsteh.m.

nosti $\widehat{J}_{\text{eff}}^{\text{d}}(p)$ je definován správně, je problém nutno hledat na straně exponenciálního algoritmu. Bylo vyzkoušeno několik úprav formulace koncentračních faktorů, především s uvažováním jejich možné časové závislosti, avšak žádná nevedla k uspokojivější shodě s korespondenčním principem. K určitým výsledkům vedlo pouze nastavení parametru β_{m} , tj. deviatorické části Eshelbyho tenzoru, na jednu ze svých mezních hodnot.

Pro $\beta_{\text{m}} = 0$ se z (6.3) dostává pro efektivní smykovou funkci poddajnosti $J_{\text{eff}}^{\text{d}}$ odhad dle Reussovy meze. Pro elastické koncentrační faktory A_{m}^{d} a A_{i}^{d} se z (6.19) a (6.20) dostává $A_{\text{m}}^{\text{d}} = A_{\text{i}}^{\text{d}} = 1$ a pro přírůstek koncentračního faktoru vlastního napětí matrice $\Delta a_{\text{m}}^{\text{d}}$ pak z (6.18) platí $\Delta a_{\text{m}}^{\text{d}(i)} = 0$. Za těchto podmínek se exponenciální algoritmus pro částicový kompozit de facto redukuje na postup shodný s algoritmem pro vláknový kompozit, popsáný v předcházející kapitole. Není tak překvapením, že oba algoritmy pak dávají shodné výsledky.

Situace je již však odlišná pro volbu $\beta_{\text{m}} = 1$. Pro efektivní smykovou funkci poddajnosti $J_{\text{eff}}^{\text{d}}$ se tentokrát dostává odhad dle Voigtovy meze, tj. jako

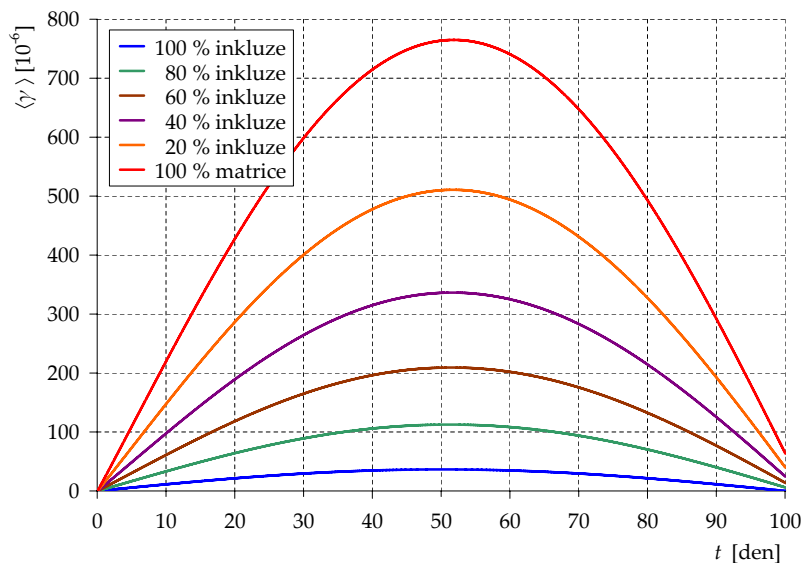
$$J_{\text{eff}}^{\text{d}} = f_{\text{i}} J_{\text{i}}^{\text{d}} + f_{\text{m}} J_{\text{m}}^{\text{d}}$$

V tomto případě lze, vzhledem k lineárnosti integrace, pro průměrnou smykovou deformaci $\langle \gamma \rangle(t)$ snadno získat řešení v uzavřeném tvaru jako

$$\langle \gamma \rangle(t) = \tilde{\tau} \left[\frac{f_{\text{i}}}{\mu_{\text{i},0}} \sin \omega t + \frac{f_{\text{m}}}{\mu_{\text{m},0}} \sin \omega t + \sum_{j=1}^M \frac{f_{\text{m}}}{\mu_j (1 + \tau_j^2 \omega^2)} \left(\sin \omega t - \tau_j \omega \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \right]$$

I pro takto definovaný problém dává exponenciální algoritmus přesné řešení, tj. se zanedbatelnou relativní chybou vůči analytickému řešení, prakticky identickou s chybou algoritmu pro model materiálového bodu. Zde však již $A_m^d = 1,233288$ a $A_1^d = 0,066848$ a přírůstky koncentračního faktoru vlastního napětí $\Delta a_m^{d(i)}$ jsou tak nenulové. Toto zjištění podporuje podezření, že nepřesnost je skryta právě ve formulaci deviatorické části Eshelbyho tenzoru β_m . Samozřejmě, s jistotou nelze vyloučit ani chybu v definici ostatních proměnných algoritmu, která se v tomto mezním případě nemusela projevit. Pak by se však nejednalo o nějaké osamocené opomenutí, ale spíše o mylné pojetí některé složky algoritmu.

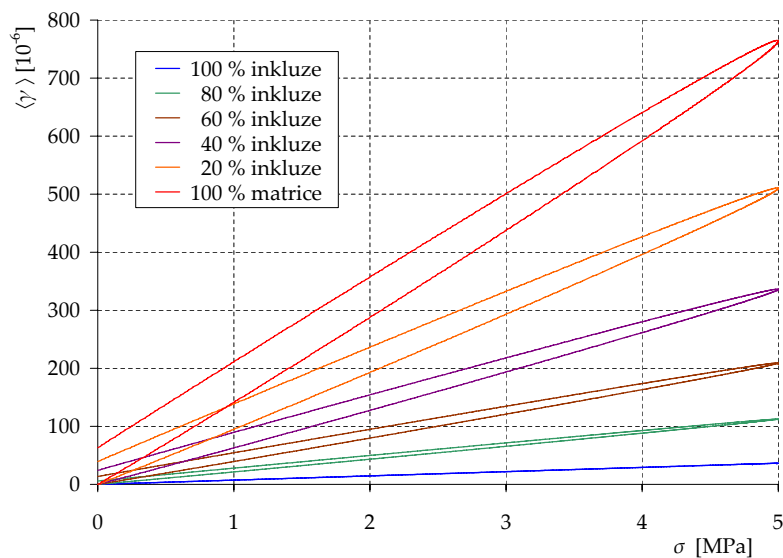
I v případě částicového kompozitu namáhaného čistým smykem je zajímavé znázornit hodnoty průměrné smykové deformace² pro měnící se objemový podíl tuhých kulových inkluzí v poměrně poddajné matici. To je opět pro pět variant různých objemových podílů inkluze a matrice zobrazeno na obr. 6.3.



Obrázek 6.3: Odezva smykové deformace na sinusové zatížení při měnícím se podílu inkluze-matrice.

²Průměrná smyková deformace v grafech na obr. 6.3 a 6.4 je vyčíslena korespondenčním principem, uvažovaným zde jako referenčním. Odchylky v případě použití exponenciálního algoritmu by však byly jen nepatrné.

Vliv dotvarování je opět zřejmý i z pracovního diagramu kompozitu, zobrazeném na obr. 6.4.



Obrázek 6.4: Pracovní diagram částečného kompozitu při měnícím se podílu inkluze-matrice.

Při porovnání grafů na obr. 6.3 a 6.4 s odpovídajícími grafy pro vláknový kompozit namáhaný tahem ve směru vláken je patrné, že menší podíl kulových inkluzí již nemá tak zásadní vliv na materiálové parametry kompozitu. To je samozřejmě v souladu s logickými předpoklady.

Kapitola 7

Závěr

Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly 4, cílem této práce je porovnání dvou rozdílných přístupů k výpočtu odezvy kompozitů s viskoelastickou maticí, tj. *korespondenčního principu* s použitím Laplaceovy transformace a *exponenciálního algoritmu*. Sledován je zde vývoj deformace pro předepsaný obecný průběh napětí, reprezentovaný zatížením sinusového tvaru, a za reologický model viskoelastické matrice je uvažován Kelvinův-Voigtův řetězec.

Srovnání je v této práci provedeno pro tři různé úrovně zobecnění modelu kompozitu. Nejprve se jedná o úroveň materiálového bodu, odpovídající viskoelastickému homogennímu materiálu. Poté je přistoupeno k jednoduchému modelu kompozitu, reprezentovanému zde vláknovým kompozitem namáhaným normálovým napětím ve směru vláken. Nakonec je uvažován složitější model kompozitu, který je pro zde řešenou problematiku možno považovat za obecný. Za ten byl zvolen statisticky izotropní částicový kompozit namáhaný čistým smykem, jehož efektivní materiálové vlastnosti byly odhadnuty metodou Mori-Tanaka. Podrobně jsou výsledky pro jednotlivé modely diskutovány vždy na konci kapitol 4, 5 a 6, které se k příslušným modelům vztahují.

Na úrovni *materiálového bodu*, řešeného v kapitole 4, je známo řešení v uzavřeném tvaru, odvozené v dodatku C. Tento model tak slouží především k ověření funkčnosti a přesnosti numerického exponenciálního algoritmu, jehož princip je popsán v dodatku F. Avšak vzhledem k tomu, že obrazová funkce poddajnosti pro dále řešený vláknový a částicový model kompozitu s viskoelastickou fází je již poměrně komplikovaná a pro inverzi Laplaceova obrazu deformace do časové oblasti je tak rovněž používáno numerické řešení, je u tohoto modelu ověřena přesnost i numerické inverzní Laplaceovy transformace. Pro tu je v této práci používána funkce `invlap.m`, která vychází z de Hoogova algoritmu, založeného na řešení rozkladem do Fourierovy řady a podrobněji popsaného v dodatku E.

Z porovnání s analytickým řešením je patrné, že oba postupy jsou pro

tento model velmi spolehlivé. Numerické řešení inverzní Laplaceovy transformace pomocí funkce `invlap.m` vykazuje prakticky absolutní přesnost. Exponenciální algoritmus, při zvyšujícím se počtu dělení intervalu, k přesnému řešení rovněž rychle konverguje. A ačkoliv výpočet provedený exponenciálním algoritmem je oproti inverzní Laplaceově transformaci funkcí `invlap.m` výrazně pomalejší, jeho výhodou je značná robustnost vůči zvolené zatěžovací funkci. To pro funkci `invlap.m` vždy neplatí a pro její použití na třeba jen mírně modifikovaný problém je třeba určité obezřetnosti.

Pro vláknový kompozit při jednoosé napjatosti, reprezentující zde *jednoduchý model kompozitu* řešený v kapitole 5, je za referenční řešení považováno použití korespondenčního principu. Hodnoty deformace získané upraveným exponenciálním algoritmem k výsledkům získaným numerickým řešením inverzní Laplaceovy transformace rychle konvergují, a dosahovaná relativní chyba exponenciálního algoritmu je srovnatelná s jeho relativní chybou vůči analytickému řešení u modelu materiálového bodu. Lze tak vyslovit předpoklad, že korespondenčním principem je získáno přesné řešení a exponenciální algoritmus k němu opět spolehlivě konverguje. Časové nároky na provedení algoritmů jsou obdobné jako u variant pro materiálový bod.

Po úspěšném otestování obou numerických metod pro nejjednodušší model kompozitu bylo přistoupeno k jejich aplikaci na *obecný model kompozitu*, za který lze pro účely srovnání různých přístupů k výpočtu viskoelastické odezvy kompozitů považovat částicový statisticky izotropní kompozit s kulovými inkluzemi namáhaný čistým smykem. Odhad efektivní funkce poddajnosti je proveden metodou Mori-Tanaka, tj. jednou z obecných metod homogenizace.

Z výsledků podrobně diskutovaných v kapitole 6 je zřejmé, že hodnoty celkové smykové deformace získané jednotlivými principy jsou mírně odlišné. Ačkoliv se relativní chyba exponenciálního algoritmu vůči inverzní Laplaceově transformaci pohybuje v řádech procent a z inženýrského hlediska se tak jedná o akceptovatelnou přesnost, v kontextu téměř absolutní shody u jednoduchého reologického modelu tak vzniká podezření na systémovou chybu u jednoho z aplikovaných přístupů.

K vyloučení možné chyby v provedení inverzní Laplaceovy transformace pomocí funkce `invlap.m` byla inverze Laplaceova obrazu celkové smykové deformace provedena rovněž pomocí funkce `gavsteh.m`, která vychází z tzv. Gaver-Stehfest algoritmu. I přes drobné nepřesnosti vykazují funkce `invlap.m` a `gavsteh.m`, založené na různých principech, zřejmou shodu. Pochybnost, zda rozdíl výsledků korespondenčního principu a exponenciálního algoritmu není způsoben selháním funkce `invlap.m` při podstatně složitější funkci poddajnosti než u vláknového kompozitu, lze tak prakticky vyloučit.

Za referenční řešení je i u tohoto modelu považováno použití korespondenčního principu. Výraz pro Laplaceův obraz efektivní smykové funkce poddajnosti je převzat z důvěryhodných článků publikovaných v impaktovaných časopisech. Za předpokladu, že Laplaceův obraz efektivní smykové funkce poddajnosti je definován zcela korektně, je problém nutno hledat na straně exponenciálního algoritmu.

U exponenciálního algoritmu proto bylo vyzkoušeno několik úprav formulace koncentračních faktorů, především s uvažováním jejich možné časové závislosti, avšak žádná nevedla k uspokojivější shodě s korespondenčním principem. K určitým výsledkům vedla pouze kontrola spočívající v nastavení deviatorické části Eshelbyho tenzoru na svoji mezní hodnotu jedna, při které dochází k ekvivalenci odhadu funkce efektivní smykové poddajnosti metodou Mori-Tanaka a odhadu dle Voigtovy meze. Za tohoto předpokladu dává exponenciální algoritmus spolehlivé výsledky, tj. rychle konverguje k analytickému řešení, které lze v tomto případě snadno získat. Za předpokladu chyby v exponenciálním algoritmu pak toto zjištění podporuje podezření, že nepřesnost je skryta právě ve formulaci deviatorické části Eshelbyho tenzoru. Samozřejmě, s jistotou nelze vyloučit ani chybu v definici ostatních proměnných algoritmu, která se v tomto mezním případě nemusela projevit. Pak by se však nejednalo o nějaké osamocené opomenutí, ale spíše o mylné pojetí některé složky algoritmu.

Závěrem lze, i přes prozatím nevyjasněný drobný nesoulad dosahovaných výsledků pro složitější model kompozitu, potvrdit použitelnost obou srovnávaných přístupů k vyčíslení odezvy kompozitů s viskoelastickou maticí. Dále lze konstatovat, že oba srovnávané přístupy mají své obecné signifikantní výhody. U korespondenčního principu s použitím Laplaceovy transformace se jedná především o rychlost výpočtu a při volbě vhodného algoritmu pro numerickou inverzi s ohledem na průběh zatěžovací funkce i vysokou přesnost dosahovaných výsledků. Exponenciální algoritmus ze své podstaty vykazuje značnou robustnost vůči zvolené zatěžovací funkci a spolehlivě konverguje k přesnému analytickému řešení. Oba principy tak mají, především při teoretických úvahách, v mikromechanice kompozitů své uplatnění a má význam se jimi dále zabývat.

Literatura

- [1] J. Abate and P.P. Valkó. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:979–993, 2004.
- [2] H.-J. Bartsch. *Matematické vzorce*. SNTL, Praha, 1983.
- [3] Y. Benveniste and G.J. Dvorak. On a Correspondence Between Mechanical and Thermal Effects in Two-Phase Composites. *Micromechanics and inhomogeneity: the Toshio Mura 65th anniversary volume*. Edited by G.J. Weng, M. Taya, H. Abé, Springer-Verlag, New York, pp. 65–82, 1990.
- [4] R.M. Christensen. Viscoelastic Properties of Heterogeneous Media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:23–41, 1969.
- [5] B. Davies and B. Martin. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. *Journal of Computational Physics*, 33(1):1–32, 1979.
- [6] D.G. Duffy. On the numerical inversion of Laplace transforms: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 19(3):333–359, 1993.
- [7] G.J. Dvorak. Thermal Expansion of Elastic-Plastic Composite Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 53:737–743, 1986.
- [8] J.D. Eshelby. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241:376–396, 1957.
- [9] D. Gross, T. Seelig. *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics*. Springer, Berlin Heidelberg, 2011.
- [10] Z. Hashin. Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media. *Journal of Applied Mechanics*, 32:630–636, 1965.

- [11] Z. Hashin. Analysis of Composite Materials – A Survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50:481–505, 1983.
- [12] F.H. Heukamp. *Chemomechanics of calcium leaching of cement-based materials at different scales: the role of CH-dissolution and C-S-H degradation on strength and durability performance of materials and structures*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [13] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:357–372, 1963.
- [14] R. Hill. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 12:199–212, 1964.
- [15] R. Hill. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: III. Self-consistent model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13:189–198, 1965.
- [16] K.J. Hollenbeck. *Invlap.m: A Matlab function for numerical inversion of Laplace transforms by the de Hoog algorithm*. 1998, <http://www.isva.dtu.dk/staff/karl/invlap.htm>.
- [17] F.R. de Hoog, J.H. Knight and A.N. Stokes. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 3(3):357–366, 1982.
- [18] M. Jirásek. Basic concepts and equations of solid mechanics. *Revue européenne de génie civil*, 11:879–892, 2007.
- [19] M. Jirásek, J. Zeman. *Přetvořování a porušování materiálů*. ČVUT, Praha, 2010.
- [20] N. Laws. On the thermostatics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21:9–17, 1973.
- [21] N. Laws and R. McLaughlin. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359:251–273, 1978.
- [22] M. Lévesque, K. Derrien, L. Mishnaevsky Jr., D. Baptiste and M.D. Gilchrist. A micromechanical model for nonlinear viscoelastic particle reinforced polymeric composite materials—undamaged state. *Composites: Part A: applied science and manufacturing*, 35:905–913, 2004.
- [23] J.Y. Li. On micromechanics approximation for the effective thermoelastic moduli of multi-phase composite materials. *Mechanics of Materials*, 31:149–159, 1999.

-
- [24] A. Matzenmiller, S. Gerlach. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 29:283–300, 2004.
- [25] T. Mori, K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21:571–574, 1973.
- [26] G.V. Narayanan, D.E. Beskos. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1829–1854, 1982.
- [27] M. Pavlíková, Z. Pavlík, J. Hošek. *Materiálové inženýrství I*. ČVUT, Praha, 2009.
- [28] Ch. Pichler, R. Lackner. Upscaling of viscoelastic properties of highly-filled composites: Investigation of matrix–inclusion-type morphologies with power-law viscoelastic material response, *Composites Science and Technology* 69:2410–2420, 2009.
- [29] P. Procházka. *Základy mechaniky složených materiálů*. ACADEMIA, Praha, 2001.
- [30] H. Sheng, Y. Li and Y.Q. Chen. Application of Numerical Inverse Laplace Transform Algorithms in Fractional Calculus. *Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications*, Article no. FDA10-108, 2010.
- [31] W. Srigutomo. *Gaver-stehfest algorithm for inverse Laplace transform*. 2006, <http://www.mathworks.com/matlabcentral>.
- [32] H. Stehfest. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transform. *Communication of the ACM*, 13(1):47–49, 1970.
- [33] M. Šejnoha, J. Zeman. *Micromechanical Analysis of Random Composites*. Volume 6 of CTU Reports, Czech Technical University in Prague, 2002.
- [34] J. Zeman. *Analysis of Composite Materials with Random Microstructure*. Ph.D. thesis, Czech Technical University in Prague, 2003.
- [35] O.C. Zienkiewicz, M. Watson and I.P. King. A numerical method of visco-elastic stress analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10):807-827, 1968.

Dodatek A

Základní vztahy lineární teorie pružnosti

A.1 Zobecněný Hookeův zákon

V obecně zatíženém trojrozměrném tělese je napjatost popsána pomocí šesti nezávislých složek napětí, tj. třemi složkami normálovými $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ a třemi smykovými $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$. Podobně přetvoření infinitezimálního (nekonečně malého) elementárního kvádrů tělesa je popsáno šesti složkami deformace, tj. třemi složkami normálovými $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ (relativní protažení) a třemi smykovými $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ (smyková zkosení). Indexy x, y, z označují jednotlivé osy libovolně zvoleného kartézského souřadného systému. Existují ještě smykové napětí a deformace v rovinách zy, xz, yx , které jsou však dle věty o vzájemnosti smykových napětí totožná se složkami v rovinách yz, zx, xy .

Tato definice a označení jednotlivých složek napětí a deformace je velmi názorná a lze si je na elementárním kvádrů snadno představit. Vystává však otázka, v jaké formě matematického zápisu obecné napětí a deformaci vyjádřit. Tyto fyzikální veličiny mají charakter tenzorů, a proto jako optimálním pro formulaci jejich vzájemného vztahu je *tenzorový zápis*. Jím vyjádřené vztahy jsou velmi elegantní a zvláště vhodné pro teoretické úvahy.

V tenzorovém zápisu lze obecné napětí a deformaci zapsat jako tenzory 2. řádu, tj. $\sigma \equiv \sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ je tenzor napětí a $\varepsilon \equiv \varepsilon_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ je tenzor deformací. Složky těchto tenzorů lze uspořádat do matice $[3 \times 3]$. Konstitutivní vztah nazývaný *zobecněný Hookeův zákon* se pak vyjádří tenzorovou rovnicí

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

popř. v inverzním tvaru jako

$$\varepsilon = \mathbf{J} : \sigma \quad (\text{A.2})$$

kde $\underline{\mathbf{C}} \equiv C_{ijkl}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, resp. $\underline{\mathbf{J}} \equiv J_{ijkl}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$ jsou tenzory materiálové tuhosti, resp. poddajnosti.

Někdy je však výhodnější, zvláště pro numerické výpočty, vyjádřit složky napětí a deformace jako sloupcové matice $\underline{\sigma}$ a $\underline{\varepsilon}$. To lze provést použitím tzv. *Voigtovy (inženýrské) notace*. Inženýrské složky tenzoru napětí a deformace, pak mají k tenzorovým složkám následující vztah

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Zde je zvláště vhodné si povšimnout, že inženýrské smykové složky jsou dvojnásobkem tenzorových smykových deformací.

Složky tenzorů materiálové tuhosti $\underline{\mathbf{C}}$, resp. poddajnosti $\underline{\mathbf{J}}$, tj. symetrických tenzorů 4. řádu, je pomocí Voigtovy notace možno uspořádat do symetrické matice $[6 \times 6]$ jako

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \begin{pmatrix} J_{1111} & J_{1122} & J_{1133} & 2J_{1123} & 2J_{1113} & 2J_{1112} \\ J_{2211} & J_{2222} & J_{2233} & 2J_{2223} & 2J_{2213} & 2J_{2212} \\ J_{3311} & J_{3322} & J_{3333} & 2J_{3323} & 2J_{3313} & 2J_{3312} \\ 2J_{2311} & 2J_{2322} & 2J_{2333} & 4J_{2323} & 4J_{2313} & 4J_{2312} \\ 2J_{1311} & 2J_{1322} & 2J_{1333} & 4J_{1323} & 4J_{1313} & 4J_{1312} \\ 2J_{1211} & 2J_{1222} & 2J_{1233} & 4J_{1223} & 4J_{1213} & 4J_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Zobecněný Hookeův zákon a jeho inverzní forma se pak vyjádří maticovými zápisy

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\varepsilon} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \underline{\sigma} \quad (\text{A.6})$$

Z matice materiálové poddajnosti $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ je zřejmá i určitá nevýhoda Voigtovy notace, kdy její prvky přímo neodpovídají prvkům původního tenzoru materiálové poddajnosti J_{ijkl} , ale jsou jejich různými násobky.

A.2 Rozklad na objemovou a deviatorickou část

Pokud jsou materiálové parametry nezávislé na volbě souřadného systému, tj. jedná se o izotropní materiál, lze tenzory napětí σ a deformace ε vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \dot{\varepsilon} \mathbf{1} + e & \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{3} \varepsilon : \mathbf{1} = \frac{1}{3} \mathbf{1} : \varepsilon \\ \sigma &= \dot{\sigma} \mathbf{1} + s & \dot{\sigma} &= \frac{1}{3} \sigma : \mathbf{1} = \frac{1}{3} \mathbf{1} : \sigma\end{aligned}$$

kde $\dot{\sigma}$ a $\dot{\varepsilon}$ je střední napětí a deformace objemové části, s a e je deviatorická část tenzorů napětí a deformace a $\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor 2. řádu.

Konstitutivní vztah (A.1) se pak redukuje na formu

$$\sigma = 3k\dot{\varepsilon}\mathbf{1} + 2\mu e \quad (\text{A.7})$$

a inverzní tvar (A.2) na

$$\varepsilon = \frac{1}{3} J^v \dot{\sigma} \mathbf{1} + \frac{1}{2} J^d s \quad (\text{A.8})$$

kde k a μ jsou objemový a smykový modul pružnosti a J^v a J^d jsou objemová a smyková poddajnost, pro které platí $J^v = 1/k$ a $J^d = 1/\mu$.

Vztahy (A.7) a (A.8) je tak možno jednoduše rozdělit na samostatnou objemovou a deviatorickou část

$$\dot{\sigma} = 3k\dot{\varepsilon} \quad s = 2\mu e \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{3} J^v \dot{\sigma} \quad e = \frac{1}{2} J^d s \quad (\text{A.10})$$

Ve Voigtově notaci lze rozklad napětí a deformace na objemovou a deviatorickou část zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

tj. v kompaktním maticovém tvaru jako

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma} \underline{i} + \underline{s} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon} \underline{i} + \underline{e} \quad \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

kde \underline{i} je pomocná sloupcová matice s jednotkovými hodnotami normálových složek a nulovými hodnotami složek smykových.

Pro izotropní materiál se v maticovém zápisu zobecněný Hookeův zákon a jeho inverzní tvar (A.6) redukuje na

$$\underline{\sigma} = 3k \underline{\varepsilon} \underline{i} + 2\mu \underline{P}^{-1} \underline{e} \quad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{3} J^v \underline{\sigma} \underline{i} + \frac{1}{2} J^d \underline{P} \underline{s} \quad (\text{A.13})$$

kde \underline{P} je tzv. *škálovací matice* a \underline{P}^{-1} matice k ní inverzní, které jsou definovány jako

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Rozklad na samostatnou objemovou a deviatorickou část se již jednoduše zapíše jako

$$\underline{\sigma} = 3k \underline{\varepsilon} \quad \underline{s} = 2\mu \underline{P}^{-1} \underline{e} \quad (\text{A.15})$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{3} J^v \underline{\sigma} \quad \underline{e} = \frac{1}{2} J^d \underline{P} \underline{s} \quad (\text{A.16})$$

Podrobnější informace o základních vztazích lineární teorie pružnosti v maticovém zápisu lze nalézt např. v [19] a jejich tenzorový zápis je národně ukázán v [18]. Vztahy uváděné v tomto dodatku jsou do značné míry z těchto publikací převzaty a jsou omezeny pouze na problémy řešené v této práci.

Dodatek B

Laplaceova transformace

B.1 Definice Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace ¹ patří do skupiny tzv. integrálních transformací. V lineární algebře odpovídá integrální transformaci skalární součin přes systém vektorů, který je označován jako jádro transformace. Pro Laplaceovu transformaci je jádro transformace tvořeno výrazem e^{-pt} .

Pak se přiřazení definované integrálem

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (\text{B.1})$$

nazývá *přímá (dopředná) Laplaceova transformace*. Je to zobrazení, které obecně komplexní (ve většině aplikací však reálné) funkci f reálné proměnné t (času) přiřazuje komplexní funkci \hat{f} komplexní proměnné $p = x + iy$.

Funkce \hat{f} se nazývá obraz funkce f v Laplaceově prostoru (Laplaceův obraz funkce f) a funkce f se nazývá vzor (originál, předmět) Laplaceova obrazu. Integrál $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ se nazývá Laplaceův integrál funkce f .

Transformace je definována pro funkci f , která musí splňovat následující podmínky:

- $f(t)$ je po částech spojitá pro $t \geq 0$
- $f(t) = 0$ pro $t < 0$
- $f(t)$ je exponenciálního řádu, tj. existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ (index růstu) pro které platí $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) e^{-ct}| = 0$

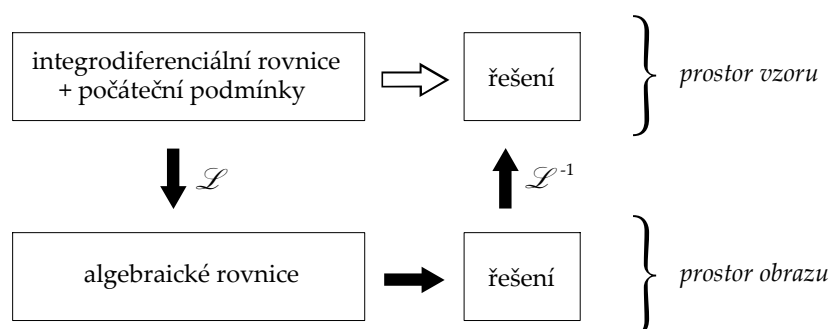
¹Podrobněji, a s důrazem na rigorózní matematický zápis, je Laplaceova transformace popsána např. v [2], odkud jsou i zde uváděné definice do značné míry převzaty.

Definiční vztah

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(p) e^{pt} dp = \mathcal{L}^{-1} \{ \hat{f}(p) \} \quad (\text{B.2})$$

se nazývá *inverzní (zpětná) Laplaceova transformace*.

Použití Laplaceovy transformace je výhodné především při řešení diferenciálních, resp. integrodiferenciálních rovnic. Ty jsou, s přihlédnutím k počátečním podmínkám, pomocí Laplaceovy transformace převedeny na rovnice algebraické. Takto získané algebraické rovnice se v Laplaceově prostoru snadno vyřeší a výsledkem je racionální lomená funkce. Jejím rozkladem na parciální zlomky a použitím slovníku Laplaceovy transformace se výsledek převede zpátky do časové oblasti. Získá se tak řešení původní diferenciální rovnice, a to nalezením homogenního a partikulárního řešení v jednom kroku. Pro složitější vztahy je možno inverzní Laplaceovu transformaci provést numericky.



Obrázek B.1: Schematický početní postup při použití Laplaceovy transformace.

B.2 Vlastnosti Laplaceovy transformace

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace jsou vyjádřeny následujícími větami o Laplaceově transformaci.

- **Věta o lineárnosti Laplaceovy transformace**

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a \hat{f}(p) + b \hat{g}(p) \quad (\text{B.3})$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ a f a g jsou laplaceovsky transformovatelné funkce.

• **Věta o translaci předmětu (posun v čase)**

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = e^{-pt_0} \widehat{f}(p) \quad (\text{B.4})$$

kde f_1 je laplaceovsky transformovatelná funkce, definovaná jako

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ f(t - t_0) & \text{pro } t \in \langle t_0, +\infty \rangle \end{cases}$$

• **Věta o posunu obrazu (věta o tlumení)**

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \widehat{f}(p + a) \quad (\text{B.5})$$

kde $a \in \mathbb{C}$ a f je laplaceovsky transformovatelná funkce.

• **Věta o obrazu derivace předmětu**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = p \widehat{f}(p) - f(0_+) \quad (\text{B.6})$$

kde f je laplaceovsky transformovatelná funkce a $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$ je počáteční podmínka zprava.

• **Věta o obrazu integrace předmětu**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\xi) d\xi\right\} = \frac{1}{p} \widehat{f}(p) \quad (\text{B.7})$$

kde f je laplaceovsky transformovatelná funkce.

• **Věta o obrazu konvoluce**

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \widehat{f}(p) \widehat{g}(p) \quad (\text{B.8})$$

kde f a g jsou laplaceovsky transformovatelné funkce a $f * g$ je konvoluce funkcí f a g definovaná jako

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \xi) g(\xi) d\xi = \int_0^t f(\xi) g(t - \xi) d\xi$$

B.3 Odvození obrazů některých základních funkcí

Pro ilustraci je v tomto oddíle ukázán výpočet s použitím definičního integrálu pro odvození Laplaceových obrazů některých základních funkcí, které jsou používány při výpočtech prováděných v této práci.

- **Jednotková skoková funkce (Heavisideova funkce)**

Heavisideova funkce je zjednodušeně definována předpisem

$$\mathcal{H}(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < t_0 \\ 1 & \text{pro } t \geq t_0 \end{cases}$$

a v technické praxi vyjadřuje tzv. jednotkový skok, tj. častý případ náhlého působení určité veličiny konstantní hodnoty od časového okamžiku t_0 . Pro vyjádření skutečné velikosti působící veličiny je pak Heavisideova funkce vynásobena určitou konstantou $a \in \mathbb{C}$. Pak se jedná o tzv. vážený jednotkový skok, jehož Laplaceův obraz je zde odvozen.

$$\hat{f}(p) = \mathcal{L}\{a \mathcal{H}(t)\} = \int_0^{+\infty} a e^{-pt} dt = a \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = a \frac{1}{p} \quad (\text{B.9})$$

- **Lineární (rampová) funkce**

Opět se jedná o velmi častý případ z technické praxe, kdy určitá veličina od okamžiku t_0 rovnoměrně narůstá. Rovněž tak jako u předchozí funkce je možno lineární funkci vážit konstantou $a \in \mathbb{C}$. Pro níže uvedený příklad je uvažován začátek působení veličiny v okamžiku $t_0 = 0$. Obecný matematicky rigorózní zápis této funkce by pak byl $f(t) = (t - t_0) \mathcal{H}(t - t_0)$. Při odvození Laplaceova obrazu je použita integrace metodou per partes a l'Hospitalovo pravidlo pro zjištění, že $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= \mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \left[t \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{e^{-pt}}{-p} + \frac{1}{p} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

- **Exponenciální funkce**

Je uvažována exponenciální funkce obecně matematicky rigorózně zapsaná jako $f(t) = e^{a(t-t_0)} \mathcal{H}(t - t_0)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a dále je již opět pro zjedno-

dušení uvažováno, že $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(p) &= \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{t(a-p)} dt \\ &= \left[\frac{e^{t(a-p)}}{a-p} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{t(a-p)} - 1}{a-p} = \frac{1}{p-a}\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Odvozený vztah je platný za předpokladu, že $\Re(p) \geq \Re(a) = c_0$ (tj. úsečka konvergence). Jen za této podmínky platí, že $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-p)} = 0$ a Laplaceův integrál konverguje.

• Funkce sinus a cosinus

Pro odvození Laplaceových obrazů funkcí $f(t) = \sin \omega(t - t_0) \mathcal{H}(t - t_0)$ a $g(t) = \cos \omega(t - t_0) \mathcal{H}(t - t_0)$ je nejprve vhodné připomenout exponenciální funkce imaginárního argumentu (Eulerovy vzorce).

$$\begin{aligned}e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t\end{aligned}$$

Z nich je možno vyjádřit funkce $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\end{aligned}$$

Stejně jako v předcházejících příkladech je uvažováno $t_0 = 0$ a úhlová frekvence ω je samozřejmě kladné reálné číslo. S použitím věty o linearitě, uvážením $-i^2 = 1$ a výše odvozeného obrazu pro funkci e^{at} vychází

$$\begin{aligned}\widehat{f}(p) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{p + i\omega}{p^2 - i^2\omega^2} - \frac{p - i\omega}{p^2 - i^2\omega^2} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned}\widehat{g}(p) &= \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p + i\omega}{p^2 - i^2\omega^2} + \frac{p - i\omega}{p^2 - i^2\omega^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

B.4 Slovník Laplaceových integrálů

V tabulce B.1 jsou uvedeny korespondence Laplaceových integrálů některých funkcí, s kterými se lze v inženýrských problémech běžně setkat.²

Za zmínku zde stojí Diracova funkce delta $\delta(t)$ neboli jednotkový impuls. Zjednodušeně je tato funkce definována jako

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \neq 0 \\ \infty & \text{pro } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

V přesném matematickém významu není Diracovo delta funkce, ale distribuce. Jeho diskrétním ekvivalentem je Kroneckerovo delta.

Vzor $f(t)$	Obraz $\widehat{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$
$t e^{\pm at}$	$\frac{1}{(p \mp a)^2}$
$-ae^{-at}$	$\frac{p}{p+a}$
$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cos \varphi + \frac{p}{p^2 + \omega^2} \sin \varphi$

Tabulka B.1: Slovník korespondencí některých Laplaceových integrálů.

²Rozsáhlejší slovník lze nalézt např. opět v [2].

Dodatek C

Analytické řešení pro zatížení

$$\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$$

C.1 Použití konvolučního integrálu

Pro závislost časového průběhu deformace $\varepsilon(t)$ na obecném průběhu zatěžovacího napětí $\sigma(t)$ (nemění-li se napětí skokem) platí následující konvoluční integrál

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J_0(t - \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (\text{C.1})$$

kde pro Kelvinův-Voigtův model je funkce poddajnosti $J_0(t)$ definována jako

$$J_0(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow J_0(t - \xi) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}})$$

a pro sinusový průběh zatížení $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$, kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ znamená amplitudu napětí a $\omega = \text{konst.}$ úhlovou frekvenci, je jeho derivace podle času

$$\dot{\sigma}(t) = \omega \tilde{\sigma} \cos \omega t \Rightarrow \dot{\sigma}(\xi) = \omega \tilde{\sigma} \cos \omega \xi$$

Z dosazení $J_0(t - \xi)$ a $\dot{\sigma}(\xi)$ do (C.1) vyplývá

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_0^t \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}) \omega \tilde{\sigma} \cos \omega \xi d\xi \\ &= \tilde{\sigma} \frac{\omega}{E} \left(\int_0^t \cos \omega \xi d\xi - \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \cos \omega \xi d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Řešením prvního integrálu v závorce je vztah $\frac{1}{\omega} \sin \omega t$. Druhý integrál

je nutno řešit integrací metodou per partes následovně:

$$\int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \cos \omega \zeta d\zeta = \left[e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \zeta \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \zeta d\zeta \quad (\text{C.3})$$

Pro řešení integrálu vzniklého na pravé straně rovnice (C.3) se použije opět metoda per partes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau\omega} \int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \sin \omega \zeta d\zeta &= \frac{1}{\tau\omega} \left[-e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \frac{1}{\omega} \cos \omega \zeta \right]_0^t \\ &+ \frac{1}{\tau\omega} \frac{1}{\tau\omega} \int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \cos \omega \zeta d\zeta \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

Dosazením integračních mezí do členů v závorkách v rovnicích (C.3) a (C.4) se získají vztahy

$$\begin{aligned} \left[e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \zeta \right]_0^t &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ \left[-e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \frac{1}{\omega} \cos \omega \zeta \right]_0^t &= -\frac{1}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

a po jejich dosazení do rovnic (C.3) a (C.4), následném dosazení řešení integrálu (C.4) do rovnice (C.3) a převedením řešeného integrálu na levou stranu rovnice se dostává

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right) \int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \cos \omega \zeta d\zeta &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{\tau\omega} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ \frac{1 + \tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \cos \omega \zeta d\zeta &= \frac{1}{\omega} \left(\sin \omega t + \frac{1}{\tau\omega} \cos \omega t - \frac{1}{\tau\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ \int_0^t e^{-\frac{t-\zeta}{\tau}} \cos \omega \zeta d\zeta &= \frac{\tau^2\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \left(\sin \omega t + \frac{1}{\tau\omega} \cos \omega t - \frac{1}{\tau\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

Dosazením tohoto řešení do vztahu (C.2) se pro časový průběh defor-

mace $\varepsilon(t)$ získává finální vztah

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= \tilde{\sigma} \frac{\omega}{E} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - \left(\frac{\tau^2 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\sin \omega t + \frac{1}{\tau \omega} \cos \omega t - \frac{1}{\tau \omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \right) \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E} \left(\sin \omega t - \frac{\tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega t - \frac{\tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E} \left(\frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \omega t - \frac{\tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E(1 + \tau^2 \omega^2)} \left(\sin \omega t - \tau \omega \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Nyní je možno přistoupit k zobecnění analytického řešení pro Kelvinův-Voigtův model na Kelvinův-Voigtův řetězec s lineárním členem (pružinou) a M viskoelastickými články. Funkce poddajnosti $J_0(t)$ pro tento řetězec je definována jako

$$J_0(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right)$$

Při uvážení konvolučního integrálu (C.1), vzhledem k lineárnosti integrace, lze vztah pro časový průběh deformace $\varepsilon(t)$, jako odezvy na zatížení $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$, pro Kelvinův-Voigtův řetězec zapsat jako

$$\varepsilon(t) = \tilde{\sigma} \left[\frac{1}{E_0} \sin \omega t + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j (1 + \tau_j^2 \omega^2)} \left(\sin \omega t - \tau_j \omega \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \right] \quad (C.7)$$

C.2 Použití Laplaceovy transformace

Podle věty o obrazu konvoluce předmětů a věty o obrazu derivace předmětu platí pro závislost obrazu deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ na obrazu obecného průběhu zatěžovacího napětí $\hat{\sigma}(p)$ v Laplaceově prostoru (při nulových počátečních podmínkách) vztah

$$\hat{\varepsilon}(p) = \hat{J}_0(p) \hat{\sigma}(p) = p \hat{J}_0(p) \hat{\sigma}(p) \quad (\text{C.8})$$

kde pro Kelvinův-Voigtův model je Laplaceův obraz funkce poddajnosti $\hat{J}_0(p)$ definován jako

$$\hat{J}_0(p) = \frac{1}{E\tau} \frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau})}$$

a Laplaceův obraz zatěžovací funkce $\hat{\sigma}(p)$, jehož předmět je v časové oblasti $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \sin \omega t$, je

$$\hat{\sigma}(p) = \tilde{\sigma} \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \tilde{\sigma} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dosazením za $\hat{J}_0(p)$ a $\hat{\sigma}(p)$ do výrazu (C.8) se dostává

$$\hat{\varepsilon}(p) = p \frac{1}{E\tau} \frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau})} \tilde{\sigma} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \tilde{\sigma} \frac{\omega}{E\tau} \frac{1}{(p + \frac{1}{\tau})(p^2 + \omega^2)} \quad (\text{C.9})$$

Pro analytické řešení inverze Laplaceova obrazu $\hat{\varepsilon}(p)$ do časové oblasti je třeba provést rozklad racionální lomené funkce s proměnnou p , ze vztahu (C.9), na součet parciálních zlomků, tj.

$$\frac{1}{(p + \frac{1}{\tau})(p^2 + \omega^2)} = \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{Bp + C}{p^2 + \omega^2} \quad (\text{C.10})$$

$$\Rightarrow A(p^2 + \omega^2) + (Bp + C) \left(p + \frac{1}{\tau}\right) = 1 \quad (\text{C.11})$$

Hledané konstanty A, B, C se získají např. následujícím způsobem:

- z rovnice (C.10) je zřejmý kořen $p = -\frac{1}{\tau}$. Z jeho dosazení do (C.11) se získává

$$A = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2}$$

- pro 0. řád proměnné p v rovnici (C.11), tj. z rovnice $A\omega^2 + C\frac{1}{\tau} = 1$ se získává

$$C = \left(1 - \frac{\tau^2\omega^2}{1 + \tau^2\omega^2}\right) \tau = \frac{\tau}{1 + \tau^2\omega^2}$$

- pro 2. řád proměnné p v rovnici (C.11), tj. z rovnice $A p^2 + B p^2 = 0$ se získává

$$B = -A = -\frac{\tau^2}{1 + \tau^2\omega^2}$$

Dosazením konstant A, B, C do rovnice (C.10) a nahrazením racionální lomené funkce v rovnici (C.9) součtem parciálních zlomků (C.10) se pro Laplaceův obraz deformace $\hat{\varepsilon}(p)$ dostává

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(p) &= \tilde{\sigma} \frac{\omega}{E \tau} \frac{\tau}{1 + \tau^2\omega^2} \left(\frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{-\tau p + 1}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E (1 + \tau^2\omega^2)} \left(\tau\omega \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} - \tau\omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \quad (\text{C.12})\end{aligned}$$

Zlomky v závorce se již invertují do časové oblasti dle slovníku korespondencí základních Laplaceových integrálů (např. uvedeném v dodatku B) a dostává se tak časový průběh deformace $\varepsilon(t)$ jako

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E (1 + \tau^2\omega^2)} \left(\tau\omega e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau\omega \cos \omega t + \sin \omega t \right) \\ &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E (1 + \tau^2\omega^2)} \left(\sin \omega t - \tau\omega \left(\cos \omega t - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \quad (\text{C.13})\end{aligned}$$

Jak je zřejmé z výše uvedeného postupu, použitím Laplaceovy transformace je možno podstatně jednodušším (a snad i elegantnějším) způsobem dojít ke stejnému výsledku jako integrací uvedenou v předchozím oddílu.

Dodatek D

Analytické řešení pro lichoběžníkové zatížení

D.1 Použití konvolučního integrálu

Pro závislost časového průběhu deformace $\varepsilon(t)$ na obecném průběhu zatěžovacího napětí $\sigma(t)$ (nemění-li se napětí skokem) platí, jak je již uvedeno v dodatku C, konvoluční integrál

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J_0(t - \xi) \dot{\sigma}(\xi) d\xi \quad (\text{D.1})$$

kde pro Kelvinův-Voigtův model je funkce poddajnosti $J_0(t)$ definována jako

$$J_0(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow J_0(t - \xi) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right)$$

Průběh zatížení $\sigma(t)$ má nyní lichoběžníkový tvar a zatěžovací funkce je tak definována jako

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-\infty, t_0) \\ \tilde{\sigma} \frac{t-t_0}{t_1-t_0} & \text{pro } t \in \langle t_0, t_1 \rangle \\ \tilde{\sigma} & \text{pro } t \in \langle t_1, t_2 \rangle \\ \tilde{\sigma} \frac{t_3-t}{t_3-t_2} & \text{pro } t \in \langle t_2, t_3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \in \langle t_3, +\infty \rangle \end{cases}$$

kde $\tilde{\sigma} = \text{konst.}$ je maximální zatěžovací napětí, udržované v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Derivací této funkce podle času t a zavedením integrační proměnné ξ se

dostává

$$\dot{\sigma}(t) \equiv \dot{\sigma}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in (-\infty, t_0) \\ \tilde{\sigma} \frac{1}{t_1 - t_0} & \text{pro } t \in \langle t_0, t_1 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \in \langle t_1, t_2 \rangle \\ \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{t_3 - t_2} \right) & \text{pro } t \in \langle t_2, t_3 \rangle \\ 0 & \text{pro } t \in \langle t_3, +\infty \rangle \end{cases}$$

Dále je pro zjednodušení uvažováno $t_0 = 0$ a řešení integrálu (D.1) je nejprve provedeno pro jednotlivé časové intervaly. Je zřejmé, že pro intervaly $(-\infty, 0)$, $\langle t_1, t_2 \rangle$ a $\langle t_3, +\infty \rangle$ je výsledkem integrálu (D.1) nula. V principu je tudíž nutno integrál vyřešit jen pro intervaly $\langle 0, t_1 \rangle$ a $\langle t_2, t_3 \rangle$. Při interpretaci výsledků řešení těchto integrálů, je však třeba určitá obezřetnost. Je zřejmé, že v časových intervalech $\langle t_1, t_2 \rangle$ a $\langle t_3, +\infty \rangle$ nebude deformace $\varepsilon(t)$ nulová, ale bude rovněž závislá na vzestupné a pro interval $\langle t_3, +\infty \rangle$ i sestupné větvi zatěžování. Se závislostí na vzestupné větvi zatěžování je samozřejmě nutno uvažovat i v intervalu $\langle t_2, t_3 \rangle$.

Z dosazení $J_0(t - \xi)$ a $\dot{\sigma}(\xi)$ pro interval $\langle 0, t_1 \rangle$ do (D.1) vyplývá

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_0^t \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right) \tilde{\sigma} \frac{1}{t_1} d\xi = \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right) d\xi \\ &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left([\xi]_0^t - \left[\tau e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right]_0^t \right) = \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

Odezva deformace odvozená tímto integrálem je tedy platná jen pro čas $t \in \langle 0, t_1 \rangle$. Pro čas $t \geq t_1$ je pak integrál (D.1) možno rozdělit na součet integrálů pro časové intervaly $\langle 0, t_1 \rangle$ a $\langle t_1, t \rangle$. Jak je již výše zmíněno, je druhý integrál nulový a pro průběh deformace $\varepsilon(t)$, jako odezvy na vzestupnou větev zatížení, se pro čas $t \geq t_1$ dostává

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_0^{t_1} \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right) \tilde{\sigma} \frac{1}{t_1} d\xi = \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right) d\xi \\ &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left([\xi]_0^{t_1} - \left[\tau e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \right]_0^{t_1} \right) = \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left(t_1 - \tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

Analogicky k (D.2) se pro odezvu na odtěžování pro čas $t \in \langle t_2, t_3 \rangle$ do-

stává

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= \int_{t_2}^t \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right) \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{t_3 - t_2}\right) d\xi \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{t_3 - t_2}\right) \int_{t_2}^t \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right) d\xi \\
 &= \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)}\right) \left(\left[\xi\right]_{t_2}^t - \left[\tau e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right]_{t_2}^t\right) \\
 &= \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)}\right) \left(t - t_2 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}\right) \quad (D.4)
 \end{aligned}$$

a v čase $t \geq t_3$ se vliv odtížení projeví jako

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right) \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{t_3 - t_2}\right) d\xi \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{t_3 - t_2}\right) \int_{t_2}^{t_3} \left(1 - e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right) d\xi \\
 &= \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)}\right) \left(\left[\xi\right]_{t_2}^{t_3} - \left[\tau e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\right]_{t_2}^{t_3}\right) \\
 &= \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)}\right) \left(t_3 - t_2 - \tau e^{-\frac{t-t_3}{\tau}} + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}\right) \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

Pro definici funkce odezvy $\varepsilon(t)$ v kompaktním tvaru pro jakýkoliv čas t v celém sledovaném intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ je dále nutno zavést Heavisideovy funkce pro časové okamžiky t_1, t_2 a t_3 . Pomocí nich budou korigovány odezvy pro zatěžování a odtěžování, tj. $\varepsilon(t)$ v intervalech $\langle 0, t_1 \rangle$ a $\langle t_2, t_3 \rangle$, i pro časy, kdy je již změna napětí nulová. Pro určení „korekční“ funkce pro čas $t \geq t_1$ je třeba zjistit rozdíl (D.2) a (D.3), který se určí jako

$$\begin{aligned}
 &\tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\
 &- \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left(t_1 - \tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\
 &= \tilde{\sigma} \frac{1}{E t_1} \left(t - t_1 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}\right) \quad (D.6)
 \end{aligned}$$

a pro čas $t \geq t_3$ se rozdíl (D.4) a (D.5) získá jako

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)} \right) \left(t - t_2 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) \\
 & - \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)} \right) \left(t_3 - t_2 - \tau e^{-\frac{t-t_3}{\tau}} + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) \\
 & = \tilde{\sigma} \left(-\frac{1}{E(t_3 - t_2)} \right) \left(t - t_3 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_3}{\tau}} \right) \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

Výsledný průběh deformace $\varepsilon(t)$ pro čas $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, jako odezvy na lichoběžníkové zatížení, pro Kelvinův-Voigtův model je pak možno zapsat jako

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) = \tilde{\sigma} \left[\right. & \frac{1}{E t_1} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\
 & - \frac{1}{E t_1} \left(t - t_1 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_1) \\
 & - \frac{1}{E(t_3 - t_2)} \left(t - t_2 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_2) \\
 & \left. + \frac{1}{E(t_3 - t_2)} \left(t - t_3 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_3}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_3) \right] \quad (D.8)
 \end{aligned}$$

Nyní je možno přistoupit k zobecnění řešení pro Kelvinův-Voigtův model na Kelvinův-Voigtův řetězec s lineárním členem a M viskoelastickými články. Funkce poddajnosti $J_0(t)$ pro tento řetězec je definována jako

$$J_0(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right)$$

Při uvážení konvolučního integrálu (D.1), vzhledem k lineárnosti integrace, lze vztah pro časový průběh deformace $\varepsilon(t)$, jako odezvy na lichoběžníkové zatížení, pro Kelvinův-Voigtův řetězec zapsat jako

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) = \tilde{\sigma} \left[\right. & \frac{t}{E_0 t_1} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j t_1} \left(t - \tau_j + \tau_j e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \\
 & - \left(\frac{t - t_1}{E_0 t_1} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j t_1} \left(t - t_1 - \tau_j + \tau_j e^{-\frac{t-t_1}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t_1) \\
 & - \left(\frac{t - t_2}{E_0(t_3 - t_2)} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j(t_3 - t_2)} \left(t - t_2 - \tau_j + \tau_j e^{-\frac{t-t_2}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t_2) \\
 & \left. + \left(\frac{t - t_3}{E_0(t_3 - t_2)} + \sum_{j=1}^M \frac{1}{E_j(t_3 - t_2)} \left(t - t_3 - \tau_j + \tau_j e^{-\frac{t-t_3}{\tau_j}} \right) \right) \mathcal{H}(t_3) \right] \quad (D.9)
 \end{aligned}$$

D.2 Použití Laplaceovy transformace

Podle věty o obrazu konvoluce předmětů a věty o obrazu derivace předmětu platí pro závislost obrazu deformace $\widehat{\varepsilon}(p)$ na obrazu obecného průběhu zatěžovacího napětí $\widehat{\sigma}(p)$ v Laplaceově prostoru (při nulových počátečních podmínkách) vztah

$$\widehat{\varepsilon}(p) = \widehat{J}_0(p) \widehat{\sigma}(p) = p \widehat{J}_0(p) \widehat{\sigma}(p) \quad (\text{D.10})$$

kde pro Kelvinův-Voigtův model je Laplaceův obraz funkce poddajnosti $\widehat{J}_0(p)$ definován jako

$$\widehat{J}_0(p) = \frac{1}{E \tau} \frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau})}$$

Zatěžovací lichoběžníkovou funkci lze, s pomocí Heavisideovy funkce, zapsat v kompaktním tvaru jako

$$\sigma(t) = \tilde{\sigma} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{t-t_1}{t_1} \mathcal{H}(t_1) - \frac{t-t_2}{t_3-t_2} \mathcal{H}(t_2) + \frac{t-t_3}{t_3-t_2} \mathcal{H}(t_3) \right) \quad (\text{D.11})$$

Její Laplaceův obraz $\widehat{\sigma}(p)$ lze, s pomocí věty o translaci předmětu dle dodatku B, zapsat jako

$$\widehat{\sigma}(p) = \tilde{\sigma} \left(\frac{1}{t_1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{t_1} \frac{1}{p^2} e^{-t_1 p} - \frac{1}{t_3-t_2} \frac{1}{p^2} e^{-t_2 p} + \frac{1}{t_3-t_2} \frac{1}{p^2} e^{-t_3 p} \right) \quad (\text{D.12})$$

Dosazením za $\widehat{J}_0(p)$ a $\widehat{\sigma}(p)$ do vztahu (D.10) se dostává výraz pro obraz deformace ve tvaru

$$\widehat{\varepsilon}(p) = \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \frac{1}{E \tau} \frac{1}{p^2 (p + \frac{1}{\tau})} e^{-\beta_i p} \quad (\text{D.13})$$

kde α_i a β_i jsou konstanty jednotlivých členů sumy, definované jako

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{t_1} & \alpha_2 &= -\frac{1}{t_1} & \alpha_3 &= -\frac{1}{t_3-t_2} & \alpha_4 &= \frac{1}{t_3-t_2} \\ \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= t_1 & \beta_3 &= t_2 & \beta_4 &= t_3 \end{aligned}$$

Vzhledem k lineárnosti Laplaceovy transformace stačí do časové oblasti invertovat jen jeden člen sumy (D.13). Pro jeho inverzi je nejprve třeba provést rozklad racionální lomené funkce s proměnnou p na součet parciálních zlomků, tj.

$$\frac{1}{p^2 (p + \frac{1}{\tau})} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p + \frac{1}{\tau}} \quad (\text{D.14})$$

$$\Rightarrow A p \left(p + \frac{1}{\tau} \right) + B \left(p + \frac{1}{\tau} \right) + C p^2 = 1 \quad (\text{D.15})$$

Hledané konstanty A, B, C se získají např. následujícím způsobem:

- pro 0. řád proměnné p v rovnici (D.15), tj. z rovnice $B \frac{1}{\tau} = 1$ se získává

$$B = \tau$$

- pro 1. řád proměnné p v rovnici (D.15), tj. z rovnice $A \frac{1}{\tau} + B = 0$ se získává

$$A = -B \tau = -\tau^2$$

- pro 2. řád proměnné p v rovnici (D.15), tj. z rovnice $A + C = 0$ se získává

$$C = -A = \tau^2$$

Dosazením konstant A, B, C do rovnice (D.14) a nahrazením racionální lomené funkce v rovnici (D.13) součtem parciálních zlomků (D.14) se pro Laplaceův obraz deformace $\widehat{\varepsilon}(p)$ dostává

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}(p) &= \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \frac{1}{E \tau} \left(-\frac{\tau^2}{p} + \frac{\tau}{p^2} + \frac{\tau^2}{p + \frac{1}{\tau}} \right) e^{-\beta_i p} \\ &= \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \frac{1}{E} \left(-\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right) e^{-\beta_i p} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Zlomky v závorce se pak již invertují do časové oblasti dle slovníku korespondencí základních Laplaceových integrálů (např. uvedeném v dodatku B) a s použitím věty o translaci předmětu se získává časový průběh deformace $\varepsilon(t)$ jako

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \frac{1}{E} \left(-\tau + (t - \beta_i) + \tau e^{-\frac{t-\beta_i}{\tau}} \right) \mathcal{H}(\beta_i) \\ &= \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 \alpha_i \frac{1}{E} \left(t - \beta_i - \tau + \tau e^{-\frac{t-\beta_i}{\tau}} \right) \mathcal{H}(\beta_i) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Po dosazení za konstanty α_i a β_i se dostává pro odezvu $\varepsilon(t)$ na lichoběžníkové zatížení pro Kelvinův-Voigtův model výraz

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \tilde{\sigma} \left[\frac{1}{E t_1} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{E t_1} \left(t - t_1 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_1) \\ &\quad - \frac{1}{E (t_3 - t_2)} \left(t - t_2 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_2) \\ &\quad \left. + \frac{1}{E (t_3 - t_2)} \left(t - t_3 - \tau + \tau e^{-\frac{t-t_3}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Použitím Laplaceovy transformace se tak jednodušším a elegantnějším způsobem dochází ke stejnému výsledku jako integrací uvedenou v předchozím oddílu.

Dodatek E

Numerické řešení inverzní Laplaceovy transformace

E.1 Inverzní Laplaceova transformace

Jak je již uvedeno v dodatku B je Laplaceova transformace definována jako

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (\text{E.1})$$

a inverzní Laplaceova transformace jako

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(p) e^{pt} dp = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(p)\} \quad (\text{E.2})$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka a c je reálná konstanta, pro kterou platí $c > c_0$. Reálná konstanta c_0 se nazývá úsečka konvergence Laplaceova integrálu a definuje oblast komplexní roviny proměnné p , pro kterou je funkce $\hat{f}(p)$ transformovatelná. Na úsečce $\Re(p) = c_0$ má funkce $\hat{f}(p)$ nějakou formu singularity. Pak platí, že pro všechna čísla p z poloroviny $\Re(p) > c_0$ (polorovina konvergence), resp. z poloroviny $\Re(p) < c_0$ Laplaceův integrál konverguje, resp. diverguje. Jestliže existuje $c_0 < +\infty$, pak se funkce f nazývá laplaceovsky transformovatelná.

Pro inverzi složitějších Laplaceových obrazů do časové oblasti může být analytické řešení značně komplikované. Vhodnější je pak použít vhodné numerické postupy. To s sebou však přináší i určité problémy.

Pro numerické řešení inverzní Laplaceovy transformace bylo vyvinuto značné množství rozličných metod. Jak ukázalo několik srovnávacích testů [5, 26, 6, 1, 30] je prakticky nemožné říci, který algoritmus je obecně nejlepší.

Vždy záleží na konkrétní funkci a řadě dalších okolností (např. i intervalu časové oblasti ve kterém je invertovaný výsledek srovnáván s přesným analytickým řešením).

Nejvíce algoritmů je založených na řešení rozkladem do Fourierovy řady. Tato řešení obsahují aproximaci inverzního integrálu nekonečnou Fourierovo řadou. Jednou z často používaných metod, patřící do této skupiny, je de Hoog et al's algoritmus [17], podle kterého Karl Hollenbeck vytvořil funkci `invlap.m` [16] použitelnou v systému MATLAB.¹ Tato metoda je založena na urychlení konvergence Fourierovy řady, získané z inverzního integrálu použitím lichoběžníkového pravidla.

E.2 Fourierova řada, integrál a transformace

Pro lepší porozumění dále uváděnému principu řešení numerické inverzní Laplaceovy transformace metodou rozkladu do Fourierovy řady je vhodné definovat základní vztahy a pojmy k Fourierovým řadám.² Vztahy uváděné v popisu numerické inverze a postupy jejich úprav jsou již pak principiálně shodné, ač jsou prováděny s poněkud složitějšími výrazy.

Periodickou funkci $f(t) = f(t + kT)$ s periodou $T = \text{konst.}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$, která je po částech spojitá na intervalu $\langle 0, T \rangle$ je možno rozložit do řady

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (\text{E.3})$$

která se nazývá *Fourierovou řadou* (*Fourierovým rozvojem*) funkce f , a kde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

jsou tzv. Fourierovy koeficienty (Fourierovy konstanty) rozvoje funkce f , kde $\omega = 2\pi/T$.

¹Tato funkce je, bez jakýchkoliv úprav, použitelná i v systému GNU Octave, který je používán v této práci. Jedná se o free software dostupný např. ze své domovské stránky <http://www.octave.org/>, jehož kódy jsou do značné míry kompatibilní s kódy MATLABu.

²Podrobněji je tato problematika popsána např. v [2].

Fourierova řada tedy slouží k vyjádření rozvoje periodické funkce prostřednictvím goniometrických funkcí sinus a kosinus.

Ze vztahů pro Fourierovu řadu lze odvodit, že funkci $f(t)$, která je i se svou derivací $f'(t)$ po částech spojitá a absolutně integrovatelná na intervalu $(-\infty, +\infty)$, lze jednoznačně vyjádřit vztahem nazývaným *Fourierův integrál* jako

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \cos((t-\zeta)\zeta) d\zeta \right] d\zeta \quad (\text{E.4})$$

nebo vyjádřený v komplexním tvaru jako

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{i(t-\zeta)\zeta} d\zeta \right] d\zeta \quad (\text{E.5})$$

Fourierův integrál má pro funkce, které nejsou periodické a jsou integrovatelné, podobnou roli jako Fourierova řada pro periodické funkce a má úzký vztah k inverzní Fourierově transformaci.

Fourierova transformace je zobrazení definované integrálním vztahem

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (\text{E.6})$$

který k funkci $f(t)$ nazývané vzor (předmět, originál), přiřazuje její Fourierův obraz $\widehat{f}(\omega)$. Přičemž $\omega \in \mathbf{R}$ a $f(t)$ je v intervalu $(-\infty, +\infty)$ absolutně integrovatelná a po částech hladká funkce.

Inverzní vzorec pro Fourierovu transformaci je dán vztahem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} \quad (\text{E.7})$$

S pomocí Eulerova vzorce $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$, za předpokladu, že pro $t < 0$ je $f(t) = 0$ lze Fourierův obraz (E.6) rozložit na svoji reálnou a imaginární část jako $\widehat{f}(\omega) = \Re\{\widehat{f}(\omega)\} + i \Im\{\widehat{f}(\omega)\} = \widehat{f}_{\text{Re}}(\omega) + i \widehat{f}_{\text{Im}}(\omega)$, kde

$$\widehat{f}_{\text{Re}}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (\text{E.8})$$

$$\widehat{f}_{\text{Im}}(\omega) = - \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (\text{E.9})$$

a přiřazení (E.8) a (E.9) se pak nazývají Fourierova kosinová a Fourierova sinová transformace.

E.3 Metoda rozkladu do Fourierovy řady

Zde uváděný princip řešení numerické inverzní Laplaceovy transformace metodou rozkladu do Fourierovy řady vychází z [17], kde lze samozřejmě nalézt i podrobný popis samotného de Hoogova algoritmu.

Nejprve je vhodné připomenout, že Laplaceův obraz $\widehat{f}(p)$ je komplexní funkce komplexní proměnné p , kterou je pro inverzi možno vyjádřit jako $p = c + i\omega$. Rovněž komplexní funkci $\widehat{f}(p)$ lze rozložit na svoji reálnou a imaginární část jako

$$\begin{aligned}\widehat{f}(p) &= \widehat{f}_{\text{Re}}(p) + i\widehat{f}_{\text{Im}}(p) = \Re\{\widehat{f}(p)\} + i\Im\{\widehat{f}(p)\} \\ \widehat{f}(c + i\omega) &= \widehat{f}_{\text{Re}}(c + i\omega) + i\widehat{f}_{\text{Im}}(c + i\omega) = \Re\{\widehat{f}(c + i\omega)\} + i\Im\{\widehat{f}(c + i\omega)\}\end{aligned}$$

Vztah (E.1) lze pak zapsat jako

$$\widehat{f}(c + i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(c+i\omega)t} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ct} e^{-i\omega t} dt \quad (\text{E.10})$$

Předmět $f(t)$ je ve většině aplikací reálná funkce. Za tohoto předpokladu lze reálnou a imaginární část obrazu $\widehat{f}(p)$, s využitím Eulerova vzorce $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$, jednoduše vyjádřit jako

$$\widehat{f}_{\text{Re}}(p) = \Re\{\widehat{f}(c + i\omega)\} = \int_0^{+\infty} e^{-ct} f(t) \cos \omega t dt \quad (\text{E.11})$$

$$\widehat{f}_{\text{Im}}(p) = \Im\{\widehat{f}(c + i\omega)\} = - \int_0^{+\infty} e^{-ct} f(t) \sin \omega t dt \quad (\text{E.12})$$

Použití inverzních teorémů pro Fourierovu kosinovou a sinovou transformaci dává, jako alternativu k (E.2), následující dva vztahy

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{ct} \int_0^{+\infty} \Re\{\widehat{f}(c + i\omega)\} \cos \omega t dt \quad (\text{E.13})$$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} e^{ct} \int_0^{+\infty} \Im\{\widehat{f}(c + i\omega)\} \sin \omega t dt \quad (\text{E.14})$$

Součtem rovnic (E.13) a (E.14) a využitím lineárnosti integrace se získává

$$f(t) = \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_0^{+\infty} (\Re\{\widehat{f}(c + i\omega)\} \cos \omega t - \Im\{\widehat{f}(c + i\omega)\} \sin \omega t) dt \quad (\text{E.15})$$

Integrand je pak možno pomocí Eulerova vzorce $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ a vztahu pro imaginární jednotku $-i^2 = 1$ upravit jako

$$\begin{aligned} \Re \{ \widehat{f}(p) \} \cos \omega t - \Im \{ \widehat{f}(p) \} \sin \omega t &= \widehat{f}_{\text{Re}}(p) \cos \omega t - \widehat{f}_{\text{Im}}(p) \sin \omega t \\ &= \Re \{ \widehat{f}_{\text{Re}}(p) \cos \omega t - \widehat{f}_{\text{Im}}(p) \sin \omega t + i (\widehat{f}_{\text{Re}}(p) \sin \omega t + \widehat{f}_{\text{Im}}(p) \cos \omega t) \} \\ &= \Re \{ \widehat{f}_{\text{Re}}(p) \cos \omega t + \widehat{f}_{\text{Re}}(p) i \sin \omega t + i \widehat{f}_{\text{Im}}(p) \cos \omega t + i^2 \widehat{f}_{\text{Im}}(p) \sin \omega t \} \\ &= \Re \{ (\widehat{f}_{\text{Re}}(p) + i \widehat{f}_{\text{Im}}(p)) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \} = \Re \{ \widehat{f}(p) e^{i\omega t} \} \end{aligned}$$

Integrand v rovnici (E.15) lze pak nahradit výrazem $\Re \{ \widehat{f}(p) e^{i\omega t} \} = \Re \{ \widehat{f}(c + i\omega) e^{i\omega t} \}$ a dostává se tak, vedle integrálů (E.13) a (E.14), třetí ekvivalentní formulace k (E.2) jako

$$f(t) = \frac{1}{\pi} e^{ct} \int_0^{+\infty} \Re \{ \widehat{f}(c + i\omega) e^{i\omega t} \} dt \quad (\text{E.16})$$

Pokud se nyní provede diskretizace vztahů (E.13), (E.14) a (E.16), použitím lichoběžníkového pravidla s krokem o velikosti π/T , získávají se následující aproximace, které jsou základem metody rozkladu do Fourierovy řady.

$$f_1(t) = \frac{2}{T} e^{ct} \left[\frac{\widehat{f}(c)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \Re \left\{ \widehat{f} \left(c + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \cos \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (\text{E.17})$$

$$f_2(t) = -\frac{2}{T} e^{ct} \sum_{k=1}^{+\infty} \Im \left\{ \widehat{f} \left(c + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \sin \frac{k\pi t}{T} \quad (\text{E.18})$$

$$f_3(t) = \frac{1}{T} e^{ct} \left[\frac{\widehat{f}(c)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \Re \left\{ \widehat{f} \left(c + \frac{ik\pi}{T} \right) e^{\frac{ik\pi t}{T}} \right\} \right] \quad (\text{E.19})$$

Ač výrazy (E.13), (E.14) a (E.16) jsou matematicky ekvivalentní, jejich diskrétní formy (E.17), (E.18) a (E.19) již nikoliv. Je možno odvodit, že pro $t \in \langle 0, 2T \rangle$ platí

$$f_1(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2ckT} [f(2kT + t) + e^{2ct} f(2kT - t)] \quad (\text{E.20})$$

$$f_2(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2ckT} [f(2kT + t) - e^{2ct} f(2kT - t)] \quad (\text{E.21})$$

$$f_3(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2ckT} f(2kT + t) \quad (\text{E.22})$$

Je zřejmé, že součtem rovnic (E.20) a (E.21) se získává dvojnásobek (E.22) a výraz pro $f_3(t)$ je tak průměrem funkcí $f_1(t)$ a $f_2(t)$. Výraz pro $f_3(t)$ pak může být v praxi nejpoužitelnější aproximací, neboť v diskretizační chybě neobsahuje exponenciálně narůstající člen e^{2ct} .

E.4 Postup použití funkce `invlap.m`

Nejprve je třeba definovat funkci v Laplaceově prostoru $\hat{f}(p)$ ³, která má být invertována do časové oblasti na reálnou funkci $f(t)$ reálné proměnné t (času). Argumentem funkce $\hat{f}(p)$ je vektor hodnot p , následovaný jakýmkoliv dalšími požadovanými parametry (proměnnými) této funkce. Takto definovaná funkce pak musí vracet vektor hodnot s řešením pro každou hodnotu p . V zápisu funkce musí být použity prvkové operace, tj. příslušné operátory musí předcházet tečka, zajišťující, že aritmetické operace jsou prováděny na každém prvku vektoru.

Dalším krokem je získání řešení v časové oblasti. To se již získá voláním funkce `invlap.m`. Argumentem této funkce je

- název funkce $\hat{f}(p)$
- sloupcový vektor časů t , pro které má být funkce $f(t)$ vyhodnocena
- parametr α , znamenající největší hodnotu pólu, neboli výše zmíněné úsečky konvergence (implicitně nastaven na nulu)
- parametr tol , znamenající numerickou toleranci dosažení pólu (implicitně nastaven na 10^{-9})
- parametry (proměnné) vyskytující se v definici funkce $\hat{f}(p)$

Funkce `invlap.m` vrací sloupcový vektor hodnot řešení reálné funkce $f(t)$.

Výše uvedený postup přehledně ilustruje následující skript, provádějící inverzi Laplaceova obrazu $\hat{f}(p) = A \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, tj. předmětu $f(t) = A \sin \omega t$.

```

1  % definice funkce v Laplaceove prostoru:
2  function [F]=F_p(p,A,omega)
3  F=A*omega./(p.^2+omega^2); end
4  % vstupni parametry funkce:
5  A=25; omega=2;
6  % parametry pro hodnoty polu a tolerance:
7  pol=0; tol=1e-12;
8  % vektor casu pro vyhodnoceni f(t):
9  t=linspace(0.001,pi,10)';
10 % inverze Laplaceova obrazu:
11 f_t=invlap('F_p',t,pol,tol,A,omega)
    
```

³Ve vlastní funkci `invlap.m` je pro komplexní proměnnou Laplaceova obrazu používáno označení s , které je často používáno i v řadě jiných materiálů. Značení této proměnné, stejně jako i dalších parametrů funkce `invlap.m` je libovolné, záleží tak vždy na pořadí příslušné proměnné v argumentu funkcí.

Dodatek F

Exponenciální algoritmus

F.1 Numerické metody pro zjištění odezvy

Pro složitou funkci poddajnosti nebo složitý průběh zatěžování není obvykle možné zjistit vývoj deformace analyticky, řešením konvolučního integrálu v uzavřeném tvaru, a je nutno použít vhodnou numerickou metodu.

Jednou z možností je použít některou z metod numerické integrace. Ty jsou sice velmi jednoduché, ale na druhé straně mají podstatné nevýhody. Pro obvyklý případ, kdy je třeba popsat vývoj deformace v určitém časovém intervalu, nikoliv jen pro jeden časový okamžik, roste počet operací s druhou mocninou časových kroků a vzhledem k nutnosti ukládání napětí pro všechny časové okamžiky se zvyšují i nároky na paměť počítače. Pro rozsáhlejší úlohy tento postup tudíž není efektivní.

Nevýhody numerické integrace lze eliminovat přechodem k diferenciální formulaci problému a numerickým řešením diferenciální rovnice popisující příslušný reologický model. Při použití klasických metod založených na aproximaci derivace diferenční náhradou, tj. Eulerovy dopředné nebo zpětné metody, chyba vzniklá diferenční náhradou s délkou kroku narůstá a pro dopřednou Eulerovu metodu může dojít i ke ztrátě numerické stability. Proto byl vyvinut [35] alternativní numerický postup, který vychází ze skutečnosti, že pro konstantní pravou stranu, tj. $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{konst.}$, je řešení diferenciální rovnice v uzavřeném tvaru známé. Jedná se o tzv. *exponenciální algoritmus*.

F.2 Princip exponenciálního algoritmu pro Kelvinův-Voigtův řetězec

Je uvažován Kelvinův-Voigtův řetězec bez stárnutí, složený z jedné pružiny o tuhosti E_0 a M Kelvinových-Voigtových článků s tuhostmi E_j a viskozitami η_j , kde $j = 1, 2, \dots, M$.

Celková deformace modelu je rovna součtu deformací jednotlivých článků, tj.

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_M(t) \quad (\text{F.1})$$

Chování j -tého článku je možno popsat, na ostatních člancích nezávislou, diferenciální rovnicí 1. řádu

$$E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \sigma(t) \quad (\text{F.2})$$

Nahrazením časově proměnného napětí $\sigma(t)$ na určitém časovém intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ aproximovaným konstantním napětím, určeným např. jako průměr hodnot na začátku a konci tohoto intervalu $\sigma^{(i-1/2)} = [\sigma(t_{i-1}) + \sigma(t_i)]/2$, se ze známého analytického řešení diferenciální rovnice (F.2) již dostává deformace na konci kroku tj. v čase t_i . Jako počáteční podmínku je samozřejmě nutno uvažovat, že deformace na začátku kroku je rovna již známé deformaci článku z předcházejícího kroku, tj. $\varepsilon(t_{i-1}) = \varepsilon^{(i-1)}$.

Toto je princip nejjednodušší aplikace exponenciálního algoritmu, který tak pro konstantní napětí dává zcela přesné řešení pro libovolnou délku kroku. Vylepšená verze tohoto algoritmu, která bude dále podrobněji popsána, dává zcela přesné řešení pro napětí měnící se v čase lineárně (není ho však možno použít pro konstantní napětí). Podrobněji je exponenciální algoritmus, ve své základní i modifikované variantě, popsán v [19].

Pro odvození zobecněného exponenciálního algoritmu je základem opět diferenciální rovnice (F.2), avšak derivací podle času upravená do následujícího tvaru diferenciální rovnice 2. řádu

$$E_j \dot{\varepsilon}_j(t) + \eta_j \ddot{\varepsilon}_j(t) = \dot{\sigma}(t) \quad (\text{F.3})$$

Dále je uvažován časový interval $[t_0, t_{\max}]$ s časovými okamžiky t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ve kterých se bude vyčíslovat deformace $\varepsilon(t)$ jako odezva na předepsaný průběh napětí $\sigma(t)$. Časové kroky mezi jednotlivými okamžiky jsou $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Derivaci napětí $\dot{\sigma}(t)$ lze v rámci tohoto intervalu aproximovat diferenční náhradou jako

$$\dot{\sigma}(t) \approx \frac{\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta \sigma^{(i)}}{\Delta t_i} \quad (\text{F.4})$$

Tato diferenční náhrada je v rámci jednoho kroku konstantní a, s definicí retardačního času j -tého článku jako $\tau_j = \eta_j / E_j$, lze rovnici (F.3) zapsat ve tvaru s konstantní pravou stranou jako

$$\dot{\varepsilon}_j(t) + \tau_j \ddot{\varepsilon}_j(t) = \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i E_j} \quad (\text{F.5})$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$\varepsilon_j(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{t-t_{i-1}}{\tau_j}} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\Delta t_i E_j} (t - t_{i-1}) \quad (\text{F.6})$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 se určí z počátečních podmínek vyplývajících z deformace $\varepsilon_j^{(i-1)}$ a její rychlosti $\dot{\varepsilon}_j^{(i-1)}$ na počátku aktuálního intervalu, které jsou již známy z předchozího intervalu. K formálnímu zjednodušení zápisu je vhodné zavést pomocné konstanty

$$\vartheta_j^{(i)} = e^{-\frac{\Delta t_i}{\tau_j}} \quad \text{a} \quad \psi_j^{(i)} = \frac{\tau_j}{\Delta t_i} (1 - \vartheta_j^{(i)}) \quad (\text{F.7})$$

Vzorce popisující deformaci a její rychlost na konci aktuálního kroku, tj. pro $t = t_i$, je pak možno zapsat jako

$$\dot{\varepsilon}_j^{(i)} = \vartheta_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \vartheta_j^{(i)}}{\Delta t_i E_j} \Delta\sigma^{(i)} \quad (\text{F.8})$$

$$\varepsilon_j^{(i)} = \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{E_j} \Delta\sigma^{(i)} \quad (\text{F.9})$$

Tyto vztahy platí i pro pružný článek, který lze uvažovat jako limitní případ Kelvinova-Voigtova článku s nulovou viskozitou $\eta_0 = 0$ a tedy i nulovým retardačním časem $\tau_0 = 0$. V limitě pro $\tau_0 \rightarrow 0_+$ se dle (F.7) dostává $\vartheta_j^{(i)} = 0$ a $\psi_j^{(i)} = 0$.

Celková deformace modelu, pro aktuální krok, je dle (F.1) součtem deformací všech článků, tj. dosazením vztahu (F.9) se dostává

$$\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i)} = \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^{(i-1)} + \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{E_j} \right) \Delta\sigma^{(i)} \quad (\text{F.10})$$

a tento vztah lze zapsat i v kompaktním tvaru jako

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta \ddot{\varepsilon}^{(i)} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\ddot{E}^{(i)}} \quad (\text{F.11})$$

kde $\Delta \xi^{(i)}$ představuje přírůstek deformace za konstantního napětí, tj. vliv „čistého“ dotvarování, a výraz

$$\check{E}^{(i)} = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^M \frac{1 - \psi_j^{(i)}}{E_j} \right)^{-1}$$

představuje algoritmičtý modul celého řetězce v i -tém kroku.

Vztah (F.11) lze snadno invertovat na problém, kdy se vyčísluje vývoj napětí způsobený předepsaným průběhem deformace. Přírůstek deformace v i -tém kroku je možno zapsat jako $\Delta \varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(i-1)}$ a pak pro přírůstek napětí lze zapsat

$$\Delta \sigma^{(i)} = \check{E}^{(i)} \left(\Delta \varepsilon^{(i)} - \Delta \xi^{(i)} \right) \quad (\text{F.12})$$

případně lze tento vztah vyjádřit jako

$$\Delta \sigma^{(i)} = \check{E}^{(i)} \Delta \varepsilon^{(i)} + \Delta \sigma^{(i)} \quad (\text{F.13})$$

kde $\Delta \sigma^{(i)} = -\check{E}^{(i)} \Delta \xi^{(i)}$ představuje úbytek napětí za konstantní deformace, tj. vliv „čisté“ relaxace.

F.3 Exponenciální algoritmus pro vláknový kompozit při jednoosé napjatosti

Pro úpravu exponenciálního algoritmu na aplikaci pro kompozitní materiál s viskoelastickou maticí a elastickou inkluzí je nejprve uvažován jednoduchý reologický model kompozitu. Jako vhodný model k tomuto účelu je zde zvolen vláknový kompozit namáhaný tahem ve směru vláken.

Za předpokladu dokonalé soudržnosti obou fází je zřejmé, že přírůstky deformace matrice a vláken musí být za časový okamžik Δt_i odpovídající délce kroku i shodné

$$\Delta \varepsilon_m^{(i)} = \Delta \varepsilon_i^{(i)} = \Delta \varepsilon^{(i)} \quad (\text{F.14})$$

Celkový přírůstek napětí lze pak rozdělit jako

$$\Delta \sigma^{(i)} = f_m \Delta \sigma_m^{(i)} + f_i \Delta \sigma_i^{(i)} \quad (\text{F.15})$$

kde f_m a f_i jsou objemové podíly matrice a inkluze (vláken), pro které platí $f_m + f_i = 1$.

Pro vyjádření napětí přenášeného viskoelastickou maticí lze použít vztah (F.12) a pro napětí v elastických vláknech Hookeův zákon, tj.

$$\Delta \sigma_m^{(i)} = \check{E}_m^{(i)} \left(\Delta \varepsilon_m^{(i)} - \Delta \xi_m^{(i)} \right) = \check{E}_m^{(i)} \left(\Delta \varepsilon^{(i)} - \Delta \xi_m^{(i)} \right) \quad (\text{F.16})$$

$$\Delta \sigma_i^{(i)} = E_{i,0} \Delta \varepsilon_i^{(i)} = E_{i,0} \Delta \varepsilon^{(i)} \quad (\text{F.17})$$

dosazením těchto přírůstků napětí na fázích do (F.15) se dostává

$$\Delta\sigma^{(i)} = \underbrace{\left(f_m \check{E}_m^{(i)} + f_i E_{i,0}\right)}_{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\varepsilon^{(i)} - \underbrace{f_m \check{E}_m^{(i)} \Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)}}_{\Delta\check{\sigma}^{(i)}} \quad (\text{F.18})$$

kde $\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}$ je algoritmická efektivní tuhost a $\Delta\check{\sigma}^{(i)}$ je relaxace vlivem dotvarování matrice v i -tém kroku.

Z tohoto vztahu lze jednoduchou úpravou získat

$$\Delta\varepsilon^{(i)} = \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} + f_m \frac{\check{E}_m^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)} \quad (\text{F.19})$$

Pro deformaci celého modelu po i -tém kroku lze zapsat

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + \Delta\varepsilon^{(i)} \quad (\text{F.20})$$

a dosazením za $\Delta\varepsilon^{(i)}$ z (F.19) se dostává vztah v kompaktním tvaru analogickému k (F.11)

$$\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i-1)} + f_m \frac{\check{E}_m^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (\text{F.21})$$

kde přírůstek deformace vlivem „čistého“ dotvarování $\Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)}$ lze dle (F.10) vyjádřit jako

$$\Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} \quad (\text{F.22})$$

a přírůstek deformace celého modelu v i -tém kroku lze vyjádřit (ve tvaru vhodném pro algoritmizaci)

$$\Delta\varepsilon^{(i)} = f_m \frac{\check{E}_m^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\varepsilon}_m^{(i)} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} = f_m \frac{\check{E}_m^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\varepsilon}_j^{(i-1)} + \frac{\Delta\sigma^{(i)}}{\check{E}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (\text{F.23})$$

Pro názornost je vhodné rozepsat první a n -tý krok algoritmu. Je uvažován konstantní krok s délkou $\Delta t_i = \text{konst.}$, pak i pomocné konstanty ϑ_j a ψ_j (a na nich závislé algoritmické moduly \check{E}_m a \check{E}_{eff}) jsou stejné ve všech krocích algoritmu.

1. krok

- přírůstek deformace vlivem dotvarování:

$$\Delta \check{\varepsilon}_m^{(1)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j \dot{\varepsilon}_j^{(0)} = 0$$
- přírůstek deformace v 1. kroku:

$$\Delta \varepsilon^{(1)} = f_m \frac{\check{E}_m}{\check{E}_{\text{eff}}} \Delta \check{\varepsilon}_m^{(1)} + \frac{\Delta \sigma^{(1)}}{\check{E}_{\text{eff}}} = \frac{\Delta \sigma^{(1)}}{\check{E}_{\text{eff}}}$$
- přírůstek napětí v inkluzi:

$$\Delta \sigma_i^{(1)} = E_{i,0} \Delta \varepsilon^{(1)}$$
- přírůstek napětí v matici:

$$\Delta \sigma_m^{(1)} = \frac{\Delta \sigma^{(1)} - f_i \Delta \sigma_i^{(1)}}{f_m}$$
- rychlost deformace j -tého článku na konci 1. kroku:

$$\dot{\varepsilon}_j^{(1)} = \vartheta_j \dot{\varepsilon}_j^{(0)} + \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta \sigma_m^{(1)} = \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta \sigma_m^{(1)}$$
- deformace j -tého článku na konci 1. kroku:

$$\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j^{(0)} + \Delta t_i \psi_j \dot{\varepsilon}_j^{(0)} + \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta \sigma_m^{(1)} = \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta \sigma_m^{(1)}$$
- celková deformace na konci 1. kroku:

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(0)} + \Delta \varepsilon^{(1)} = \Delta \varepsilon^{(1)}$$

 n -tý krok

- přírůstek deformace vlivem dotvarování:

$$\Delta \check{\varepsilon}_m^{(n)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j \dot{\varepsilon}_j^{(n-1)}$$
- přírůstek deformace v n -tém kroku:

$$\Delta \varepsilon^{(n)} = f_m \frac{\check{E}_m}{\check{E}_{\text{eff}}} \Delta \check{\varepsilon}_m^{(n)} + \frac{\Delta \sigma^{(n)}}{\check{E}_{\text{eff}}}$$
- přírůstek napětí v inkluzi:

$$\Delta \sigma_i^{(n)} = E_{i,0} \Delta \varepsilon^{(n)}$$
- přírůstek napětí v matici:

$$\Delta \sigma_m^{(n)} = \frac{\Delta \sigma^{(n)} - f_i \Delta \sigma_i^{(n)}}{f_m}$$
- rychlost deformace j -tého článku na konci n -tého kroku:

$$\dot{\varepsilon}_j^{(n)} = \vartheta_j \dot{\varepsilon}_j^{(n-1)} + \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta \sigma_m^{(n)}$$
- deformace j -tého článku na konci n -tého kroku:

$$\varepsilon_j^{(n)} = \varepsilon_j^{(n-1)} + \Delta t_i \psi_j \dot{\varepsilon}_j^{(n-1)} + \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta \sigma_m^{(n)}$$
- celková deformace na konci n -tého kroku:

$$\varepsilon^{(n)} = \varepsilon^{(n-1)} + \Delta \varepsilon^{(n)}$$

F.4 Exponenciální algoritmus pro částicový kompozit při smykovém namáhání

Pro úpravu exponenciálního algoritmu na aplikaci pro částicový kompozit namáhaný čistým smykem je možno do značné míry využít postup z předcházejícího oddílu. Kromě rozdílu spočívajícího ve zřejmé skutečnosti, že přírůstky smykové deformace matrice a inkluze (koulí) již nejsou shodné, je nutno do výpočtu zavést příslušné koncentrační faktory. Jde jednak o elastické koncentrační faktory A_m^d a A_i^d , a vzhledem ke vzniku vlastního napětí ve viskoelastické matici i o koncentrační faktory vlastního napětí a_m^d a a_i^d . Změna v označení normálové deformace ε na smykovou γ a normálového napětí σ na smykové τ , je jen formálního charakteru a nemá na výše uvedené principy žádný vliv.

Celkový přírůstek smykové deformace za časový okamžik Δt_i odpovídající délce kroku i lze vyjádřit přírůstky deformace matrice a inkluze jako

$$\Delta\gamma^{(i)} = f_m \Delta\gamma_m^{(i)} + f_i \Delta\gamma_i^{(i)} \quad (\text{F.24})$$

a celkový přírůstek smykového napětí lze obdobně rozdělit jako

$$\Delta\tau^{(i)} = f_m \Delta\tau_m^{(i)} + f_i \Delta\tau_i^{(i)} \quad (\text{F.25})$$

kde f_m a f_i jsou objemové podíly matrice a inkluze (koulí), pro které platí $f_m + f_i = 1$.

Pro vyjádření napětí přenášeného viskoelastickou maticí lze analogicky použít vztah (F.12) a pro napětí v elastických koulích zobecněný Hookeův zákon, tj.

$$\Delta\tau_m^{(i)} = \check{\mu}_m^{(i)} \left(\Delta\gamma_m^{(i)} - \Delta\check{\gamma}_m^{(i)} \right) \quad (\text{F.26})$$

$$\Delta\tau_i^{(i)} = \mu_{i,0} \Delta\gamma_i^{(i)} \quad (\text{F.27})$$

Pro deformaci matrice a inkluze platí vztahy

$$\Delta\gamma_m^{(i)} = A_m^d \Delta\gamma^{(i)} + \Delta a_m^d \quad (\text{F.28})$$

$$\Delta\gamma_i^{(i)} = A_i^d \Delta\gamma^{(i)} + \Delta a_i^d \quad (\text{F.29})$$

kde A_m^d a A_i^d jsou elastické koncentrační faktory deformace matrice a inkluze (vyčíslené příslušnou homogenizační metodou, např. v této práci metodou Mori-Tanaka) a a_m^d a a_i^d jsou koncentrační faktory deformace vlastního napětí matrice a inkluze.

Přírůstek celkového napětí lze zapsat jako

$$\Delta\tau^{(i)} = \underbrace{\left(f_m A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)} + f_i A_i^{d(i)} \mu_{i,0}\right)}_{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\gamma^{(i)} - \underbrace{f_m A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)} \Delta\check{\gamma}_m^{(i)}}_{\Delta\check{\tau}^{(i)}} \quad (\text{F.30})$$

kde $\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}$ je algoritmická efektivní tuhost a $\Delta\check{\tau}^{(i)}$ je relaxace vlivem dotvarování matrice v i -tém kroku.

Z tohoto vztahu lze jednoduchou úpravou získat

$$\Delta\gamma^{(i)} = \frac{\Delta\tau^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} + f_m \frac{A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\gamma}_m^{(i)} \quad (\text{F.31})$$

Pro deformaci celého modelu po i -tém kroku lze zapsat

$$\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)} + \Delta\gamma^{(i)} \quad (\text{F.32})$$

a dosazením za $\Delta\gamma^{(i)}$ z (F.31) se dostává vztah v kompaktním tvaru opět analogickému k (F.11)

$$\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)} + f_m \frac{A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\gamma}_m^{(i)} + \frac{\Delta\tau^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (\text{F.33})$$

kde přírůstek deformace vlivem „čistého“ dotvarování $\Delta\check{\gamma}_m^{(i)}$ lze dle (F.10) vyjádřit jako

$$\Delta\check{\gamma}_m^{(i)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\gamma}_j^{(i-1)} \quad (\text{F.34})$$

a přírůstek deformace celého modelu v i -tém kroku lze vyjádřit (ve tvaru vhodném pro algoritmizaci)

$$\Delta\gamma^{(i)} = f_m \frac{A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta\check{\gamma}_m^{(i)} + \frac{\Delta\tau^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} = f_m \frac{A_m^{d(i)} \check{\mu}_m^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j^{(i)} \dot{\gamma}_j^{(i-1)} + \frac{\Delta\tau^{(i)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}^{(i)}} \quad (\text{F.35})$$

Pro názornost je opět vhodné rozepsat první a n -tý krok algoritmu. Jejich porovnáním s postupem uvedeným na konci předchozího oddílu tak nejlépe vyniknou odlišnosti algoritmu pro obecný reologický model kompozitu oproti základní verzi pro jednoduchý model vláknového kompozitu namáhaného normálovým napětím.

Je uvažován konstantní krok s délkou $\Delta t_i = \text{konst.}$, pak i pomocné konstanty ϑ_j a ψ_j (a na nich závislé algoritmické moduly $\check{\mu}_m$ a $\check{\mu}_{\text{eff}}$ a elastické koncentrační faktory A_m^d a A_i^d) jsou stejné ve všech krocích algoritmu.

1. krok

- přírůstek deformace vlivem dotvarování:

$$\Delta \check{\gamma}_m^{(1)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j \dot{\gamma}_j^{(0)} = 0$$

- přírůstek koncentračních faktorů vlastního napětí:

$$\Delta a_m^{d(1)} = (1 - A_m^d) (\check{\mu}_m - \mu_{i,0})^{-1} \check{\mu}_m \Delta \check{\gamma}_m^{(1)} = 0$$

$$\Delta a_i^{d(1)} = (1 - A_i^d) (\check{\mu}_m - \mu_{i,0})^{-1} \check{\mu}_m \Delta \check{\gamma}_m^{(1)} = 0$$

$$\textit{kontrola: } f_m \Delta a_m^{d(1)} + f_i \Delta a_i^{d(1)} = 0$$

- přírůstek deformace v 1. kroku:

$$\Delta \gamma^{(1)} = f_m \frac{A_m^d \check{\mu}_m}{\check{\mu}_{\text{eff}}} \Delta \check{\gamma}_m^{(1)} + \frac{\Delta \tau^{(1)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}} = \frac{\Delta \tau^{(1)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}}$$

- přírůstek deformace matrice a inkluze:

$$\Delta \gamma_m^{(1)} = A_m^d \Delta \gamma^{(1)} + \Delta a_m^{d(1)} = A_m^d \Delta \gamma^{(1)}$$

$$\Delta \gamma_i^{(1)} = A_i^d \Delta \gamma^{(1)} + \Delta a_i^{d(1)} = A_i^d \Delta \gamma^{(1)}$$

$$\textit{kontrola: } f_m \Delta \gamma_m^{(1)} + f_i \Delta \gamma_i^{(1)} - \Delta \gamma^{(1)} = 0$$

- přírůstek napětí v matrici a inkluzi:

$$\Delta \tau_m^{(1)} = \check{\mu}_m \left(\Delta \gamma_m^{(1)} - \Delta \check{\gamma}_m^{(1)} \right) = \check{\mu}_m \Delta \gamma_m^{(1)}$$

$$\Delta \tau_i^{(1)} = \mu_{i,0} \Delta \gamma_i^{(1)}$$

$$\textit{kontrola: } f_m \Delta \tau_m^{(1)} + f_i \Delta \tau_i^{(1)} - \Delta \tau^{(1)} = 0$$

- rychlost deformace j -tého článku na konci 1. kroku:

$$\dot{\gamma}_j^{(1)} = \vartheta_j \dot{\gamma}_j^{(0)} + \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta \tau_m^{(1)} = \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta \tau_m^{(1)}$$

- deformace j -tého článku na konci 1. kroku:

$$\gamma_j^{(1)} = \gamma_j^{(0)} + \Delta t_i \psi_j \dot{\gamma}_j^{(0)} + \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta \tau_m^{(1)} = \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta \tau_m^{(1)}$$

- celková deformace na konci 1. kroku:

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \Delta \gamma^{(1)} = \Delta \gamma^{(1)}$$

n -tý krok

- přírůstek deformace vlivem dotvarování:

$$\Delta\check{\gamma}_m^{(n)} = \Delta t_i \sum_{j=1}^M \psi_j \dot{\gamma}_j^{(n-1)}$$

- přírůstek koncentračních faktorů vlastního napětí:

$$\Delta a_m^{d(n)} = (1 - A_m^d) (\check{\mu}_m - \mu_{i,0})^{-1} \check{\mu}_m \Delta\check{\gamma}_m^{(n)}$$

$$\Delta a_i^{d(n)} = (1 - A_i^d) (\check{\mu}_m - \mu_{i,0})^{-1} \check{\mu}_m \Delta\check{\gamma}_m^{(n)}$$

$$\text{kontrola: } f_m \Delta a_m^{(n)} + f_i \Delta a_i^{(n)} = 0$$

- přírůstek deformace v n -tém kroku:

$$\Delta\gamma^{(n)} = f_m \frac{A_m^d \check{\mu}_m}{\check{\mu}_{\text{eff}}} \Delta\check{\gamma}_m^{(n)} + \frac{\Delta\tau^{(n)}}{\check{\mu}_{\text{eff}}}$$

- přírůstek deformace matrice a inkluze:

$$\Delta\gamma_m^{(n)} = A_m^d \Delta\gamma^{(n)} + \Delta a_m^{d(n)}$$

$$\Delta\gamma_i^{(n)} = A_i^d \Delta\gamma^{(n)} + \Delta a_i^{d(n)}$$

$$\text{kontrola: } f_m \Delta\gamma_m^{(n)} + f_i \Delta\gamma_i^{(n)} - \Delta\gamma^{(n)} = 0$$

- přírůstek napětí v matrici a inkluzi:

$$\Delta\tau_m^{(n)} = \check{\mu}_m \left(\Delta\gamma_m^{(n)} - \Delta\check{\gamma}_m^{(n)} \right)$$

$$\Delta\tau_i^{(n)} = \mu_{i,0} \Delta\gamma_i^{(n)}$$

$$\text{kontrola: } f_m \Delta\tau_m^{(n)} + f_i \Delta\tau_i^{(n)} - \Delta\tau^{(n)} = 0$$

- rychlost deformace j -tého článku na konci n -tého kroku:

$$\dot{\gamma}_j^{(n)} = \vartheta_j \dot{\gamma}_j^{(n-1)} + \frac{1-\vartheta_j}{\Delta t_i E_j} \Delta\tau_m^{(n)}$$

- deformace j -tého článku na konci n -tého kroku:

$$\gamma_j^{(n)} = \gamma_j^{(n-1)} + \Delta t_i \psi_j \dot{\gamma}_j^{(n-1)} + \frac{1-\psi_j}{E_j} \Delta\tau_m^{(n)}$$

- celková deformace na konci n -tého kroku:

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} + \Delta\gamma^{(n-1)}$$

Dodatek G

Princip použití Eshelbyho řešení

Nalezení efektivních materiálových vlastností kompozitu metodou Mori-Tanaka je založeno na využití Eshelbyho tenzoru. Tento tenzor je výsledkem Eshelbyho řešení problému inkluze a pro izotropní materiál a elipsoidální inkluzi je jeho složky možno vyjádřit v uzavřeném tvaru. Předmětem tohoto dodatku, který je výtahem z [9], jsou proto základní principy vedoucí k použití Eshelbyho řešení pro problém elipsoidální nehomogenity.

G.1 Vlastní deformace a napětí

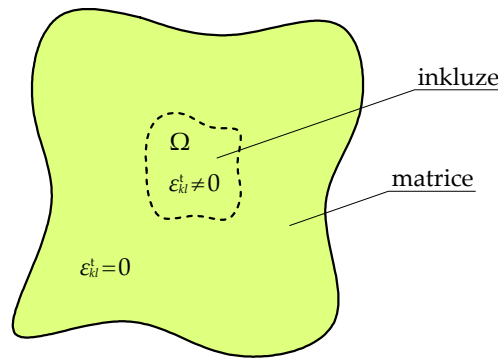
Defekty v elastickém materiálu jsou nevyhnutelně příčinou nehomogenních polí napětí a deformace, kterými tyto defekty mohou být charakterizovány. Je možno rozlišovat mezi defekty, které jsou sami o sobě příčinou tzv. pole *vlastní deformace* (*eigenstrain*) nebo *vlastního napětí* (*eigenstress*), např. dislokace, inkluze, a těmi, které pouze pod vlivem nějakého vnějšího zatížení vyvolávají odchylku od rovnoměrného (tj. prostorově konstantního) pole, jako např. částice cizího materiálu, póry nebo trhliny. V tomto druhém případě *materiálových nehomogenit* je možné a i praktické rozložit pole celkové deformace a napětí na dvě části. Jednak na rovnoměrné pole, které by odpovídalo materiálu bez defektů, a na odchylku způsobenou defekty, která je pak označována jako *ekvivalentní vlastní deformace* nebo *napětí*. Tento rozklad dovoluje zavést formální rovnost mezi nehomogenním materiálem a nějakým určitým homogenním materiálem s jistým rozložením vlastní deformace nebo napětí, bez ohledu na jeho fyzikální původ.

G.2 Eshelbyho řešení problému inkluze

Je uvažováno prostorové rozdělení vlastní deformace $\varepsilon_{ij}^t(\underline{x})$, způsobené např. změnou geometrie krystalové mřížky, způsobené fázovou přeměnou v pevné látce. Jelikož tyto deformace nejsou způsobeny napětím, jsou vlastní deformace často označovány jako *beznepětové transformační deformace* (*stress-free transformation strains*), a odtud index t . V rámci infinitezimálních deformací jsou celkové deformace ε_{ij} součtem elastických deformací $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}$ a vlastních deformací, tj. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t$. Pak jsou napětí určena jako

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \quad (\text{G.1})$$

Jestliže nemizející vlastní deformace převažují pouze v určité ohraničené podoblasti homogenního materiálu Ω , je tato oblast nazývána *inkluze* a obklopující materiál *matrice* (viz obr. G.1). Je třeba zdůraznit, že materiálové vlastnosti inkluze a matrice jsou stejné, v opačném případě je oblast Ω nazývána *nehomogenita*.



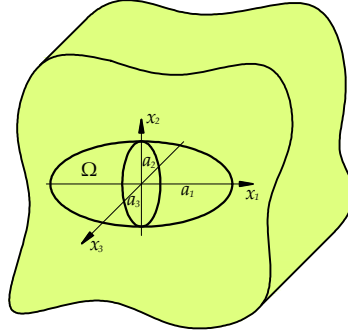
Obrázek G.1: Inkluze v matrici.

V obecném případě pro libovolnou geometrii inkluze a libovolné pole vlastní deformace $\varepsilon_{ij}^t(\underline{x})$ není možné vyjádřit rozložení napětí a polí celkové deformace a přemístění v uzavřeném tvaru. U některých speciálních případech, jak bude dále ukázáno, to však možné je.

Pravděpodobně nejdůležitější analytické řešení mikromechaniky bylo nalezeno J. D. Eshelbym [8]. Je platné pro neohraničenou oblast, která obsahuje *elipsoidální* inkluzi Ω s hlavními osami a_i , popsanou rovnicí

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1$$

Jestliže jsou vlastní deformace v inkluzi konstantní $\varepsilon_{kl}^t = \text{konst.}$ pak platí pozoruhodný výsledek, že celkové deformace ε_{kl} uvnitř inkluze Ω jsou rov-



Obrázek G.2: Elipsoidální inkluze Ω v neohraničené oblasti.

něž konstantní. A prostřednictvím *Eshelbyho tenzoru* S_{ijkl} jsou lineárně závislé na vlastních deformacích

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^t = \text{konst.} \quad \text{v } \Omega \quad (\text{G.2})$$

Dosazením do (G.1) mohou být napětí uvnitř Ω , které jsou pak rovněž konstantní, vyjádřeny jako

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} (S_{mnkl} - I_{mnkl}) \varepsilon_{kl}^t = \text{konst.} \quad \text{v } \Omega \quad (\text{G.3})$$

kde

$$I_{mnkl} = \frac{1}{2} (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk})$$

je symetrický jednotkový tenzor 4. řádu.

Mimo inkluzi Ω , napětí a deformace konstantní nejsou. Se vzrůstající vzdáleností r od inkluze asymptoticky klesají podle ε_{ij} , $\sigma_{ij} \sim r^{-3}$ pro $r \rightarrow \infty$.

V případě izotropního materiálu závisí složky Eshelbyho tenzoru jen na Poissonově konstantě ν , poměru hlavních os a_i a jejich orientaci s ohledem na zvolený kartézský souřadný systém. Řešení dle Eshelbyho (G.2) platí i pro libovolný anizotropní materiál, ale pouze v případě izotropního materiálu je možné vyjádření tenzoru S_{ijkl} a polí mimo Ω v uzavřeném tvaru.

Eshelbyho řešení pro elipsoidální inkluze je základem pro analytické homogenizační techniky. Z obecného elipsoidu lze odvodit různé speciální případy. Např. dvourozměrné řešení pro nekonečně dlouhý válec v příčném řezu je získáno pro limitní přechod $a_3 \rightarrow \infty$. Pro *kulovou inkluzi* ($a_i = a$) v izotropním materiálu závislost na hlavních osách a jejich orientaci vymizí a Eshelbyho tenzor se zredukuje na

$$S_{ijkl} = \alpha \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (\text{G.4})$$

kde

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} = \frac{3k}{3k + 4\mu} \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} = \frac{6(k + 2\mu)}{5(3k + 4\mu)} \quad (\text{G.5})$$

jsou skalární konstanty závislé na materiálových parametrech. Naprostá, tj. materiálová i geometrická, izotropie problému pak dovoluje rozložení do objemové (volumetrické) a deviatorické složky deformací, které zvýrazňují význam parametrů α a β :

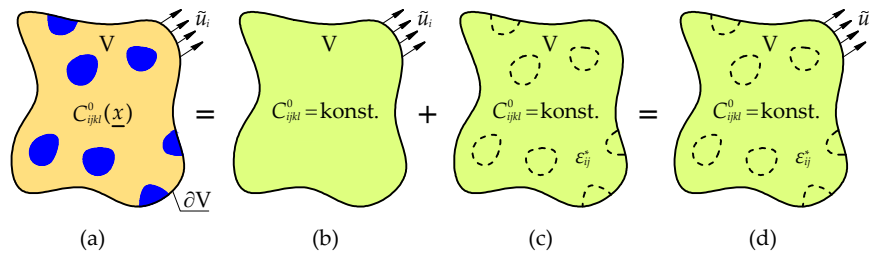
$$\varepsilon_{kk} = \alpha \varepsilon_{kk}^t \quad e_{ij} = \beta e_{ij}^t \quad \text{v } \Omega \quad (\text{G.6})$$

G.3 Ekvivalentní vlastní deformace

Nyní je možno se zaměřit i na druhý typ defektů, které jsou místo vlastních deformací v homogenním materiálu charakterizovány nehomogenitami, tj. prostorově se lišícími materiálovými vlastnostmi. Nejprve je pak třeba popsat tyto defekty *ekvivalentní vlastní deformací* v určitém homogenním srovnávacím materiálu tak, aby se opět dalo použít Eshelbyho řešení.

Proto je uvažována oblast V s nehomogenním materiálovým chováním popsaná prostorově závislým tenzorem tuhosti $C_{ijkl}(\underline{x})$ a s přemístěními \tilde{u}_i předepsanými na její hranici ∂V (viz obr. G.3a). Jestliže jsou objemové síly zanedbatelné je tento problém hraničních hodnot popsán rovnicemi

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\underline{x}) \varepsilon_{kl} \quad u_i|_{\partial V} = \tilde{u}_i \quad (\text{G.7})$$



Obrázek G.3: (a) heterogenní materiál, (b) homogenní srovnávací materiál, (c) ekvivalentní vlastní napětí, (d) homogenizovaný původní problém.

Dále je uvažována geometricky identická oblast V podléhající stejným okrajovým podmínkám, nyní však sestávající z *homogenního srovnávacího materiálu* s konstantními materiálovými vlastnostmi C_{ijkl}^0 (viz obr. G.3b). Pole u tohoto problému jsou označeny indexem 0:

$$\sigma_{ij,j}^0 = 0 \quad \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 \quad u_i^0|_{\partial V} = \tilde{u}_i \quad (\text{G.8})$$

Jestliže jsou *rozdíly polí* formulovány jako

$$\bar{u}_i = u_i - u_i^0 \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 \quad (\text{G.9})$$

pro rozdíl napětí vyplývá

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}(\underline{x}) \varepsilon_{kl} - C_{ijkl}^0 \left(\overbrace{\varepsilon_{kl} - \bar{\varepsilon}_{kl}}^{\varepsilon_{kl}^0} \right) \\ &= C_{ijkl}^0 \bar{\varepsilon}_{kl} + (C_{ijkl}(\underline{x}) - C_{ijkl}^0) \varepsilon_{kl} \\ &= C_{ijkl}^0 \left[\bar{\varepsilon}_{kl} + \underbrace{(C_{klmn}^0)^{-1} [C_{mnpq}(\underline{x}) - C_{mnpq}^0]}_{-\varepsilon_{kl}^*} \varepsilon_{pq} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Odtud jsou rozdíly polí vyjádřeny rovnicemi

$$\bar{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 (\bar{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \quad \bar{u}_i|_{\partial V} = 0 \quad (\text{G.11})$$

kteřé popisují okrajovou úlohu (boundary value problem) v *homogenním* materiálu C_{ijkl}^0 s *vlastní deformací* $\varepsilon_{kl}^*(\underline{x})$ a vymizejícími přemístěními na hranici ∂V (viz obr. G.3c).

$$\varepsilon_{ij}^* = -(C_{ijkl}^0)^{-1} [C_{klmn}(\underline{x}) - C_{klmn}^0] \varepsilon_{mn} \quad (\text{G.12})$$

znamená *ekvivalentní vlastní deformaci*, tj. ekvivalent k heterogenitě materiálu. Použitím libovolného homogenního srovnávacího materiálu, tak byl původně složený problém (obr. G.3a) přeměněn na jednodušší problém (obr. G.3d) s homogenním materiálem a rozloženými vlastními deformacemi. Tento problém dosud závisí na poli deformace původního problému, ale tato závislost je pouze prostřednictvím odchylky $C_{ijkl}(\underline{x}) - C_{ijkl}^0$ v materiálových vlastnostech. Takovýto přístup, který lze chápat jako druh *filtrace* je výhodný v několika ohledech. Např. když jsou již známy základní řešení pro problémy vlastní deformace v homogenním materiálu jakým je Eshelbyho řešení, které nyní může být formálně použito na materiálové nehomogenity. Tedy, rozdíl $C_{ijkl}(\underline{x}) - C_{ijkl}^0$ v (G.12) znamená, že s vhodně zvoleným C_{ijkl}^0 chyba v aproximaci $\varepsilon_{ij}(\underline{x})$ v řešení problému hraničních hodnot může mít menší vliv než v původním problému.

G.4 Elipsoidální nehomogenita

Jako důležitý zvláštní případ, který dovoluje použít Eshelbyho řešení, je uvažována elipsoidální materiálová nehomogenita Ω v neohraničené matici. Nyní jsou materiálové vlastnosti po částech konstantní a dané tenzorem \mathbb{C}_i uvnitř Ω (nehomogenita) a \mathbb{C}_m v okolní matici. V nekonečnu je předepsáno homogenní pole deformace $\varepsilon^0 = \text{konst.}$ a materiál matrice je

zvolen jako homogenní srovnávací materiál, tj. $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}_m$. Použitím (G.9) a (G.12) je ekvivalentní vlastní deformace v Ω

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\underline{x}) = -(\mathbf{C}_m)^{-1} : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad (\text{G.13})$$

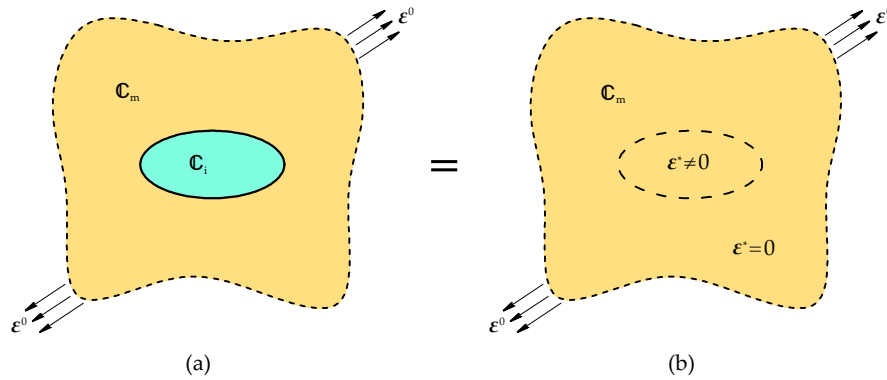
Jelikož mimo Ω je $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{0}$, rozdíl deformace $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{x})$ v (G.11) může být určen z Eshelbyho řešení

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* = \text{konst.} \quad (\text{G.14})$$

Že nutná podmínka pro jeho použití, tj. konstantní vlastní deformace, je skutečně dodržena, je potvrzeno vložení (G.14) do (G.13). Řešením pro $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ se pak získává ekvivalentní vlastní deformace způsobená konstantní deformací $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ předepsanou v nekonečnu (viz obr. G.4):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = - \left[\mathbf{S} + (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)^{-1} : \mathbf{C}_m \right]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad \text{v } \Omega \quad (\text{G.15})$$

Použitím (G.14) a (G.15) je celková deformace $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ uvnitř nehomogenity Ω jako funkce vnějšího zatížení $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ zapsána jako



Obrázek G.4: (a) elipsoidální nehomogenita, (b) homogenní materiál s vlastním napětím.

genity Ω jako funkce vnějšího zatížení $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ zapsána jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\left[\mathbf{I} + \mathbf{S} : (\mathbf{C}_m)^{-1} : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) \right]^{-1}}_{\mathbf{A}_i^\infty} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \text{konst.} \quad (\text{G.16})$$

Tensor \mathbf{A}_i^∞ , který popisuje vztah mezi deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ uvnitř nehomogenity a vnějším zatížením $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, je nazýván *koncentrační tenzor*. Použitím (G.16), napětí $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}$ uvnitř Ω , které je taky konstantní, může být nyní vyjádřeno jako funkce napětí $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}_m : \boldsymbol{\varepsilon}^0$ působící v nekonečnu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_i : \mathbf{A}_i^\infty : (\mathbf{C}_m)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (\text{G.17})$$

Dodatek H

Skripty pro systém GNU Octave

H.1 Materiálový bod: mater-bod.m

```
1 %% Materialovy bod
2
3 % parametry modelu
4 E0=21.04;      % [GPa]
5 E=[9902 3841 1911 747 404 105];      % [GPa]
6 tau=[0.001 0.01 0.1 1 10 100];      % [den]
7 M=length(E);      % pocet danku
8
9 % zatezovaci funkce
10 sgm=5;      % [MPa]
11 om=pi/100;
12 function y=f(t,sgm,om)
13     y=sgm*sin(om*t);
14 end
15
16 % vektor casu pro vyhodnoceni f(t)
17 t=linspace(0,100,9)';      % [den]
18 t(1)=0.1;
19
20 % presne analyticke reseni: deformace v case t [l-e-l]
21 for i=1:length(t)
22     as(i)=sgm*(1/E0*sin(om*t(i)) ...
23         +sum(1./(E.*(1+tau.^2*om^2)) ...
24             .*(sin(om*t(i))-om*tau.*(cos(om*t(i))-exp(-t(i)./tau)))))*1000;
25 end
26
```

```

27 % exponencialni algoritmus
28 n=10000;      % pocet kroku
29 dt=100/n;
30 u=1;
31 theta=exp(-dt./tau);
32 psi=tau.*(1-theta)./dt;
33 eps_p=zeros(1,M);
34 eps_n=zeros(1,M);
35 deps_p=zeros(1,M);
36 deps_n=zeros(1,M);
37 for i=1:n
38     del_sgm=f(i*dt,sgm,om)-f((i-1)*dt,sgm,om);
39     deps_n=theta.*deps_p.+(1-theta)./(dt*E)*del_sgm;
40     eps_n=eps_p.+dt*psi.*deps_p.+(1-psi)*del_sgm./E;
41     deps_p=deps_n;
42     eps_p=eps_n;
43     if i*dt==t(u), ea(u)=(f(i*dt,sgm,om)/E0+sum(eps_n))*1000;
44         u=u+1;
45     end
46 end
47
48 % inverzni Laplaceova transformace
49 function[Y]=F_p(p,sgm,om,E0,E,tau,M)
50 F=sgm*om./(p.^2+om^2);      % Laplaceuv obraz zatezovaci funkce
51 J=1./(p*E0) ...
52     +1./p.*(1./(E.*tau)*(1./(p*ones(1,M)+1./(ones(length(p),1)*tau))))';
53 Y=p.*J.*F;
54 end
55 pol=0;
56 tol=1e-12;
57 Lt=invlap('F_p',t,pol,tol,sgm,om,E0,E,tau,M)*1000;
58
59 % vysledne hodnoty a relativni chyby obou algoritmu
60 [t f(t,sgm,om) as' (Lt-as')./as'*1e9 (ea'-as')./as'*1e9]

```


H.2 Vláknoový kompozit: vlak-komp.m

```

1  %% Vlakovny kompozit pri jednoose napjatosti
2
3  %% parametry modelu
4  fm=0.8;      % podil matrice (viskoelasticka)
5  fi=1-fm;    % podil inkluze (elasticka)
6  Ei0=386;    % [GPa]
7  Em0=21.04;  % [GPa]
8  E=[9902 3841 1911 747 404 105]; % [GPa]
9  tau=[0.001 0.01 0.1 1 10 100]; % [den]
10 M=length(E); % pocet dalku (matrice)
11
12 % zatezovaci funkce
13 sgm=20;     % [MPa]
14 om=pi/100;
15 function y=f(t,sgm,om)
16     y=sgm*sin(om*t);
17 end
18
19 % vektor casu pro vyhodnoceni f(t)
20 t=linspace(0,100,9)'; % [den]
21 t(1)=0.1;
22
23 % exponencialni algoritmus
24 n=10000;    % pocet kroku
25 dt=100/n;
26 u=1;
27 theta=exp(-dt./tau);
28 psi=tau.*(1-theta)./dt;
29 Em=(1/Em0+sum(1./E.*(1.-psi))).^-1; % algoritnicka tuhost matrice
30 Eeff=fm*Em+fi*Ei0; % algoritnicka efektivni tuhost
31 eps=0;
32 del_eps=0;
33 eps_p=zeros(1,M);
34 eps_n=zeros(1,M);
35 deps_p=zeros(1,M);
36 deps_n=zeros(1,M);
37 for i=1:n
38     del_sgm=f(i*dt,sgm,om)-f((i-1)*dt,sgm,om);
39     del_eps=fm*Em/Eeff*dt*psi*deps_p'+del_sgm/Eeff;
40     del_sgm_i=Ei0*del_eps;

```

```

41     if fm>0 del_sgm_m=(del_sgm-fi*del_sgm_i)/fm;
42         else del_sgm_m=0;
43     end
44     deps_n=theta.*deps_p+(1-theta)./(dt*E)*del_sgm_m;
45     eps_n=eps_p+dt*psi.*deps_p+(1-psi)*del_sgm_m./E;
46     deps_p=deps_n;
47     eps_p=eps_n;
48     eps=eps+del_eps;
49     if i*dt==t(u), ea(u)=eps*1000;
50         u=u+1;
51     end
52 end
53
54 % inverzni Laplaceova transformace
55 function[Y]=F_p(p,sgm,om,fm,fi,Ei0,Em0,E,tau,M)
56 F=sgm*om./(p.^2+om^2);      % Laplaceuv obraz zatezovaci funkce
57 Jm=1./(p*Em0) ...
58     +1./p.*(1./(E.*tau)*(1./(p*ones(1,M)+1./(ones(length(p),1)*tau))))');
59 Ji=1./(p*Ei0);
60 Jeff=(fm./Jm+fi./Ji).^-1;
61 Y=p.*Jeff.*F;
62 end
63 pol=0;
64 tol=1e-12;
65 Lt=invlap('F_p',t,pol,tol,sgm,om,fm,fi,Ei0,Em0,E,tau,M)*1000;
66
67 % vysledne hodnoty a relativni chyba exponencialniho algoritmu
68 [t f(t,sgm,om) Lt (ea'-Lt)./Lt*1e9]

```

H.3 Částicový kompozit: cast-komp.m

```

1  %% Casticovy kompozit pri cistem smyku
2
3  %% parametry modelu
4  fm=0.8;      % podil matrice (viskoelasticka)
5  fi=1-fm;    % podil inkluze (elasticka)
6  Ei0=386;    % [GPa]
7  Em0=21.04;  % [GPa]
8  E=[9902 3841 1911 747 404 105]; % [GPa]
9  tau=[0.001 0.01 0.1 1 10 100]; % [den]
10 M=length(E); % pocet dalku (matrice)
11 nu_m=0.4;   % Poissonuv soucinitel matrice
12 nu_i=0.41;  % Poissonuv soucinitel inkluze
13 Gi0=Ei0/(2*(1+nu_i)); % [GPa] smykovy modul pruznosti inkluze (elasticka)
14 Gm0=Em0/(2*(1+nu_m)); % [GPa] smyk. modul pruz. (O-teho dalku matrice)
15 G=E/(2*(1+nu_m)); % [GPa] smykovy modul pruznosti viskoelastickych dalku
16 Km0=2*Gm0*(1+nu_m)/(3*(1-2*nu_m)); % [GPa] objemovy modul pruznosti
17
18 % zatezovaci funkce
19 sgm=5;      % [MPa] amplituda smykoveho napeti
20 om=pi/100;
21 function y=f(t,sgm,om)
22     y=sgm*sin(om*t);
23 end
24
25 % vektor casu pro vyhodnoceni f(t)
26 t=linspace(0,100,9)'; % [den]
27 t(1)=0.1;
28
29 % exponencialni algoritmus (homogenizace metodou Mori-Tanaka)
30 n=1000;    % pocet kroku
31 dt=100/n;
32 u=1;
33 theta=exp(-dt./tau);
34 psi=tau.*(1-theta)./dt;
35 Gm=(1/Gm0+sum(1./G.*(1.-psi))).^-1; % algoritmicke tuhost matrice
36 beta_m=(6*(Km0+2*Gm))/(5*(3*Km0+4*Gm)); % dev. cast Eshelbyho tenz.
37 z=1/(1+beta_m*(Gi0/Gm-1)); % pomocny vyraz pro konc. faktory
38 Am=1/(fm+fi*z); % koncentracni deformacni faktor matrice (Mori-Tanaka)
39 Ai=z/(fm+fi*z); % koncentracni deformacni faktor inkluze (Mori-Tanaka)
40 % kontrola: fm*Am + fi*Ai - 1 = 0
41 Geff=fm*Gm*Am+fi*Gi0*Ai; % algoritmicke efektivni tuhost

```

```

42 gam=0;
43 del_gam=0;
44 gam_p=zeros(1,M);
45 gam_n=zeros(1,M);
46 dgam_p=zeros(1,M);
47 dgam_n=zeros(1,M);
48 for i=1:n
49     del_sgm=f(i*dt,sgm,om)-f((i-1)*dt,sgm,om);
50     d_gam_m=dt*psi*dgam_p';      % prirustek dotvarovani matrice
51
52     % koncentracni deformacni faktory vlastniho napeti matrice a inkluze
53     am=(1-Am)/(Gm-Gi0)*(Gm*d_gam_m);
54     ai=(1-Ai)/(Gm-Gi0)*(Gm*d_gam_m);
55     % kontrola: fm*am + fi*ai = 0
56
57     del_gam=(del_sgm+fm*Am*Gm*d_gam_m)/Geff;
58     del_gam_m=Am*del_gam+am;
59     del_gam_i=Ai*del_gam+ai;
60     % kontrola: del_gam - fm*del_gam_m - fi*del_gam_i = 0
61
62     del_sgm_m= Gm*(del_gam_m-d_gam_m);
63     del_sgm_i=Gi0*del_gam_i;
64     % kontrola: del_sgm - fm*del_sgm_m - fi*del_sgm_i = 0
65
66     dgam_n=theta.*dgam_p.+(1-theta)./(dt*G)*del_sgm_m;
67     gam_n=gam_p.+dt*psi.*dgam_p.+(1-psi)*del_sgm_m./G;
68     % kontrola: sum(gam_n-gam_p) + del_sgm_m/Gm0 - del_gam_m = 0
69
70     dgam_p=dgam_n;
71     gam_p=gam_n;
72
73     gam =gam+del_gam;
74     if i*dt==t(u), ea(u)=gam*1000;
75         u=u+1;
76     end
77 end
78
79 % inverzni Laplaceova transformace (homogenizace metodou Mori-Tanaka)
80 function[Y]=F_p(p,sgm,om,fm,Gi0,Gm0,G,tau,Km0,M)
81 F=sgm*om./(p.^2+om^2);      % Laplaceuv obraz zatezovaci funkce
82 fi=1-fm;      % funkce invlapm muze mit jen 9 parametru
83 Jm_d=1./(p*Gm0) ...
84     +1./p.*(1./(G.*tau)*(1./(p*ones(1,M)+1./(ones(length(p),1)*tau))))';
85 Jm_v=1./(p*Km0);
86 Ji_d=1./(p*Gi0);

```

```

87 Beta_m=6*(Jm_d+2*Jm_v)/(5*(3*Jm_d+4*Jm_v));
88 Jeff_d=(fm+fi.*(1+Beta_m.*(Jm_d./Ji_d-1)).^-1) ...
89     ./(fm./Jm_d+fi./Ji_d.*(1+Beta_m.*(Jm_d./Ji_d-1)).^-1);
90 Y=p.*Jeff_d.*F;
91 end
92 pol=0;
93 tol=1e-12;
94 Lt=invlap('F_p',t,pol,tol,sgm,om,fm,Gi0,Gm0,G,tau,Km0,M)*1000;
95
96 % vysledne hodnoty obou algoritmu
97 [t f(t,sgm,om) Lt ea']

```

H.4 Lichoběžníkové zatížení: mb-lich.m

```

1  %% Materialovy bod (pri lichobeznikovem zatizeni)
2
3  %% Heavisideova funkce
4  function H=H(t,t0)
5      if t<t0, H=0;
6          else H=1;
7      end
8  end
9
10 % parametry modelu
11 E0=21.04;      % [GPa]
12 E=[1911 747 404 105];      % [GPa]
13 tau=[0.1 1 10 100];      % [den]
14 M=length(E);      % pocet dalku
15
16 % zatezovaci funkce (t oblast)
17 sgm=5;      % [MPa]
18 t1=10;      % [den]
19 t2=60;      % [den]
20 t3=70;      % [den]
21 function y=f(t,sgm,t1,t2,t3)
22     y=sgm*(t/t1-(t-t1)/t1*H(t,t1)-(t-t2)/(t3-t2)*H(t,t2)+(t-t3)/(t3-t2)*H(t,t3));
23 end
24
25 % vektor casu pro vyhodnoceni f(t)
26 t=(0:1:100)';      % [den]
27 t(1)=0.1;

```

```

28
29 % zatizeni
30 for i=1:length(t)
31     load(i)=f(t(i),sgm,t1,t2,t3);
32 end
33
34 % presne analyticky reseni: deformace v case t [le-6]
35 for i=1:length(t)
36     as(i) = sgm* ...
37         ((1/(E0*t1)*t(i)+sum(1./(E*t1) ...
38             *(t(i)-tau+tau.*exp(-t(i)./tau)))) ...
39         - (1/(E0*t1)*(t(i)-t1)+sum(1./(E*t1) ...
40             *(t(i)-t1-tau+tau.*exp(-(t(i)-t1)./tau))))*H(t(i),t1) ...
41         - (1/(E0*(t3-t2))*(t(i)-t2)+sum(1./(E*(t3-t2)) ...
42             *(t(i)-t2-tau+tau.*exp(-(t(i)-t2)./tau))))*H(t(i),t2) ...
43         + (1/(E0*(t3-t2))*(t(i)-t3)+sum(1./(E*(t3-t2)) ...
44             *(t(i)-t3-tau+tau.*exp(-(t(i)-t3)./tau))))*H(t(i),t3))*1000;
45 end
46
47 % exponencialni algoritmus
48 n=10000;      % pocet kroku
49 dt=100/n;
50 u=1;
51 theta=exp(-dt./tau);
52 psi=tau.*(1-theta)./dt;
53 eps_p=zeros(1,M);
54 eps_n=zeros(1,M);
55 deps_p=zeros(1,M);
56 deps_n=zeros(1,M);
57 for i=1:n
58     del_sgm=f(i*dt,sgm,t1,t2,t3)-f((i-1)*dt,sgm,t1,t2,t3);
59     deps_n=theta.*deps_p.+(1-theta)./(dt*E)*del_sgm;
60     eps_n=eps_p.+dt*psi.*deps_p.+(1-psi)*del_sgm./E;
61     deps_p=deps_n;
62     eps_p=eps_n;
63     if i*dt==t(u), ea(u)=(f(i*dt,sgm,om)/E0+sum(eps_n))*1000;
64         u=u+1;
65     end
66 end
67
68 % inverzni Laplaceova transformace
69 function[Y]=F_p(p,sgm,t1,t2,t3,E0,E,tau,M)
70 F=sgm/t1.*1./p.^2-sgm/t1.*1./p.^2.*exp(-t1.*p) ...
71     -sgm/(t3-t2).*1./p.^2.*exp(-t2.*p)+sgm/(t3-t2).*1./p.^2.*exp(-t3.*p);

```

```

72 J=1./(p*E0) ...
73     +1./p.*(1./(E.*tau)*(1./(p*ones(1,M)+1./(ones(length(p),1)*tau))))');
74 Y=p.*J.*F;
75 end
76 pol=0;
77 tol=1e-12;
78 Lt=invlap('F_p',t,pol,tol,sgm,t1,t2,t3,E0,E,tau,M)*1000;
79
80 % absolutni chyba obou algoritmu oproti analytickemu reseni
81 [t load' as' Lt-as' ea'-as']

```

H.5 Ověření spolehlivosti funkce invlap.m: IL-vs-GS.m

```

1 %% Casticovy kompozit pri cistem smyku (invlap.m vs. Gavsteh.m)
2
3 % parametry modelu
4 fm=0.8;      % podil matrice (viskoelasticka)
5 fi=1-fm;    % podil inkluze (elasticka)
6 Ei0=386;    % [GPa]
7 Em0=21.04;  % [GPa]
8 E=[9902 3841 1911 747 404 105]; % [GPa]
9 tau=[0.001 0.01 0.1 1 10 100]; % [den]
10 M=length(E); % pocet dalku (matrice)
11 nu_m=0.4;   % Poissonuv soucinitel matrice
12 nu_i=0.41;  % Poissonuv soucinitel inkluze
13 Gi0=Ei0/(2*(1+nu_i)); % [GPa] smykovy modul pruznosti inkluze (elasticka)
14 Gm0=Em0/(2*(1+nu_m)); % [GPa] smyk. modul pruz. (O-teho dalku matrice)
15 G=E/(2*(1+nu_m)); % [GPa] smykovy modul pruznosti viskoelastickyh dalku
16 Km0=2*Gm0*(1+nu_m)/(3*(1-2*nu_m)); % [GPa] objemovy modul pruznosti
17
18 % zatezovaci funkce
19 sgm=5;      % [MPa] amplituda smykoveho napeti
20 om=pi/100;
21 function y=f(t,sgm,om)
22     y=sgm*sin(om*t);
23 end
24
25 % vektor casu pro vyhodnoceni f(t)
26 t=linspace(0,100,9); % [den]
27 t(1)=0.1;
28

```

```

29 % inverzni Laplaceova transformace (homogenizace metodou Mori-Tanaka)
30 function[Y]=F_p(p,sgm,om,fm,Gi0,Gm0,G,tau,Km0,M)
31 F=sgm*om./(p.^2+om^2);      % Laplaceuv obraz zatezovaci funkce
32 fi=1-fm;      % funkce invlap.m muze mit jen 9 parametru
33 Jm_d=zeros(size(p));
34 for ii=1:length(p)
35     Jm_d(ii)=1./(p(ii)*Gm0);
36     for jj=1:M
37         Jm_d(ii)=Jm_d(ii)+1/(G(jj)*tau(jj)*p(ii)*(p(ii)+1./tau(jj)));
38     end
39 end
40 Jm_v=1./(p*Km0);
41 Ji_d=1./(p*Gi0);
42 Beta_m=6*(Jm_d+2*Jm_v)./(5*(3*Jm_d+4*Jm_v));
43 Jeff_d=(fm+fi.*(1+Beta_m.*(Jm_d./Ji_d-1)).^-1) ...
44     ./(fm./Jm_d+fi./Ji_d.*(1+Beta_m.*(Jm_d./Ji_d-1)).^-1);
45 Y=p.*Jeff_d.*F;
46 end
47 pol=0;
48 tol=1e-12;
49 L=22;
50 for v=1:length(t)
51     tv=t(v);
52     IL(v)=invlap('F_p',tv,pol,tol,sgm,om,fm,Gi0,Gm0,G,tau,Km0,M)*1000;
53     GS(v)=gavsteh('F_p',tv,L,sgm,om,fm,Gi0,Gm0,G,tau,Km0,M)*1000;
54 end
55
56 % vysledne hodnoty obou algoritmu
57 [t f(t,sgm,om) IL' GS']

```


Milan Strádal

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Porovnání dvou přístupů k určení celkové odezvy
kompozitů s viskoelastickou maticí

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STAVEBNÍ

KATEDRA MECHANIKY

STUDIJNÍ PROGRAM: Stavební inženýrství

STUDIJNÍ OBOR: Konstrukce pozemních staveb

VEDOUcí PRÁCE: Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

PRAHA 2011

Vysázeno typografickým systémem L^AT_EX v distribuci MiK_TE_X.